Владикавказский математический журнал
Июль–сентябрь, 2005, Том 7, Выпуск 3

УДК **517.98**

СВОЙСТВО БАНАХА — САКСА[1]

Е. М. Семенов, Ф. А. Сукочев

Профессору Юрию Федоровичу Коробейнику
в связи с его 75-летием

Статья посвящена изложению и обсуждению свойства и p-свойства Банаха — Сакса. Вводится понятие индекса Банаха — Сакса. Основное внимание уделено перестановочно-инвариантным пространствам. Показано, что свойство и p-свойство Банаха — Сакса тесно связаны с другими геометрическими свойствами банаховых пространств (тип пространства, p-выпуклость, индексы Бойда). В качестве примера рассматриваются пространства Орлича и $L_{p,q}$.

Пусть E — банахово пространство, $x_k \in E$ $\|x_k\| \leqslant 1$, $k = 1, 2, \dots$ Тривиальная оценка $\Big\|\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\Big\| \leqslant n$ справедлива всегда. В теории банаховых пространств часто возникает задача о получении нетривиальных оценок типа

$$\Big\|\sum_{k=1}^{n} x_k\Big\| = o(n) \tag{1}$$

при $n \to \infty$. Предположение о слабой сходимости к 0 (обозначается $x_k \xrightarrow{w} 0$) оказывается недостаточным для этого. Действительно, рассмотрим в гильбертовом пространстве l_2 последовательность ортов $e_n = (0, 0, \dots, \overset{n}{1}, 0 \dots)$ с повторениями

$$(x_k) = (\underbrace{e_1, e_1, \dots, e_1}_{m_1}, \underbrace{e_2, e_2, \dots, e_2}_{m_2}, \dots).$$

Очевидно, $x_k \xrightarrow{w} 0$. Если m_k стремится к ∞ достаточно быстро, то

$$\Big\|\sum_{k=1}^{n} x_k\Big\| \geqslant \frac{n}{2}$$

для всех $n \in \mathbb{N}$. Более того, с помощью подобных рассуждений можно построить такую последовательность $x_k \in l_2$, что $\|x_k\| = 1$, $x_k \xrightarrow{w} 0$ и

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\Big\|\sum_{k=1}^{n} x_k\Big\| = 1.$$

[1]Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, программой «Университеты России» и Австралийским исследовательским советом.

Однако для некоторых подпоследовательностей (1) будет выполнено.

В 1930 году С. Банах и С. Сакс доказали следующую теорему ([1, гл. 12, 1.2]). Пусть $1 < p < \infty$, $x_k \in L_p[0,1]$, $x_k \xrightarrow{w} 0$. Существуют такие константа $C > 0$ и подпоследовательность $m_k \in \mathbb{N}$, что

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} x_{m_k} \right\| \leqslant C n^{\max(\frac{1}{p}, \frac{1}{2})}$$

для всех $n \in \mathbb{N}$, где через $\mathbb{N}$ обозначено множество натуральных чисел. Оценка точна в следующем смысле. Если $1 < p \leqslant 2$, $x_k(t) = (\operatorname{mes} e_k)^{-\frac{1}{p}} \varkappa_{e_k}(t)$, где $\varkappa_e(t)$ — характеристическая функция измеримого множества $e \subset [0,1]$, e_k — последовательность дизъюнктных подмножеств $[0,1]$, то $x_k \xrightarrow{w} 0$ и

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} x_{m_k} \right\|_{L_p} = n^{\frac{1}{p}}$$

для любого $n \in \mathbb{N}$ и любой возрастающей последовательности $m_k \in \mathbb{N}$. Если $2 \leqslant p < \infty$, $x_k(t) = r_k(t) = \operatorname{sign} \sin 2^k \pi t$, то $x_k \xrightarrow{w} 0$ и в силу неравенства Хинчина

$$\sqrt{n} \leqslant \left\| \sum_{k=1}^{n} x_{m_k} \right\|_{L_p} \leqslant \sqrt{p}\sqrt{n}$$

для любого $n \in \mathbb{N}$ и любой возрастающей последовательности $m_k \in \mathbb{N}$. Теорема Банаха — Сакса приводит к следующим определениям.

