Владикавказский математический журнал
Апрель–июнь, 2005, Том 7, Выпуск 2

УДК **517.9**

О ПРИМЕНЕНИИ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ НОРМАЛЬНО РАЗРЕШИМЫХ ОПЕРАТОРОВ К НЕКОТОРЫМ КЛАССАМ ОПЕРАТОРОВ В КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ

Ю. Ф. Коробейник

Дорогому юбиляру Сергею Михайловичу Никольскому с глубоким уважением в память о встречах в Кацивели, Саратове, Днепропетровске, Теберде, Воронеже, Москве и с надеждой на будущие встречи посвящаю этот небольшой обзор

В работе дается краткий обзор результатов о нормальной разрешимости в различных пространствах аналитических функций некоторых классов линейных операторов (в основном, дифференциальных), полученных с помощью теории возмущений нормально разрешимых операторов. Описываются также такие характеристики этих операторов, как нётеровость, значение индекса и т. д.

1. Предварительные сведения из теории нормально разрешимых операторов

1.1. В 1943 г. в журнале «Известия АН СССР. Сер. матем.» появилась статья Сергея Михайловича Никольского [1], положившая начало развитию так называемой теории возмущений нормально разрешимых операторов, т. е. исследованию структуры и нормальной разрешимости линейного оператора вида $L = L_1 + L_2$, где L_1 — нормально разрешимый оператор, непрерывно действующий из одного линейного топологического пространства (л.т.п.) E_1 в другое л.т.п. E_2, а L_2 — линейный непрерывный из E_1 в E_2 оператор, подчиненный в том или ином смысле оператору L_1. Напомним, что линейный оператор L, действующий из л.т.п. E_1 в л.т.п. E_2, называются нормально разрешимыми, если множество его значений $L(E_1) := \{Ly : y \in E_1\}$ замкнуто в E_2. Обозначим, как обычно, символом $E_2/L(E_1)$ фактор-пространство E_2, и пусть $Z_L := L^{-1}(0) = \{x \in E_1 : Lx = 0\}$ — ядро оператора L в E_1. Назовем *d-характеристикой* нормально разрешимого оператора L упорядоченную пару (α_L, β_L), где $\alpha_L := \dim Z_L$, $\beta_L := \dim E_2/L(E_1)$. Нормально разрешимый оператор L называется

а) *нётеровым* (или Φ-*оператором*), если $\alpha_L < +\infty$, $\beta_L < +\infty$;
б) Φ^+-*оператором*, если $\alpha_L < +\infty$, $\beta_L = +\infty$;
в) Φ^--*оператором*, если $\alpha_L = +\infty$, $\beta_L < +\infty$.

Если хотя бы одно из чисел α_L, β_L конечно, то определено (конечное или бесконечное) число $\delta_L := \alpha_L - \beta_L$, которое называется *индексом* нормально разрешимого оператора L. Нётеров оператор с нулевым индексом называется *фредгольмовым оператором.*

В работе [1] С. М. Никольский дал общее представление фредгольмова оператора L, действующего из банахова пространства (B-пространство) E_1 в B-пространство E_2, и установил инвариантность его индекса при компактном возмущении: если L — фредгольмов оператор из B-пространства E_1 в B-пространство E_2, а L_0 — линейный оператор, действующий вполне непрерывно из E_1 в E_2, то $L + L_0$ — также фредгольмов оператор из E_1 в E_2. С некоторым опозданием эта работа стала известна жившему в далекой Новой Зеландии А. Аткинсону, опубликовавшему в 1951 г. статью [2]. В ней методом, аналогичным примененному в [1], были получены такие же результаты для нётерова оператора в B-пространствах, т. е. описана структура произвольного Φ-оператора L, действующего из B-пространства E_1 в B-пространство E_2, и доказана инвариантность такого оператора (и его индекса) при компактном возмущении: если L_0 — линейный вполне непрерывный оператор из E_1 в E_2, то $L_1 := L + L_0$ — также Φ-оператор из E_1 в E_2, причем $\delta_L = \delta_{L_1}$. (Этот результат называется в дальнейшем теоремой А.) В последующем Б. Юд [3] и М. Г. Крейн с его учениками (И. Ц. Гохберг, М. А. Красносельский и др.) установили аналогичные результаты для Φ^+- и Φ^--операторов (см., например, обзорную статью [4] и библиографию к ней). Отметим здесь лишь два результата для Φ^+-операторов и Φ^--операторов в B-пространствах, которые нашли важные приложения в теории линейных интегральных и дифференциальных уравнений. В этих результатах E_j — B-пространство.

Теорема B [3, 4]**.** *Пусть $L_1 : E_1 \to E_2$ — Φ^+-оператор (или Φ^--оператор), а L_2 — линейный вполне непрерывный оператор из E_1 в E_2. Тогда $L_1 + L_2$ — также Φ^+-оператор (соответственно, Φ^--оператор) из E_1 в E_2.*

Теорема C [4]**.** *Пусть L_0 — произвольный Φ^--оператор (или Φ^+-оператор), действующий непрерывно из B-пространства E в E. Тогда найдется число $\eta > 0$ такое, что каков бы ни был линейный оператор $L_1 : E \to E$, для которого $\|L_1\| < \eta$ ($\|\cdot\|$ — норма в E), оператор $L_0 + L_1$ также является Φ^--оператором (соответственно, Φ^+-оператором) в E, причем $\beta_{L_0+L_1} \leqslant \beta_{L_0}$ (соответственно, $\alpha_{L_0+L_1} \leqslant \alpha_{L_0}$).*

1.2. При исследовании линейных дифференциальных и интегральных уравнений в комплексной области нередко возникают задачи о разрешимости таких уравнений в различных отделимых локально выпуклых пространствах, не являющихся B-пространствами. Пожалуй, наиболее важными и часто встречающимися в комплексном анализе классами таких пространств являются проективные и индуктивные пределы B-пространств. В связи с этим естественно возникла задача о переносе на эти классы локально выпуклых пространств вышеприведенных результатов, полученных для B-пространств.

Пусть A — совершенно упорядоченное отношением $<$ множество индексов; $\{X_t,\, t \in A\}$, $\{Y_t,\, t \in A\}$ — два семейства векторных пространств таких, что если $t_1, t_2 \in A$ и $t_1 < t_2$, то $X_{t_1} \subseteq X_{t_2}$, $Y_{t_1} \subseteq Y_{t_2}$. Положим $S_A := \bigcup\limits_{t\in A} X_t$; $P_A := \bigcup\limits_{t\in A} Y_t$; $R_A := \bigcap\limits_{t\in A} X_t$; $Q_A := \bigcap\limits_{t\in A} Y_t$. Предположим, что на векторном пространстве S_A определен линейный оператор L со значениями в P_A, причем для любого $t \in A$ $L(X_t) = \{Lv : v \in X_t\} \subseteq Y_t$. Тогда сужение $L\big|_{X_t}$ оператора L на X_t является линейным оператором L^t, действующим из X_t в Y_t. При этом L переводит векторное пространство $R_A \subseteq S_A$ в некоторое векторное подпространство Q_A. Естественным образом возникает задача описания свойств оператора L (например, его непрерывности или нормальной разрешимости, нётеровости, фредгольмовости и т. п.) как оператора из S_A в P_A и из R_A в Q_A, если известны соответствующие свойства семейства операторов $\{L^t : X_t \to Y_t\}_{t\in A}$.

