Владикавказский математический журнал
Апрель–июнь, 2005, Том 7, Выпуск 2

УДК **517.28**

ДРОБНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ФОРМЫ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

К. К. Казбеков

Посвящается академику С. М. Никольскому к его 100-летию

В работе строится последовательная теория дробных дифференциальных форм, обобщающая обычную теорию дифференциальных форм в евклидовом пространстве с привлечением понятия дробного дифференциала. Вводятся соответствующие обобщения для внешнего дифференциала и дифференцируемых отображений и исследуются их основные свойства.

1. Дробные дифференциальные формы

1.1. Определения. Рассмотрим произвольную открытую область G n-мерного евклидова пространства E^n. Точки области G будем обозначать символами $x = (x^1, x^2, \dots, x^n)$, $y = (y^1, y^2, \dots, y^n)$ и т. д.

Определение 1.1.1. Дробной дифференциальной формой степени p и показателем дробности α, определенной в области G, будем называть параметрическую функцию $\omega^\alpha(x, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p)$, с вещественным параметром $0 < \alpha < 1$, которая при каждом фиксированном $x \in G$ и $\alpha \in (0, 1)$ представляет собой знакопеременную p-форму из $A_p(E^n)$.

Здесь $A_p(E^n)$ — пространство всех знакопеременных p-форм из E^n. Множество всех дробных дифференциальных p-форм порядка α в области G обозначим через $\Omega_p^\alpha(G) = \Omega_p^\alpha(G, E^n)$. Будем считать, что при фиксированных $\xi_1, \dots, \xi_p \in E^n$ p-форма ω^α представляет собой бесконечно дифференцируемую в G функцию. Согласно [1], каждая p-форма из $A_p(E^n)$ может быть представлена в виде:

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_p} \omega_{i_1 \dots i_p} \xi^{i_1} \wedge \dots \wedge \xi^{i_p}, \tag{1.1}$$

где $\wedge$ — знак внешнего произведения, т. е. сумма данного выражения по всем перестановкам индексов. Например, $\xi^{i_1} \wedge \dots \wedge \xi^{i_p} = \sum_\sigma (\operatorname{sgn} \sigma) \xi^{i_{\sigma(1)}} \dots \xi^{i_{\sigma(p)}}$, где $\sigma(k)$ — функция перестановки, определенная на числах $1 \leqslant k \leqslant p$ и отображающая их взаимно однозначно на себя. Числа $\xi^{i_j} = \mathbf{e}^{i_j}(\xi)$, где векторы $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^n$ образуют базис в пространстве E^n, а $\{\mathbf{e}^i\}_{i=1}^n$ — сопряженный к нему базис, при этом линейная форма $\mathbf{e}^i(\xi)$ на элементах базиса $\{\mathbf{e}_i\}$ принимает значения $\mathbf{e}^i(\mathbf{e}_j) = \delta_{ij}$. Числа $\omega_{i_1 \dots i_p}$ суть компоненты линейной формы ω в базисе $\mathbf{e}_{i_1}, \dots, \mathbf{e}_{i_p}$, т. е. $\omega_{i_1 \dots i_p} = \omega(\mathbf{e}_{i_1}, \dots, \mathbf{e}_{i_p})$.

При построении обычной теории дифференциальных форм в качестве векторов ξ берутся дифференциалы независимых приращений компонент вектора $x : dx = (dx^1, dx^2, \ldots, dx^n)$. В дробной теории необходимо доопределить формальное понятие дробного дифференциала при приращении независимого аргумента x по своим компонентам. С этой целью воспользуемся следующим представлением оператора дробного дифференцирования Римана — Лиувилля D^α_{a+} порядка $\alpha \in (0,1)$ с началом в точке $a \in \mathbb{R}$. Напомним, что оператор дробной производной D^α_{a+} действует на некоторую функцию $f(x)$ по правилу [2]:

$$D^\alpha_{a+} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^\alpha}\,, \tag{1.2}$$

где $\Gamma(z)$ — гамма-функция Эйлера; равенство (1.2) определено на «достаточно хороших» функциях $f(x)$, например, из класса $L_q = L_q(-\infty, +\infty)$ множества измеримых на $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ функций, вообще говоря, комплекснозначных, для которых $\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^q dx < \infty$, где $1 \leqslant q < \infty$.