Пусть E — банахово пространство и $p \geqslant 1$. Ограниченная последовательность $\{x_k\} \subset E$ называется p-BS-последовательностью (BS-последовательностью), если существует подпоследовательность $\{y_k\} \subset \{x_k\}$ такая, что

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} n^{-\frac{1}{p}} \left\| \sum_{k=1}^{n} y_k \right\| < \infty \quad \left(\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \left\| \sum_{k=1}^{n} y_k \right\| = 0 \right).$$

Следуя [2, 3], мы будем говорить, что E обладает p-BS-свойством (BS-свойством) и писать $E \in p$-BS ($E \in BS$), если всякая слабо сходящаяся к 0 последовательность содержит p-BS-подпоследовательность (BS-последовательность). Очевидно, всякое банахово пространство обладает 1-BS-свойством. Множество $\Gamma(E) = \{p :\ p \geqslant 1,\ E \in BS(p)\}$ есть $[1, \alpha]$ или $[1, \alpha)$ для некоторого $\alpha \geqslant 1$. Мы будем называть число α индексом Банаха — Сакса пространства E и писать:

$$\gamma(E) = \begin{cases} \alpha, & \text{если } \Gamma(E) = [1, \alpha], \\ \alpha - 0, & \text{если } \Gamma(E) = [1, \alpha). \end{cases}$$

Близкое понятие было введено С. А. Раковым в работе [4], где было изучено p-BS-свойство пространств Орлича.

Сформулированная выше теорема Банаха — Сакса означает, что $\gamma(L_p) = \min(p, 2)$ для $p \in (1, \infty)$. Ясно, $\gamma(L_1) = 1$. В. Шленк доказал, что $L_1 \in BS$ [5].

Пусть $p \in (1, \infty)$. Так как всякая слабо сходящаяся к 0 последовательность $x_n \in l_p$ сходится к 0 покоординатно, то существует такая подпоследовательность $\{y_n\} \subset \{x_n\}$, что $y_n = u_n + v_n$, где $\|v_n\|_{l_p} \leqslant 2^{-n}$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и носители $u_n \in l_p$ попарно дизъюнктны. Отсюда вытекает, что $\gamma(l_p) = p$ и $\gamma(c_0) = \infty$. В силу теоремы Шура слабая и сильная сходимость в l_1 совпадают, поэтому $\gamma(l_1) = \infty$.

Свойство Банаха — Сакса и p-свойство Банаха — Сакса изучались во многих работах. С. Какутани доказал, что всякое равномерно выпуклое пространство обладает свойством Банаха — Сакса [6, гл. 3, § 7, теорема 1]. Примеры рефлексивных пространств с безусловным базисом, но без свойства Банаха — Сакса были построены А. Баернстейном [7] и Б. Бозами [3].

Свойство Банаха — Сакса наследуется подпространствами. Поэтому универсальные пространства C или l_∞ также не принадлежат классу BS. С. А. Раков показал, что всякое пространство, имеющее тип Радемахера $p \in (1,2]$, обладает p-BS-свойством [4]. Наиболее полно BS- и p-BS-свойства изучены в классе перестановочно-инвариантных пространств. Приведем необходимые определения [8, 9].

Банахово функциональное пространство E на $[0,1]$ с мерой Лебега называется перестановочно-инвариантным (r. i.) или симметричным, если

1) из $|x(t)| \leqslant |y(t)|$ вытекает $x \in E$ и $\|x\|_E \leqslant \|y\|_E$;

2) из равноизмеримости $x(t)$, $y(t)$ и $y \in E$ следует $x \in E$ и $\|x\|_E = \|y\|_E$.

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что E сепарабельно или сопряжено к сепарабельному.

Обозначим через $\varkappa_e(t)$ характеристическую функцию измеримого множества $e \subset [0,1]$.