1.3. Предположим еще, что на всех пространствах X_t, Y_t определены отделимые локально выпуклые топологии. Будем обозначать символами $\widetilde{X}_t$ и $\widetilde{Y}_t$ соответствующие отделимые локально выпуклые пространства и будем всюду далее считать, что если t_1, $t_2 \in A$ и $t_1 < t_2$, то $\widetilde{X}_{t_1} \hookrightarrow \widetilde{X}_{t_2}$, $\widetilde{Y}_{t_1} \hookrightarrow \widetilde{Y}_{t_2}$. Введем в S_A и P_A топологии индуктивного предела (см., например, [5, гл. V]), соответственно, пространств $\widetilde{X}_t$ и $\widetilde{Y}_t$ относительно операций $s(t)$ и $p(t)$ тождественного вложения X_t в S_A (соответственно, Y_t в P_A). Полученные таким путем локально выпуклые пространства обозначим символами $X_{\mathrm{ind}}(A)$ и $Y_{\mathrm{ind}}(A)$ (или, опуская символ A, просто X_{ind} и Y_{ind}). Как известно [5], при любом t из A операторы $s(t)$ и $p(t)$ непрерывны из $\widetilde{X}_t$ в X_{ind} (соответственно, из $\widetilde{Y}_t$ в Y_{ind}). Будем предполагать, что пространства X_{ind} и Y_{ind} отделимы.

Введем в R_A и Q_A топологии проективного предела (см. там же в [5]) пространств $\widetilde{X}_t$ и $\widetilde{Y}_t$ относительно операций $r(t)$ и $q(t)$ тождественного вложения R_A в X_t и Q_A в Y_t. Пусть $X_{\mathrm{pr}} := X_{\mathrm{pr}}(A)$ и $Y_{\mathrm{pr}} := Y_{\mathrm{pr}}(A)$ — полученные таким путем отделимые [5, гл. V] локально выпуклые пространства. При этом операторы $r(t)$ и $q(t)$ как операторы из X_{pr} в $\widetilde{X}_t$ и из Y_{pr} в $\widetilde{Y}_t$ непрерывны при всех t из A.

Предположим, что L^t — непрерывный нормально разрешимый оператор из $\widetilde{X}_t$ в $\widetilde{Y}_t$ для любого $t \in A$, и укажем условия, при которых L будет непрерывным нормально разрешимым оператором из X_{ind} в Y_{ind}, а также из X_{pr} в Y_{pr}. Кроме того, постараемся определить соответствующие d-характеристики этих двух операторов, считая, что при любом t из A известна d-характеристика (α_t, β_t) оператора L^t, где $\alpha_t = \dim Z_{L^t}$, $Z_{L^t} = \{x \in X_t : L^t x = 0\}$; $\beta = \dim Y_t / L^t(X_t)$.

Теорема 1 [6, 7]**.** *Пусть выполнены предположения настоящего пункта и пусть существует $t_0 \in A$ такое, что $Z_t = Z_{t_0}$, если $t \in A$ и $t < t_0$. Тогда L — непрерывный нормально разрешимый оператор из X_{pr} в Y_{pr}, причем $\alpha_L = \inf\{\alpha_t : t \in A\}$.*

Доказательство этой теоремы приведено в [6]. Пользуясь случаем, отметим в нем одну затрудняющую чтение опечатку: в правой колонке страницы 45 (пятая сверху строка) вместо $(R_\Pi)^0 \supseteq L(X_\Pi)$ должно быть $(R_\Pi)^0 \subseteq L(X_\Pi)$.

Следствие [6]**.** *Пусть L — линейный оператор из S_A в P_A такой, что $L\big|_{\widetilde{X}_t}$ — непрерывный нормально разрешимый оператор из $\widetilde{X}_t$ в $\widetilde{Y}_t$ для любого $t \in A$, причем $\alpha_t < +\infty$. Тогда L — непрерывный нормально разрешимый оператор из X_{pr} в Y_{pr} с d-характеристикой (α, β), в которой $\alpha = \min\{\alpha_t : t \in A\} < +\infty$ (т. е. L — Φ- или Φ^+-оператор).*

При некоторых дополнительных предположениях можно определить и второе число d-характеристики оператора L. Предварительно напомним (см., например, [8, с. 177]), что проективный предел Y_{pr} называется приведенным, если Q_A плотно в $\widetilde{Y}_t$ для любого $t \in A$.

Теорема 2 [6, 7]**.** *Пусть выполнены предположения теоремы 1 и пусть Y_{pr} — приведенный проективный предел отделимых локально выпуклых пространств $\widetilde{Y}_t$. Оператор $L : X_{\mathrm{pr}} \to Y_{\mathrm{pr}}$ является нормально разрешимым оператором с конечным значением числа β_L в его d-характеристике тогда и только тогда, когда $\sup\{\beta_t : t \in A\} < +\infty$. Если последнее соотношение выполнено, то $\beta_L = \max\{\beta_t : t \in A\}$.*

Следствие. *Пусть выполнены предположения теоремы 1 и пусть еще $\alpha_t < +\infty$, $t \in A$. Предположим, что Y_{pr} — приведенный проективный предел отделимых локально выпуклых пространств $\widetilde{Y}_t$. Оператор $L : X_{\mathrm{pr}} \to Y_{\mathrm{pr}}$ является Φ-оператором тогда и только тогда, когда $\sup\{\beta_t : t \in A\} < +\infty$. Если это неравенство выполнено, то*

$\beta_L = \max\{\beta_L : t \in A\}$ (*а по теореме 1* $\alpha_L = \min\{\alpha_t : t \in A\}$).

Замечание. Второе число d-характеристики нормально разрешимого оператора $L : E_1 \to E_2$ можно выразить в другой форме. Предположим, что линейный оператор L слабо непрерывен из E_1 в E_2, т. е. непрерывен из $(E_1, \sigma(E_1, E_1'))$ в $(E_2, \sigma(E_2, E_2'))$ (предполагается, что при $j = 1, 2$ E_j — отделимое локально выпуклое пространство с сопряженным E_j'). Как легко проверить (см., например, [5] или [6, п. 1, с. 44]), оператор L нормально разрешим тогда и только тогда, когда $L(E_1)$ совпадает с полярой $\big(L'^{-1}(0)\big)^\circ$ ядра $L'^{-1}(0)$ сопряженного оператора L'. Иначе говоря, линейный оператор $L : E_1 \to E_2$ нормально разрешим тогда и только тогда, когда уравнение $Ly = f$ разрешимо в E_1 для тех и только тех f из E_2, которые ортогональны ко всем функционалам φ из $L'^{-1}(0)$, т. е. таких, что $\varphi(f) = 0$, если $\varphi \in E_2'$ и $L'\varphi = 0$.

Введем еще одну характеристику нормально разрешимого оператора L, положив $\gamma_L := \dim \big(E_2/L(E_1)\big)'$. Так как $\big(E_2/L(E_1)\big)'$ алгебраически изоморфно пространству $(L(E_1))^\circ = L'^{-1}(0)$ (см. [5]), то $\gamma_L = \dim L'^{-1}(0)$. Нетрудно показать (см., например, [6, п. 1, с. 44]), что числа β_L и γ_L одновременно конечны или нет и совпадают в случае, когда оба они конечны. В силу сказанного в следствии теоремы 2 критерий того, что L — Φ-оператор, можно выразить в такой форме: $\gamma_L = \sup\{\gamma_t : t \in A\} < \infty$. Если это неравенство выполнено, то $\beta_L = \gamma_L = \max\{\gamma_t : t \in A\}$.

1.4. Предположим, что линейный оператор L из S_A в P_A таков, что $L\big|_{\widetilde{X}_t}$ — Φ- или Φ^+-оператор из $\widetilde{X}_t$ в $\widetilde{Y}_t$, $t \in A$. Из теоремы 1 следует, что L — Φ- или Φ^+-оператор из $X_{\mathrm{pr}}(Q)$ в $Y_{\mathrm{pr}}(Q)$, где Q — любое подмножество A (с тем же отношением порядка $<$). Рассмотрим уравнение

$$Lx = g, \quad g \in P_A. \tag{1}$$

Следуя [9], определим на множестве $S_A \times A$ характеристическую функцию $f(x,t)$, положив $f(x,t) = 1$, если $x \in X_t$, и $f(x,t) = 0$, если $x \notin X_t$. Назовем решение x уравнения (1) характеристически близким к g, если $(\forall t \in A)$ $f(x,t) = F(g,t)$, где $F(g,t)$ — характеристическая функция, определенная таким же образом на множестве $P_A \times A$.

Теорема 3 ([9, теорема 2.1]). *Для того чтобы уравнение* (1) *при данной правой части g из P_A имело в S_A характеристически близкое ему решение x в S_A, необходимо и достаточно, чтобы это уравнение было разрешимо в пространстве $X_{\mathrm{pr}}(Q_g)$, где $Q_g := \{t \in A : F(g,t) = 1\}$.*

Замечание. Пусть L — линейный оператор из S_A в P_A и пусть $L^t := L\big|_{X_t}$ — Φ-оператор из $\widetilde{X}_t$ в $\widetilde{Y}_t$. Допустим еще, что индекс $\delta(t) := \alpha_t - \beta_t$ оператора L^t не зависит от t на некотором множестве M из A. Тогда каждое из чисел α_t, β_t его d-характеристики постоянно на M. Простое доказательство этого факта имеется в [9] на с. 38.

1.5. Рассмотрим теперь действие оператора $L : S_A \to P_A$ как оператора из X_{ind} в Y_{ind}.

Теорема 4 ([6, 7]). *Пусть линейный оператор L из S_A в P_A таков, что для каждого $t \in A$ L^t — непрерывный нормально разрешимый оператор с конечной или полубесконечной d-характеристикой (α_t, β_t), $\beta_t < +\infty$ (т. е. L^t — Φ- или Φ^--оператор). Пусть, далее, Y_{t_1} плотно в $\widetilde{Y}_{t_2}$, если t_1, $t_2 \in A$ и $t_1 < t_2$. Тогда L — непрерывный нормально разрешимый оператор из X_{ind} в Y_{ind} с d-характеристикой (α_L, β_L), где $\alpha_L = \sup\{\alpha_t : t \in A\}$, $\beta_L = \min\{\beta_t : t \in A\}$. Оператор L является Φ- или Φ^--оператором. При этом L — Φ-оператор в том и только том случае, когда* $\sup\{\alpha_t : t \in A\} < +\infty$.

1.6. В частном случае, когда A — интервал из $\mathbb{R}$, а $\widetilde{X}_t$, $\widetilde{Y}_t$ — B-пространства, теоремы 1, 2, 4 получены в § 1 работы [10] и в § 2 статьи [11].

То обстоятельство, что понятие нормально разрешимого оператора можно распространить на определенные классы локально выпуклых пространств, не являющихся B-пространствами, отмечено ранее рядом авторов (см., например, [12–14]). В частности, в работе [13] рассмотрен случай, когда $Q = (a, r)$, $r \in (a, b) = A$, $\widetilde{X}_t$ и $\widetilde{Y}_t$ — B-пространства, L^t — Ф-оператор из $\widetilde{X}_t$ в $\widetilde{Y}_t$ при любом t из A. В этой статье основные теоремы о Ф- и Φ^+-операторах в B-пространствах, а именно, теоремы A и B, перенесены на пространства типа $X_{\text{ind}}(a, r)$ и $X_{\text{pr}}(a, r)$. Полученные общие теоремы применены в [13] к некоторым линейным операторам (не дифференциальным) в пространстве аналитических в круге функций и, в частности, к вопросам близости в теории полных систем и базисов. Доказательство теоремы 1 (в том виде, как оно изложено в п. 3 § 2 работы [7]) близко к доказательству теоремы 1 из [13]. Следует при этом отметить, что в схеме К. М. Фишмана оператор L является всегда нётеровым (из $X_{\text{ind}}(Q)$ в $Y_{\text{ind}}(Q)$ и из $X_{\text{pr}}(Q)$ в $Y_{\text{pr}}(Q)$), так как случай, когда $Q = (a, b)$, им не рассматривался. В то же время в теоремах 1–3 могут участвовать не только Ф-операторы, но и $\Phi^{\pm}$-операторы.

Наконец, отметим, что ряд общих результатов о нормально разрешимых операторах в проективных и индуктивных пределах B-пространств получен методами гомологической алгебры В. П. Паламодовым [15].

2. Краткий обзор результатов о нормальной разрешимости в комплексной области некоторых классов линейных операторов

2.1. В 1963–1964 гг. автор этой статьи начал исследования в Ростовском университете на нормальную разрешимость в пространствах E типа $[\rho, \sigma]$ $(0 < \rho < \infty)$ всех целых функций или порядка $< \rho$, или порядка ρ и типа $\leqslant \sigma$, где $0 \leqslant \sigma < \infty$, линейного дифференциального оператора бесконечного порядка с многочленными коэффициентами вида

$$Ly = y + \sum_{k=1}^{\infty} P_k(z) y^{(k)}(z)\,; \quad P_k(z) = \sum_{s=0}^{n_k} a_s^k z^s, \quad \alpha := \sup_{k \geqslant 1} \frac{n_k}{k} < 1. \tag{2}$$

При этом модули коэффициентов a_s^k удовлетворяют естественным условиям, при выполнении которых ряд в правой части первого равенства из (2) сходится равномерно внутри $\mathbb{C}$ для любой функции y из E, а оператор L непрерывен из E в E. Соответствующие результаты были анонсированы в заметке [16] и подробно изложены в главе II диссертации [17]. В последующем эти исследования (в течение примерно 30 лет) продолжались и развивались (применительно к различным линейным операторам в разных пространствах аналитических функций) как самим автором и его учениками, так и некоторыми другими российскими и зарубежными математиками. Ввиду ограниченности объема данной статьи мы расскажем здесь лишь об основных объектах исследований в этом направлении и результатах исследований, надеясь поместить более обширный обзор в другом месте.

Отметим прежде всего, что помимо заметки [16] и диссертации [17], автором и его учениками опубликованы по этой тематике не менее 40 работ, защищены 2 докторские диссертации (Ю. Ф. Коробейник, 1965 г. [17]; О. В. Епифанов, 1990 г. [18]) и 5 кандидатских диссертаций (Т. И. Демченко, О. В. Епифанов, В. В. Моржаков, Г. Г. Брайчев, Ю. А. Кирютенко).