Для любого $\tau > 0$ оператор

$$\sigma_\tau x(t) = \begin{cases} x(\frac{t}{\tau}), & 0 \leqslant t \leqslant \min(\tau,1), \\ 0, & \min(\tau,1) < t \leqslant 1 \end{cases}$$

ограничен в r. i. пространстве E и $\|\sigma_\tau\|_E \leqslant \max(1,\tau)$. Числа

$$\alpha_E = \lim_{\tau\to 0} \frac{\ln\|\sigma_\tau\|_E}{\ln\tau}, \quad \beta_E = \lim_{\tau\to\infty} \frac{\ln\|\sigma_\tau\|_E}{\ln\tau}$$

называются индексами Бойда пространства E. Всегда $0 \leqslant \alpha_E \leqslant \beta_E \leqslant 1$. Без ограничения общности можно считать $\|\varkappa_{(0,1)}\|_E = 1$.

Если E — r. i. пространство, то через E' обозначается множество измеримых на $[0,1]$ функций, для которых

$$\|x\|_{E'} = \sup_{\|y\|_E \leqslant 1} \int_0^1 x(t)y(t)dt < \infty.$$

Известно, что E' также r. i. пространство. Если E сепарабельно, то E' совпадает с сопряженным пространством E^* и их нормы равны. Если E сепарабельно, то вложение $E \subset E''$ изометрично.

Пространства Лоренца $L_{p,q}$ играют важную роль в теории r. i. пространств. Если $1 < p < \infty$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, то через $L_{p,q}$ обозначается множество суммируемых функций, для которых

$$\|x\|_{L_{p,q}} = \left(\frac{q}{p} \int_0^1 (x^*(t) t^{\frac{1}{p}})^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} < \infty,$$

где $x^*(t)$ — перестановка функции $|x(t)|$ в убывающем порядке. Для $q = \infty$ норма модифицируется обычным образом. Если $q > p$, то $\|\cdot\|_{L_{p,q}}$ — квазинорма, эквивалентная некоторой норме. Если $1 \leqslant q < r < \infty$, то $L_{p,q} \subset L_{p,r}$ и это вложение строгое. Очевидно, $L_{p,p}$ совпадает с L_p.

Обозначим через Φ множество возрастающих вогнутых на $[0,1]$ функций, удовлетворяющих условию $\phi(0) = 0$, $\phi(1) = 1$. Всякая функция $\phi \in \Phi$ порождает пространство Лоренца $\Lambda(\phi)$ с нормой

$$\|x\|_{\Lambda(\phi)} = \int_0^1 x^*(t)\, d\phi(t).$$

Пространство $\Lambda(\phi)$ сепарабельно, если ϕ непрерывна в 0. В этом случае сопряженным к $\Lambda(\phi)$ является пространство $M(\phi)$ с нормой

$$\|x\|_{M(\phi)} = \sup_{0<\tau\leqslant 1} \frac{1}{\phi(\tau)} \int_0^\tau x^*(t)\, dt.$$

Пусть $M(t)$ — возрастающая выпуклая функция на $[0,\infty)$, $\lim\limits_{t\to 0} \frac{1}{t} M(t) = \lim\limits_{t\to\infty} \frac{t}{M(t)} = 0$. Тогда пространством Орлича L_M называется множество суммируемых функций, для которых

$$\|x\|_{L_M} = \inf \left\{ \lambda :\ \lambda > 0,\ \int_0^1 M(|x(t)|/\lambda)\, dt \leqslant 1 < \infty \right\}.$$

Если E — несепарабельное r. i. пространство, то замыкание L_∞ в E обозначается через E^0. За исключением случая, когда $E = L_\infty$, пространство E^0 сепарабельно.

R. i. пространство E обладает свойством Фату, если из условий $x_n \uparrow x$ п. в., $x_n \geqslant 0$, $\sup\limits_n \|x_n\| < \infty$ вытекает $x \in E$ и $\|x\| = \lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\|$. Пространство E называется p-выпуклым ($p > 1$), если существует такая константа $C > 0$, что для любого $n \in \mathbb{N}$ и любых $x_1, x_2, \ldots, x_n \in E$

$$\left\| \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\| \leqslant C \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Если в определении BS-свойства ограничиться только последовательностями функций с дизъюнктными носителями, то мы приходим к определению BS-d-свойства. Аналогичным образом, если в определении множества $\Gamma(E)$ ограничиться лишь последовательностями независимых функций или функций с дизъюнктными носителями, то мы приходим к определению множеств $\Gamma_i(E)$ и $\Gamma_d(E)$.

Если сепарабельное r. i. пространство обладает свойством Фату, то для него BS-свойство и BS-d-свойство эквивалентны. Предположение о свойстве Фату в этой теореме существенно. Нетрудно проверить, что всякое сепарабельное пространство Лоренца, обладает свойством Фату и BS-d-свойством. Поэтому всякое сепарабельное пространство Лоренца обладает BS-свойством. Однако классу BS принадлежит не всякое пространство M^0_ϕ. Для того, чтобы пространство Орлича L_M обладало BS-свойством необходимо и достаточно, чтобы L_M было сепарабельно. Если же L_M несепарабельно, то L^0_M (замыкание L_∞ в L_M) не обладает BS-свойством.

Как отмечалось выше, индекс пространства может принимать любые значения из $[1,\infty]$. В классе r. i. пространств индекс может принимать значения лишь из промежутка [1, 2]. Более того, для любого r. i. пространства E $\Gamma(E) \subset \Gamma_i(E) \subset \Gamma_d(E) \bigcap [1,2]$. Если сепарабельное r. i. пространство E p-выпукло для некоторого $p > 1$ и $\alpha_E > 0$, то $\gamma(E) \geqslant \min(p,2)$. В частности, если сепарабельное r. i. пространство E 2-выпукло и $\alpha_E > 0$, $\gamma(E) = 2$. Если E — сепарабельное r. i. пространство и $\alpha_E > \frac{1}{2}$, то $\Gamma(E) = \Gamma_i(E)$.

В этой теореме предположение $\alpha_E > \frac{1}{2}$ нельзя заменить на $\alpha_E \geqslant \frac{1}{2}$. Действительно, $\Gamma(L_{2,1}) = [1,2)$ и $\Gamma_i(L_{2,1}) = [1,2]$. Если $1 < p \leqslant 2$, E — сепарабельное r. i. пространство, $p \in \Gamma_d(E)$ и $0 < \alpha_E \leqslant \beta_E < \frac{1}{p}$, то $p \in \Gamma(E)$. В частности, если E — сепарабельное r. i. пространство и $0 < \alpha_E \leqslant \beta_E < \frac{1}{2}$, то

$$\Gamma(E) = \Gamma_i(E) = \Gamma_d(E) \cap [1,2].$$

Эта теорема позволяет значительно упростить задачу о нахождении индекса Банаха — Сакса конкретных r. i. пространств. Если $1 < p \leqslant 2$ и $p \in \Gamma(E)$, то $0 < \alpha_E \leqslant \beta_E < \frac{1}{p}$. Отсюда вытекает, что $L_r \subset E \subset L^0_{p,\infty}$ для некоторого $r < \infty$. Для $p = 2$ справедливо точное вложение $E \subset L_2$. Таким образом максимальным элементом (в смысле вложения) в классе сепарабельных r. i. пространств с индексом p является $L^0_{p,\infty}$ для $1 < p < 2$ и L_2 для $p = 2$. Минимальный элемент (в смысле вложения) в классе сепарабельных r. i. пространств с заданным индексом Банаха — Сакса отсутствует.

Пусть E, как и ранее, сепарабельное r. i. пространство. Для того, чтобы $\Gamma(E)$ было нетривиально (т. е. $\Gamma(E) \neq \{1\}$) необходимо и достаточно, чтобы $\Gamma_d(E)$ было нетривиально и $0 < \alpha_E \leqslant \beta_E < 1$. Для основных классов сепарабельных r. i. пространств эта теорема допускает следующее уточнение. Пусть E есть пространство Орлича L_M или пространство Лоренца $\Lambda(\phi)$ или пространство Марцинкевича $M^0(\phi)$. Для того, чтобы $\Gamma(E)$ было нетривиально необходимо и достаточно, чтобы $0 < \alpha_E \leqslant \beta_E < 1$.