2.2. На первом этапе, начавшемся с диссертации [17] и статей [11, 16], нормальная разрешимость линейных дифференциальных операторов бесконечного порядка типа (2) исследовалась в так называемых идеальных, или нормальных по Теплицу пространствах

H аналитических в круге $|z| < r(y)$ функций $y(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} y_k z^k$ таких, что если $y \in H$, $g(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} g_k z^k \in \bar{A}_0$ (т. е. g аналитична в круге $|z| < r(g)$) и $(\forall k \geqslant 0)$ $|g_k| \leqslant |y_k|$, то $g \in H$. К таким пространствам относятся, например, пространства $\bar{A}_0$, $A_R = A(K_R)$, $0 < R \leqslant \infty$, функций, аналитических в круге $|z| < R$; $\bar{A}_R := A(\bar{K}_R)$, $0 \leqslant R < \infty$, — пространство всех аналитических ростков (классов эквивалентности функций, аналитических в замкнутом круге $|z| \leqslant R$); $[\rho, \sigma)$ — пространство всех целых функций, у которых или порядок $< \rho$, или порядок равен ρ, но тип $< \sigma$ $(0 < \rho < \infty,\ 0 < \sigma \leqslant +\infty)$ и т. д. Исследование проводилось по следующей схеме, предложенной автором статьи. Уравнение

$$Ly = f, \quad y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k z^k, \quad f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k, \tag{3}$$

где $f \in H$, L — линейный непрерывный оператор из H в H, после перехода к последовательностям тейлоровских коэффициентов функций y и f и бесконечной системе линейных алгебраических уравнений, полученной приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях z слева и справа в (3), сводилось (с помощью промежуточных замен переменных y_k и f_k) к эквивалентной бесконечной системе алгебраических линейных уравнений

$$Tv = B, \tag{4}$$

где $v = (v_k)_{k=0}^{\infty}$, $B = (b_k)_{k=0}^{\infty}$ — элементы из B-пространства l_ρ $(1 < \rho < \infty)$, а T — линейный непрерывный оператор из l_ρ в l_ρ. Далее (и это ключевой момент метода) оператор T представлялся в виде суммы $T = T_1 + T_2$, где T_2 — компактный оператор в l_ρ, а T_1 — оператор дискретной свертки, изученный ранее в теории интегральных уравнений М. Г. Крейном и его учениками (см., например, [12]). Как известно [12], T_1 — нётеров оператор с определенной d-характеристикой, если его символ $a(z) := \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, где $(T_1, v)_m = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k v_{k+m}$, $m = 0, 1, \ldots$, отличен от нуля на единичной окружности. По теоремам A и B T — нётеров оператор в l_ρ с известным индексом. Возвращаясь к дифференциальному оператору L, получаем, что он будет нётеровым оператором с определенным индексом, действующим из одного B-пространства целых функций A_Q^ρ в другое — B_Q^ρ. При этом Q — текущая точка множества Λ, плотного в некотором интервале из $\mathbb{R}$. Привлекая затем теоремы 1 и 2, показываем, что L — нормально разрешимый (Φ- или $\Phi^\pm$-) оператор с определенной d-характеристикой в пространстве Фреше $[\rho, \sigma]$, $\rho \leqslant 1 - \alpha$, $0 \leqslant \sigma < \infty$. Применение теоремы 3 дает возможность найти частное решение уравнения (3), близкое по росту к f (т. е. имеющее тот же порядок и тип).

Аналогичным образом устанавливается нормальная разрешимость оператора L и в пространствах типа $[\rho, \sigma)$, $0 < \rho \leqslant 1 - \alpha$, $0 < \sigma \leqslant \infty$, но здесь на завершающем этапе используется теорема 4.

2.3. Подобная схема применялась в дальнейшем голландским математиком Ван дер Стином [20] для уравнения

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k(z) y^{(k)}(z) = f(z); \quad P_k(z) = \sum_{s=0}^{p} a_s^k z^s, \quad 0 \leqslant p < \infty. \tag{5}$$

В работе [9] с помощью некоторой модификации метода из [11, 17] установлена нормальная разрешимость оператора $Ly = \sum\limits_{k=0}^{\infty} P_k(z) y^{(k)}(z)$, где $(\forall k \geqslant 0)$ $P_k(z) = \sum\limits_{s=0}^{n_k} a_s^k z^s$,

$n_k < \infty$ и $\limsup\limits_{k\to+\infty}\dfrac{n_k}{k} < 1$, в пространствах типа $[\rho,\sigma]$. Результаты, полученные в [9], содержат как частные случаи все результаты работ [11, 16, 20]. Та же схема использовалась в диссертации Т. И. Демченко (Коршиковой) (1968 г.) для операторов вида (2) и (5), в которых обычные производные $y^{(k)}(z)$ заменены обобщенными производными Гельфонда — Леонтьева

$$D_\rho y(z) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_{k-1}}{a_k}\frac{y^{(k)}(0)}{k!}z^{k-1}, \quad D_\rho^k y = D_\rho(D_\rho^{k-1}y),$$

где $\lim k^{1/\rho}|a_k|^{1/k} = (\rho e\sigma)^{1/\rho}$ $(0<\rho,\sigma<+\infty)$, а также в диссертации Ю. А. Кирютенко (1977 г.) — для уравнения

$$f(z) = Ly := \sum_{k=0}^{\infty}\varphi_k(z)(T_0^k y)(z),$$

где $(\forall k\geqslant 0)$ $\varphi_k(z) = \sum\limits_{s=0}^{n_k} a_s^k z^s$, $n_k<+\infty$ и $\sup\limits_{k\geqslant 1}\dfrac{n_k}{k} < +\infty$, $(T_0 y)(z) = \int\limits_0^z y(t)dt$.

Описанный в 2.2 метод применялся и в ряде других работ автора и его учеников (один результат подобного рода приведен в конце пункта 2.4). Так, в работе [21] с его помощью установлена нормальная разрешимость в пространстве $A_R = A(K_R)$ всех аналитических в круге $|z|<R$ функций дифференциального оператора конечного порядка $M_p y := \sum\limits_{k=0}^{p} a_k(z)y^{(k)}(z)$, $0<p<+\infty$, в котором $a_k(z)\in A_R$ и функция $a_p(z)$ отлична от тождественного нуля ($a_p(z)\not\equiv 0$). В [21], в частности, показано, что если $0<R\leqslant+\infty$, то d-характеристика оператора M_p в A_R равна $(\alpha, \alpha+n-p)$, где n — число всех нулей (с учетом их кратностей) функции $a_p(z)$ в круге $K_R = \{z : |z|<R\}$, а α — число линейно независимых решений из A_R однородного уравнения $M_p y = 0$. Так как $\alpha\leqslant p$, то M_p — Φ^+-оператор, который будет Φ-оператором тогда и только тогда, когда $a_p(z)$ имеет в K_R конечное число нулей.