Однако эта теорема не может быть распространена на множество всех сепарабельных r. i. пространств. Универсальное в классе пространств с безусловным базисом пространство Пелчинского U допускает реализацию как сепарабельное r. i. пространство [9]. Пространство U имеет безусловный базис, поэтому $0 < \alpha_U \leqslant \beta_U < 1$. Однако $U \notin BS$, так как U содержит как подпространство пространство, построенное А. Баернстейном [7], следовательно $\Gamma(U) = \{1\}$.

Был вычислен индекс Банаха — Сакса пространств $L_{p,q}$. Доказано, что для $p \in (1,\infty)$, $q \in [1,\infty)$

$$\gamma(L_{p,q}) = \begin{cases} \min(p,q,2), & p \neq 2,\ q \neq 1 \text{ или } p = 2,\ 1 < q \leqslant 2, \\ \min(p,2), & p \neq 2,\ q = 1, \\ 2-0, & p = 2,\ q = 1 \text{ или } q > 2, \end{cases}$$

$$\gamma(L^0_{p,\infty}) = \begin{cases} \min(p,2), & p \neq 2, \\ 2-0, & p = 2. \end{cases}$$

При нахождении $\gamma(L_{p,q})$ появились новые эффекты, которые отсутствовали в классическом случае пространств L_p. Тип Радемахера пространства $L_{p,q}$ не всегда совпадает с его индексом Банаха — Сакса. Для некоторых значений p,q множество $\Gamma(L_{p,q})$ есть полуоткрытый интервал. Функция $\gamma(L_{p,q})$ разрывна при $q = 1$. Для любого $\alpha \in (1,2]$ множество пространств $L_{p,q}$ с индексом $\geqslant \alpha$ неустойчиво относительно комплексного и вещественного методов интерполяции.

Изложенные выше результаты о свойстве Банаха — Сакса и индексе Банаха — Сакса r. i. пространств содержатся в работах [10–13].

Работы [14] и [15] содержат результаты о свойстве Банаха — Сакса и индексе Банаха — Сакса симметрично-нормированных идеалов компактных операторов и симметричных пространств измеримых операторов, являющихся соответственно некоммутативными аналогами симметричных пространств последовательностей и r. i. пространств функций. Изложим вкратце эти результаты.

Если E — это симметричное сепарабельное пространство последовательностей, то, как показано в [14], E обладает BS-свойством тогда и только тогда, когда симметрично нормированный идеал компактных операторов C_E обладает BS-свойством. Здесь C_E — это пространство всех компактных операторов x на некотором сепарабельном гильбертовом пространстве H, для которых $s(x) \in E$ с нормой $\|x\|_{C_E} = \|s(x)\|_E$, где $s(x) = \{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — это последовательность s-чисел оператора x. Подход, использованный в [14], базируется на следующем утверждении: любая базисная последовательность в C_E содержит подпоследовательность, эквивалентную некоторой базисной последовательности в пространстве $l_2 \oplus E$. В некотором смысле этот результат является некоммутативным аналогом следующего факта: любая базисная последовательность в E содержит подпоследовательность, эквивалентную базисной последовательности дизъюнктных элементов. Отсюда, в частности, мы можем заключить, что пространство C_E обладает BS-свойством тогда и только тогда, когда E обладает BS-d-свойством. Более того, вопрос об описании множества $\Gamma(C_E)$ сводится к описанию множества $\Gamma_d(l_2 \oplus E)$.

Подобный подход неприменим при изучении свойств типа Банаха — Сакса в более общем случае симметричных пространств измеримых операторов $E(M, \tau)$, ассоциированных с сепарабельным r. i. пространством E и полуконечной алгеброй фон Неймана M, снабженной точным нормальным полуконечным следом τ (за более подробной информацией об этих пространствах мы отсылаем к статье [16] и содержащейся в ней библиографии). Использованный в [15] метод может быть охарактеризован как некоммутативный аналог методов, использованных в [10–13]. Основной результат в [15] показывает следующее: *если алгебра фон Неймана (M, τ) неатомична и если r. i. пространство E обладает свойством Фату, то $E(M, \tau)$ обладает BS-свойством тогда и только тогда, когда E обладает BS-d-свойством.* Отсюда, в частности, следует, что пространство $L_M^0(M, \tau)$ нельзя вложить изоморфно в пространство $C_{L_M^0}$, если пространство Орлича L_M несепарабельно.