2.4. Несколько иной вариант метода из 2.2 применен в работе [22] к линейному оператору бесконечного порядка с многочленными коэффициентами в обобщенных производных, введенных автором в [22, 23]:

$$\begin{gathered} Ly := \sum_{k=0}^{\infty}P_k(z)D^k y(z); \quad P_k(z) = \sum_{s=0}^{n_k}a_s^k z^s, \quad n_k<+\infty, \quad k=0,1,\ldots; \\ D^k y = D(D^{k-1}y), \end{gathered} \tag{6}$$

$$Dy := \sum_{k=1}^{\infty}C_{k-1}\frac{y^{(k)}(0)}{k!}z^{k-1}. \tag{7}$$

При этом не предполагается, что все комплексные числа C_m, $m\geqslant 0$, определяющие оператор обобщенного дифференцирования D, отличны от нуля. Поэтому оператор обобщенного дифференцирования D включает в себя и обычную производную, и обобщенную производную Гельфонда — Леонтьева. В статье [22] рассмотрен оператор (6), (7) при условии

$$p := \sup_{k\geqslant 1}(n_k - k) < +\infty. \tag{8}$$

Оператор (6), (7), (8) назван в [22] квазирегулярным. В § 4 этой работы исследованы на нормальную разрешимость два подкласса квазирегулярного оператора, а именно, неособый квазирегулярный оператор и несущественно особый квазирегулярный оператор (определение первого из двух последних операторов дано в [22] на с. 498, в начале § 1, а второго — в первом абзаце с. 514). Как и раньше, в [22] производится переход от уравнения

$$Ly = f \tag{9}$$

к эквивалентной ему бесконечной системе линейных алгебраических уравнений вида (4), где T — (матричный) линейный оператор, непрерывно действующий из некоторого B-пространства S_A в другое B-пространство S_A^1. Далее оператор T представляется в виде $T = T_1 + T_2$, где при $j = 1, 2$ T_j — линейный непрерывный оператор из S_A в S_A^1. При этом, конечно, предполагается, что коэффициенты a_s^k в (6) удовлетворяют определенным условиям, которые здесь не приводятся ввиду некоторой их громоздкости. При выполнении этих условий показывается с помощью теоремы об операторе сжатия, что оператор T_1, не являющийся в данном случае оператором дискретной свертки, будет Ф-оператором с определенной d-характеристикой, а норму оператора T_2 можно сделать сколь угодно малой.

Это дает возможность воспользоваться теоремой С, согласно которой T — нормально разрешимый оператор с d-характеристикой (α, β), причем $\beta - \alpha = p$. Делая обратный переход к эквивалентному уравнению (9), заключаем, что оператор L (6)–(8) при определенных предположениях относительно коэффициентов a_s^k является непрерывным Ф-оператором из одного B-пространства $K_A(D)$ в другое $K_A^1(D)$ (оба эти пространства определены в [22] соответственно на с. 499 и 500). Переход к небанаховым пространствам аналитических функций осуществляется так же, как и раньше. Конкретные примеры такого перехода при различных предположениях относительно a_s^k приведены (для неособого квазирегулярного оператора) в § 3 статьи [22].

Отметим еще, что в работе [21] методом, изложенным в 2.2, установлена нормальная разрешимость оператора $M_p^D y := \sum\limits_{k=0}^{p} a_k(z) D^k y(z)$, в котором $a_p(z) \not\equiv 0$, $1 \leqslant p < +\infty$, $Dy = \sum\limits_{k=1}^{\infty} C_{k-1} \dfrac{y^{(k)}(0)}{k!} z^{k-1}$, $C_k \neq 0$, $k = 0, 1, \ldots$; $\lim\limits_{k\to\infty} |C_k| = +\infty$, в следующих пространствах:

1) пространстве $A_R = A(K_R)$ ($K_R = \{z : |z| < R\}$) всех аналитических в K_R функций; здесь при $R \in (0, +\infty]$ M_p^D — нормально разрешимый оператор в A_R с d-характеристикой $(\alpha, \alpha + n - p)$, где n — число всех нулей $a_p(z)$ (с учетом их кратностей) в K_R, а α — число линейно независимых решений из A_R однородного уравнения $M_p^D y = 0$;

2) пространстве $\bar{A}_R = A(\bar{K}_R)$ всех аналитических ростков на компакте $\bar{K}_R$ ($0 \leqslant R < +\infty$), с обычной индуктивной топологией; здесь M_p^D — нормально разрешимый оператор в $\bar{A}_R$ с d-характеристикой $(\bar{\alpha}, \bar{\alpha} + \bar{n} - p)$, где $\bar{n}$ — число всех нулей $a_p(z)$ в $\bar{K}_R$, $\bar{\alpha}$ — число линейно независимых решений уравнения $M_p^D y = 0$ из $\bar{A}_R$.

Как показано в [21], $\bar{\alpha} \leqslant \alpha \leqslant p$; кроме того, так как $a_p(z) \not\equiv 0$, то $\bar{n} < +\infty$. Поэтому в случае 1) M_p^d — Φ^+-оператор (который будет Ф-оператором тогда и только тогда, когда $\alpha < +\infty$, а в случае 2) M_p^D — Ф-оператор.

2.5. В диссертации Г. Г. Брайчева (1976 г.) рассмотрено уравнение в частных производных

$$L_2 y := y(z) + \sum_{||k||=1}^{\infty} a_k \frac{\partial^{k_1+\ldots+k_p} y(z)}{\partial z_1^{k_1} \ldots \partial z_p^{k_p}} = g(z), \tag{10}$$

где $p \geqslant 2$, $z = (z_1, \dots, z_p)$, $k = (k_1, \dots, k_p)$, $a_k \in \mathbb{C}$ (как обычно, $\|k\| = \sum_{j=1}^{p} k_j$). При переходе (в классе аналитических функций) к эквивалентному (10) матричному уравнению $Tv = B$ оператор T, непрерывный из некоторого B-пространства E_1 мультипоследовательностей в другое (такого же типа) E_2, «расщепляется» на сумму двух непрерывных из E_1 в E_2 операторов T_1 и T_2: $T = T_1 + T_2$. При этом оператор T_1 является p-мерной дискретной сверткой, которая исследуется методом М. Г. Крейна так же, как и одномерная, и оказывается нормально разрешимым оператором из E_1 в E_2 с определенной d-характеристикой. Что же касается «довеска» T_2, то, как показано на примерах (при $p = 2$) в диссертации Г. Г. Брайчева и его статье [24], этот оператор не всегда компактен. Однако его норму можно сделать сколь угодно малой, и по теореме C оператор T (а следовательно, и L_2) нормально разрешим. Результат такого же характера получен Г. Г. Брайчевым в его диссертации и для более общего, чем (10), уравнения, в котором (при $p = 2$) коэффициенты (постоянные числа) a_k при $\|k\| \geqslant 1$ заменены многочленами

$$\sum_{0 \leqslant j \leqslant m_k = (m_{k_1}^{(1)}, m_{k_2}^{(2)})} a_j^k z^j,$$

причем $m_0^{(1)} = m_0^{(2)} = 0$, $a_0^0 \neq 0$, $\alpha_i := \sup\limits_{k_i \geqslant 1} \dfrac{m_{k_i}^{(i)}}{k_i} < 1$, а числа a_j^k удовлетворяют еще некоторым дополнительным ограничениям (они здесь не приводятся).

Таким образом, метод, использованный Г. Г. Брайчевым в его диссертации и в статье [24], является как бы «промежуточным» между методами работ [11, 16, 17, 21], с одной стороны, и работы [22] — с другой.