Если $E = L_p$, то пространство $E(M, \tau)$ совпадает с (так называемым) некоммутативным L_p-пространством. Как следует из работ [17–20] имеет место равенство $\Gamma(L_p) = \Gamma(L_p(M, \tau))$ при всех $1 < p < \infty$. Для пространств Лоренца (и их обобщений) аналог последнего равенства получен в [15].

Литература

1. *Банах С.* Теория линейных операций.—Ижевск: Регулярная и хаотичная динамика, 2001.—272 с.
2. *Johnson W. B.* On quotiens of L_p which one quotients of l_p // Compositio Math.—1977.—V. 34.—P. 69–89.
3. *Beauzamy B.* Banach–Saks properties and spreading models // Math. Scand.—1979.—V. 44.—P. 357–384.
4. *Раков С. А.* О показателе Банаха — Сакса некоторых банаховых пространств последовательностей // Мат. заметки.—1982.—Т. 32, № 5.—С. 613–626.
5. *Szlenk W.* Sur les suites faiblement convergentes dans l'space L // Studia Math.—1965.—№ 25.—P. 337–341.
6. *Дистель Дж.* Геометрия банаховых пространств.—Киев: Вища школа, 1980.—216 с.
7. *Baernstein A.* On reflexivity and summability // Studia Math.—1972.—V. 2, № 17.—P. 91–94.
8. *Lindenstrauss J., Tzafriri L.* Classical Banach Spaces. II. Function spaces.—Berlin: Springer-Verlag, 1979.—x+243 p.
9. *Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов.—М.: Наука, 1978.—400 с.
10. *Dodds P. G., Semenov E. M., Sukochev F. A.* The Banach–Saks property in rearrangement invariant spaces // Studia Math.—2004.—162 (3).—P. 263–294.
11. *Semenov E. M., Sukochev F. A.* The Banach–Saks index of rearrangement invariant spaces on [0,1] // C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I.—2003.—V. 337.—P. 397–401.
12. *Семенов Е. М., Сукочев Ф. А.* Индекс Банаха — Сакса // Мат. сб.—2004.—Т. 195, № 2.—С. 117–140.

13. *Astashkin S. V., Semenov E. M., Sukochev F. A.* The Banach–Saks p-property // Math. Annalen (to appear).
14. *Arazy J.* Basic sequences, embeddings and the uniqueness of the symmetric structure in unitary matrix spaces // J. Func. Anal.—1981.—V. 40.—P. 302–340.
15. *Dodds P., Dodds T. and Sukochev F.* Banach–Saks properties in symmetric spaces of measurable operators, submitted.
16. *Chilin V. I. and Sukochev F. A.* Weak convergence in non-commutative symmetric spaces // J. Operator Theory.—1994.—V. 31.—P. 35–65.
17. *Sukochev F. A.* Non-isomorphism of L_p-spaces associated with finite and infinite von Neumann algebras // Proc. Amer. Math. Soc.—1996.—V. 124.—P. 1517–1527.
18. *Haagerup U., Rosenthal H. P. and Sukochev F. A.* Banach embedding properties of non-commutative L^p-spaces // Memoirs Amer. Math. Soc.—2003.—V. 163, № 776.
19. *Raynaud Y. and Xu Q.* On subspaces of non-commutative L_p-spaces // J. Func. Anal.—2003.—V. 203.—P. 149–196.
20. *N. Randrianantoanina.* Sequences in non-commutative L_p-spaces // J. Operator Theory.—2002.—V. 48.—P. 255–272.

Статья поступила 14 мая 2005 г.

Семенов Евгений Михайлович, д. ф.-м. н.
г. Воронеж, Воронежский государственный университет
Email:semenov@func.vsu.ru

Сукочев Федор Анатольевич, к. ф.-м. н.
г. Аделаиде, Австралия, Университет Флиндерс
E-mail: sukochev@infoeng.flinders.edu.au