2.6. Переходя к нормальной разрешимости линейных операторов в неидеальных пространствах, заметим, что, по-видимому, первый результат в этом направлении был получен в [21] без особого труда на основе вышеописанного результата для оператора M_p в пространстве A_R. Именно, с помощью конформного отображения в [21] показано, что если G — произвольная односвязная область в $\mathbb{C}$, имеющая более одной граничной точки, и $a_k(z) \in A(G)$, $k = 0, 1, \dots, p$, причем $a_p(z) \not\equiv 0$ в G, то M_p — Φ^+-оператор в $A(G)$ с d-характеристикой $(\alpha, \alpha + n - p)$, где n — число нулей $a_p(z)$ в G, α — число линейно независимых решений из $A(G)$ однородного уравнения $M_p v = 0$ (здесь $A(G)$ — пространство Фреше всех функций, аналитических в G). Кроме того, в [21] содержится фактически такой результат. Пусть F — континуум в $\mathbb{C}$ со связным дополнением, $a_s(z) \in \bar{A}(F)$, $s = 0, 1, \dots, p$, $a_p(z) \not\equiv 0$. Тогда M_p — Φ-оператор с d-характеристикой $(\bar{\alpha}, \bar{\alpha} + \bar{n} - p)$, где $\bar{n}$ — число нулей $a_p(z)$ в F, а $\bar{\alpha}$ — число линейно независимых решений уравнения $M_p y = 0$ из $\bar{A}(F)$. Это утверждение также выводится из описанного выше результата для пространства $\bar{A}_R = A(\bar{K}_R)$ с помощью конформного отображения.

Существенное усиление и обобщение только что описанных результатов из [21] для оператора M_p было получено в работах [25, 26], в которых для произвольной области G в $\bar{\mathbb{C}}$ рассматривалось уравнение с матричным оператором L_n:

$$L_n Y := A(z)Y'(z) + B(z)Y(z) = f(z). \tag{11}$$

Здесь $A(z) = \big(a_{i,k}(z)\big)_{i,k=1}^{n}$ и $B(z) = \big(b_{i,k}(z)\big)_{i,k=1}^{n}$ — квадратные матрицы порядка n, причем при $i, j = 1, 2, \dots, n$ $b_{i,k} \in A(G)$, $a_{i,k}(z) \in A^{(2)}(G, \infty)$, где $(\forall l \geqslant 1)$ $A^{(l)}(G, \infty) = A(G)$, если $\infty \notin G$, и $A^{(l)}(G, \infty)$ — множество всех функций из $A(G_\infty)$, $G_\infty := G \backslash \{\infty\}$, и, возможно, имеющих в бесконечно удаленной точке полюс порядка $\leqslant l$. Далее, в (11)

$Y(z) := \big(y_k(z)\big)_{k=1}^n$ и $F(z) := \big(f_k(z)\big)_{k=1}^n$ — одноколоночные матрицы с элементами $y_k(z)$, $f_k(z)$ из $A(G)$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$. Обозначим через $A^n(G)$ пространство всех таких матриц с топологией прямой суммы пространств $A(G)$. В [32] с помощью теории возмущений нормально разрешимых операторов доказано ([25, теорема 1]), что если коэффициенты $a_{j,k}(z)$ и $b_{j,k}(z)$ удовлетворяют сформулированным условиям, а G — произвольная область в $\bar{\mathbb{C}}$, отличная от расширенной плоскости, и если $\det A(z) \not\equiv 0$, то L_n — нормально разрешимый оператор в $A^n(G)$ с d-характеристикой $(\gamma, \gamma + s + (t-2)n)$, где γ — число линейно независимых решений из $A^n(G)$ однородного уравнения $L_nV = 0$, t — связность области G (которую можно определить как число (конечное или $+\infty$) связных компонент границы G), и, наконец, s — число нулей функции $\det A(z)$ в G, если $\infty \notin G$, и s — число нулей функции $\dfrac{\det A(z)}{(z-\delta)^{2n}}$ $(\delta \in \partial G)$ в G, если $\infty \in G$.

Основная идея доказательства этого результата заключается в том, что оператор L_nY можно представить в виде суммы двух операторов; один из них Γ_nY является квадратной матрицей порядка n, у которой по главной диагонали расположены функции $a_{k,k}(z)$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$, а остальные элементы равны нулю. Можно показать, что Γ_n — нормально разрешимый оператор из $\mathcal{E}_m$ в U_m $(m = 1, 2, \ldots)$ с определенной d-характеристикой, где $\mathcal{E}_m$ и U_m — специальным образом построенные B-пространства аналитических функций, а «довесок» $(L_n - \Gamma_n)Y$ — вполне непрерывный оператор из $\mathcal{E}_m$ в U_m. Далее применяются теоремы A и B, а затем, используя то, что $A^n(G) = \operatorname*{proj}_m \mathcal{E}_m = \operatorname*{proj}_m U_m$, — теоремы 1 и 2. Полное доказательство, приведенное в [32], содержит еще ряд деталей технического характера, но мы не будем уже останавливаться здесь на этом.

Отметим только, что линейный дифференциальный оператор M_p сводится хорошо известным способом к матричному оператору вида L_n. Это дало возможность в качестве прямого следствия получить в [25] усиление результатов из [21], приведенных в начале пункта 2.6 (см. [25, теорема 4]). Стоит также отметить, что основная часть теоремы 4 из [25] содержится также в заметке Б. Мальгранжа [27], которая была опубликована практически одновременно с [25].

Ряд результатов о нормальной разрешимости линейных интегральных операторов конечного и бесконечного порядка в пространствах функций, аналитических в произвольной области G, получен в диссертации Ю. А. Кирютенко, в которой наряду с операторами обычного интегрирования рассматриваются и операторы обобщенного интегрирования. Так как рамки настоящей статьи позволяют нам лишь изложить некоторые результаты о нормально разрешимых линейных дифференциальных операторах, мы не будем здесь останавливаться на этой диссертации.

2.7. Не сможем мы описать здесь сколько-нибудь подробно и весьма общие и глубокие результаты, полученные О. В. Епифановым (см., например, [18, 28]) для операторов ρ-свертки, порожденных оператором обобщенного дифференцирования вида

$$(D^{(\rho)}y)(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^{(n)}(0)}{n!} \cdot \frac{\Gamma(n/\rho + 1)}{\Gamma((n+1)/\rho + 1)}, \quad 0 < \rho < \infty.$$

Отметим лишь, что О. В. Епифанов в своих работах, опубликованных в 70–80 годы, нашел новые подходы к исследованию на нормальную разрешимость с помощью теории возмущений линейных дифференциальных операторов конечного и бесконечного порядка в неидеальных пространствах аналитических функций. В частности, весьма эффективным оказался введенный им в [29, 30] метод исследования дифференциального оператора L конечного или бесконечного порядка с аналитическими коэффициентами, названный «методом главного коэффициента». Он основан на полученных О. В. Епифановым теоремах о возмущении оператора умножения на аналитическую функцию и предполагает существование такого номера k_0, что функции $a_k(z)/a_{k_0}(z)$ вне исключительного (в определенном смысле «редкого») множества в $\mathbb{C}$ ограничены с некоторыми весами, зависящими от номера k и от пространства, в котором рассматривается данный оператор L. В дальнейшем этот метод использовался и другими математиками.

Мы приведем здесь лишь один конкретный результат О. В. Епифанова для уравнения

$$Ly := \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{s=0}^{n_k} a_s^k z^s\right) y^{(k)}(z), \quad \limsup_{k\to\infty}\frac{n_k}{k} = \alpha < 1.$$

Предварительно обозначим символом $[\rho, g(\theta)]$, где $0 < \rho < \infty$, а $g(\theta)$ — ρ-тригонометрически выпуклая [31] 2π-периодическая функция, пространство Фреше всех целых функций $y(z)$ из $[\rho, \infty)$, у которых индикатор при показателе ρ [31] $h_y^\rho(\theta) = \limsup\limits_{r\to\infty}\dfrac{|y(re^{i\theta})|}{r}$ не превосходит $g(\theta)$. При этом предполагается, что при $\rho \neq 1$ $\min\limits_{\theta}\bigl(g(\theta) + g(\theta + \pi/\rho)\bigr) > 0$ (это условие обеспечивает непустоту $[\rho, g(\theta)]$). Обозначим через H_α совокупность всех тех $\rho > 0$, для которых $\sup\limits_{k\geqslant 0}\{n_k - (1-\rho)k\}$ достигается на непустом множестве номеров M_ρ. Нетрудно показать, что в случае, когда L — оператор бесконечного порядка, H_α совпадает с $(0, 1-\alpha]$, если $\sup\limits_{k\geqslant 0}(n_k - \alpha k)$ достигается, и с $(0, 1-\alpha)$, если он не достигается. Наконец, $H_\alpha = (0, +\infty)$, если порядок L конечен. Предположим, что $(\forall \rho \in H_\alpha)$ $\lim\limits_{k\to\infty}\left(\max\limits_{|z|=1}|P_k(z)|\, k!(k-n_k)!^{-1/\rho}\right)^{1/k} = 0$, где $P_k(z) = \sum\limits_{s=0}^{n_k} a_s^k z^s$. Тогда согласно [18, 32, 33] L — Φ-оператор в $[\rho, g(\theta)]$. Его индекс в случае, когда $g(\theta) \geqslant 0$, $\theta \in \mathbb{R}$, равен разности числа нулей и полюсов функции $\omega_\rho(z) := \sum a_{n_k}^k z^{k-n_k}$, лежащих в ρ-выпуклом компакте с ρ-опорной функцией $\rho \cdot g(-\theta)$ (см. соответствующие определения в [32]). В случае, если $g(\theta)$ меняет знак, величина индекса также определена, но формула для его вычисления значительно усложняется и потому здесь не приводится.

Заключение

Приведенные в § 2 результаты о нормальной разрешимости в различных пространствах аналитических функций линейных непрерывных операторов (в обычных или обобщенных производных, интегралах и т. д.) получались фактически одним общим методом, использующим теорию возмущений нормально разрешимых операторов, начало которой было положено в работе С. Н. Никольского [1]. Схема этого метода заключается в следующем. Пусть L — линейный оператор, непрерывно действующий из одного пространства E_1 аналитических функций в другое — E_2. Рассматриваются две ситуации:

а) $E_j = \operatorname{proj}\limits_{Q\in\Omega} A_Q^j$, $j = 1, 2$;

б) $E_j = \operatorname{ind}\limits_{Q\in\Omega} B_Q^j$, $j = 1, 2$,

где A_Q^j и B_Q^j — некоторые B-пространства аналитических функций, а Ω — некоторое множество индексов. В ряде случаев исследуемый на нормальную разрешимость оператор L заменяется эквивалентным ему в определенном смысле (как правило, топологически изоморфным) линейным оператором L_1, непрерывно действующим из E_1^1 в E_2^1, где E_j^1 — пространство той же природы, что и изоморфное ему пространство E_j (например,

$E_j^1 = \operatorname*{proj}_{Q\in\Omega_1} A_Q^{j,1}$, если $E_j = \operatorname*{proj}_{Q\in\Omega} A_Q^j$, причем $A_Q^{j,1}$ — B-пространства). Однако элементами пространств $A_Q^{j,1}$ могут быть уже не обязательно аналитические функции, а, например, числовые последовательности, мультипоследовательности и т. д. Пусть M — подлежащий исследованию оператор (т. е. $M = L$ или $M = L_1$), непрерывно действующий из E_1^0 в E_2^0, где $E_j^0 = E_j$ или, соответственно, $E_j^0 = E_j^1$. Положим еще $\Omega_0 = \Omega$, когда $M = L$, и $\Omega_0 = \Omega_1$, когда $M = L_1$; $A_Q^{j,0} = A_Q^j$ при $M = L$ и $A_Q^{j,0} = A_Q^{j,1}$ при $M = L_1$. В рассматриваемой ситуации оператор M определен на векторном пространстве $S := \bigcup_{Q\in\Omega_0} A_Q^{1,0}$.

Пусть, далее, Ω_2 — множество индексов, плотное в Ω_0. Рассматривается оператор M^Q, являющийся сужением M с S на $A_Q^{1,0}$. Из исходных предположений вытекает, что $(\forall Q \in \Omega_0)$ M^Q — линейный непрерывный оператор из $A_Q^{1,0}$ в $A_Q^{2,0}$. Этот оператор «расщепляется» на сумму двух линейных операторов, также непрерывных из $A_Q^{1,0}$ в $A_Q^{2,0}$: $M_Q = M_Q^{(1)} + M_Q^{(2)}$. Показывается, что при любом Q из Ω_2 $M_Q^{(1)}$ — нормально разрешимый (как правило, нётеров) оператор с определяемой d-характеристикой, а $M_Q^{(2)}$ — вполне непрерывный оператор или же оператор, норма которого может быть сделана меньше любого произвольно зафиксированного $\eta > 0$. По теоремам А–С M_Q — нормально разрешимый оператор из $A_Q^{1,0}$ в $A_Q^{2,0}$, $Q \in \Omega_2$. В заключение, применяя теоремы 1, 2 или 4, устанавливаем нормальную разрешимость оператора M, а следовательно, и исходного оператора $L : E_1 \to E_2$. При этом на основании тех же теорем, как правило, определяется d-характеристика оператора L или, по крайней мере, его индекс. В случае, когда E_j $(j = 1, 2)$ — пространства целых функций, с помощью утверждений типа теоремы 3 доказывается существование частного решения уравнения $Ly = f$, которое (при $E_1 = E_2$) имеет тот же характер роста, что и f.

Даже далеко не полное описание результатов, полученных этим методом, показывает, что он оказался весьма эффективным при исследовании на нормальную разрешимость в пространствах аналитических функций различных линейных операторов (в основном, дифференциальных). Вместе с тем, хотелось бы поставить в заключение некоторые нерешенные задачи в этом направлении.

1. Почти не исследованы методами теории возмущений нормально разрешимых операторов линейные операторы в частных производных конечного и бесконечного порядка, действующие в пространствах аналитических функций p комплексных переменных, где $p > 1$. По-видимому, наиболее сложен здесь случай, когда $p \geqslant 3$. При $p = 2$ получен ряд результатов о нормальной разрешимости операторов бесконечного порядка в диссертации Г. Г. Брайчева (часть их описана выше). Но и в этом случае был сделан лишь первый шаг, за которым других не последовало.

2. Было бы желательно, на наш взгляд, применить теорию возмущений нормально разрешимых операторов к исследованию на нормальную разрешимость существенно особых квазирегулярных операторов (определение последних дано на с. 507 работы [22].

3. Кажется вполне естественным по аналогии с результатом из [9] для линейных дифференциальных операторов бесконечного порядка (в обычных производных с многочленными коэффициентами $P_k(z)$ степени n_k такими, что $\limsup_{k\to\infty} n_k/k < 1$) получить результат такого же характера (при том же ограничении на n_k) для оператора, в котором обычные производные заменены обобщенными производными Гельфонда — Леонтьева. В диссертации Т. И. Демченко получены для такого оператора отдельно два результата для случаев, когда $\sup_k n_k < +\infty$ и $\sup_{k\geqslant 1} \dfrac{n_k}{k} < 1$, $n_0 = 0$, $P_0(z) \equiv a_0$, но нет объединяющего

их результата.

4. Нам неизвестна ни одна работа, в которой бы теория возмущений нормально разрешимых операторов была применена к исследованию нормальной разрешимости линейных дифференциальных операторов, действующих непрерывно в каких-либо пространствах бесконечно дифференцируемых комплекснозначных функций, определенных в открытом множестве или на каком-либо компакте $\mathbb{R}^p$, $p \geqslant 1$ (типа пространств Данжуа — Карлемана и Бьёрка — Бёрлинга). Пока мы имеем здесь сплошное «белое пятно».

Литература

1. *Никольский С. М.* Линейные уравнения в линейных нормированных пространствах // Изв. АН СССР. Сер. мат.—1943.—Т. 7, № 3.—С. 147–166.
2. *Аткинсон А.* Нормальная разрешимость линейных уравнений в нормированных пространствах // Мат. сб.—1951.—Т. 28, № 1.—С. 3–14.
3. *Yood B.* Properties of linear transformations preserved under addition a completely continuous transformation // Duke Math. Journ.—1951.—V. 48, № 3.—P. 599–612.
4. *Крейн М. Г., Гохберг И. Ц.* Основные положения о дефектных числах, корневых числах и индексах линейных операторов // Успехи мат. наук.—1957.—Т. XII, вып. 2.—С. 43–118.
5. *Робертсон А. П., Робертсон В. Дж.* Топологические векторные пространства.—М.: Мир, 1967.—257 с.
6. *Коробейник Ю. Ф.* О нормально разрешимых операторах в некоторых классах линейных топологических пространств // Изв. СКНЦВШ. Сер. естеств. наук.—1973.—№ 4.—С. 44–47.
7. *Коробейник Ю. Ф.* Нормально разрешимые операторы и дифференциальные уравнения бесконечного порядка // Литов. мат. сб.—1971.—Т. XI, № 3.—С. 569–596.
8. *Шефер Х.* Топологические векторные пространства.—М.: Мир, 1971.—359 с.
9. *Коробейник Ю. Ф., Епифанов О. В.* Нормальная разрешимость одного класса дифференциальных уравнений бесконечного порядка // Мат. сб.—1971.—Т. 84, № 3.—С. 379–405.
10. *Коробейник Ю. Ф., Демченко Т. И.* О разрешимости одного класса дифференциальных уравнений бесконечного порядка // Сиб. мат. журн.—1967.—Т. 8, № 6.—С. 1321–1328.
11. *Коробейник Ю. Ф.* Некоторые применения теории нормально разрешимых операторов к дифференциальным уравнениям бесконечного порядка // Мат. сб.—1967.—Т. 72, № 1.—С. 3–37.
12. *Браудер Ф.* Функциональный анализ и уравнения в частных производных // Сб. переводов «Математика».—1960.—Т. 4 , № 3.—С. 79–106.
13. *Фишман К. М.* О связи метода близких систем в специальных линейных топологических пространствах с некоторыми вопросами возмущений линейных операторов в банаховых пространствах // Докл. АН СССР.—1958.—Т. 122, № 1.—С. 22–25.
14. *Przevorska-Rolewicz D. and Rolewicz S.* Remarks on Φ-operators in linear topological spaces // Prace Matem.—1965.—V. IX, № 1.—Seria I.—P. 91–94.
15. *Паламодов В. П.* Гомологические методы в теории локально выпуклых пространств // Успехи мат. наук.—1971.—Т. 26, № 1.—С. 3–65.
16. *Коробейник Ю. Ф.* О целых аналитических решениях уравнений бесконечного порядка с многочленными коэффициентами // Докл. АН СССР.—1964.—Т. 157, № 5.—С. 1031–1034.
17. *Коробейник Ю. Ф.* Аналитические решения операторных уравнений бесконечного порядка. Дис. доктора физ.-мат. наук.—Ростов-на-Дону, 1965.—335 с.
18. *Епифанов О. В.* Операторы свертки и дифференциальные операторы бесконечного порядка в пространствах аналитических функций. Автореферат дис. ... доктора физ.-мат. наук.— Киев, 1990.—26 с.
19. *Крейн М. Г.* Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов // Успехи мат. наук.—1958.—Т. 13, вып. 5.—С. 3–120.
20. *van der Steen P.* On differential operators of infinite order.—Delft, 1968.—101 p.
21. *Коробейник Ю. Ф., Демченко Т. И.* К вопросу о разрешимости линейных дифференциальных уравнений в пространствах аналитических функций // Диф. уравнения.—1971.—Т. VII, № 9.—С. 1639–1648.
22. *Коробейник Ю. Ф.* Об одном классе уравнений бесконечного порядка в обобщенных производных // Литов. мат. сб.—1964.—Т. IV, № 4.—С. 497–515.
23. *Коробейник Ю. Ф.* Об операторах обобщенного дифференцирования, применимых к любой аналитической функции // Изв. АН СССР. Сер. мат.—1964.—Т. 28, № 4.—С. 833–854.

24. *Брайчев Г. Г.* О разрешимости уравнений в частных производных бесконечного порядка в некоторых классах целых функций // Мат. заметки.—1976.—Т. 19, № 2.—С. 225–236.
25. *Коробейник Ю. Ф.* Нормальная разрешимость линейных дифференциальных уравнений в комплексной области // Изв. АН СССР. Сер. мат.—1972.—Т. 36, № 2.—С. 450–471.
26. *Коробейник Ю. Ф.* Замечание к моей статье «Нормальная разрешимость линейных дифференциальных уравнений в комплексной области» // Изв. АН СССР. Сер. мат.—1973.—Т. 37, № 1.—С. 247.
27. *Malgrange B.* Remarques sur les points singuliers des equations differentielles // C.R. Acad. Sci. Paris.—1971.—V. 273, № 23.—P. 1136–1138.
28. *Епифанов О. В.* Оператор умножения в пространстве целых функций и операторы свертки // Мат. сб.—1983.—Т. 120, № 4.—С. 505–527.
29. *Епифанов О. В.* Дифференциальный оператор бесконечного порядка в пространствах целых функций экспоненциального типа // Сиб. мат. журн.—1974.—Т. 15, № 5.—С. 787–796.
30. *Епифанов О. В.* Нормальная разрешимость дифференциального оператора в некоторых классах целых функций // Сиб. мат. журн.—1975.—Т. 16, № 4.—С. 714–721.
31. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций.—М.: Гостехиздат, 1956.—632 с.
32. *Епифанов О. В.* Дифференциальный оператор с полиномиальными коэффициентами в классах целых функций с заданной оценкой индикатора // Мат. Сб.—1981.—Т. 114, № 1.—С. 85–109.
33. *Епифанов О. В., Коробейник Ю. Ф.* Нормальная разрешимость линейных дифференциальных операторов бесконечного порядка // Тр. Мат. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова «Теория функций и смежные вопросы».—Т. 180.— М.: Наука.—1987.—С. 110–112.

Статья поступила 12 ноября 2004 г.

Коробейник Юрий Федорович, д. ф.-м. н.
г. Ростов, Ростовский государственный университет
E-mail: kor@math.rsu.ru