Согласно одному из подходов [3] оператор D^α_{0+} можно рассматривать как дробную степень оператора дифференцирования, откуда и возникает необходимое представление:

$$D^\alpha_{0+} = \left(\frac{d}{dx}\right)^\alpha, \quad I^\alpha_{0+} = \left(\frac{d}{dx}\right)^{-\alpha}, \tag{1.3}$$

где $0 < \alpha < 1$, I^α_{0+} — оператор дробного интегрирования Римана — Лиувилля с началом в точке 0; (1.3) имеет смысл при надлежащем толковании понятия дробной степени оператора. Фактически идея, связанная с представлением (1.3) служила основной моделью при развитии абстрактной теории дробных степеней операторов в банаховом пространстве.

Используя представление (1.3), легко произвести необходимые доопределения. Действительно, исходя из (1.3), имеем, что $D^\alpha_{0+} = (d/dx)^\alpha = d^\alpha/dx^\alpha$, где $dx^\alpha = (dx)^\alpha$ и $D^\alpha_{0+} f(x) = d^\alpha f(x)/dx^\alpha$. С другой стороны, используя дробную производную степенной функции x^β: $D^\alpha_{0+} x^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)} x^{\beta-\alpha}$, найдем при $\beta = 1$: $D^\alpha_{0+} x = d^\alpha x/dx^\alpha = x^{1-\alpha}/\Gamma(2-\alpha)$, откуда следует, что:

$$d^\alpha x = \frac{x^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\, dx^\alpha \tag{1.4}$$

и

$$d^\alpha f(x) = (D^\alpha_{0+} f(x)) dx^\alpha = \Gamma(2-\alpha) x^{\alpha-1} \left(\frac{\partial^\alpha f(x)}{\partial x^\alpha}\right) d^\alpha x. \tag{1.5}$$

При $\alpha = 1$, очевидно, $d^1 x = dx^1 = dx$ и $d^1 f(x) = df(x)$.

Так как в плане дальнейших обозначений удобно пользоваться символом $d^\alpha x$ (а не dx^α), то всюду в дальнейшем вектор ξ будем обозначать символом $d^\alpha x = (d^\alpha x^1, d^\alpha x^2, \ldots, d^\alpha x^n)$, а векторы ξ_k — символами $d^\alpha_k x = (d^\alpha_k x^1, d^\alpha_k x^2, \ldots, d^\alpha_k x^n)$. В качестве базиса в E^n выберем векторы $\mathbf{e}_k = \{0, 0, \ldots, 1, 0, \ldots, 0\}$, где единица стоит на k-ом месте. Элементами сопряженного базиса будут функции $\mathbf{e}^k(\xi) = \mathbf{e}^k(d^\alpha x)$, определяемые равенствами

$$\mathbf{e}^k(d^\alpha x) = d^\alpha x^k.$$

Тогда дифференциальная форма (1.1) примет вид

$$\omega^\alpha(x, d^\alpha_1 x, \ldots, d^\alpha_p x) = \sum_{i_1 < \ldots < i_p} \omega^\alpha_{i_1 \ldots i_p}(x) d^\alpha x^{i_1} \wedge d^\alpha x^{i_2} \wedge \ldots \wedge d^\alpha x^{i_p}. \tag{1.6}$$

Пример 1.1.1. Дробная дифференциальная 0-форма, т. е. форма ω^α при $p=0$ есть функция $\omega(x)$, т. е. любая функция, определенная в области G (и, в силу наших предположений, бесконечно дифференцируемая в G).

Пример 1.1.2. Дробная дифференциальная 1-форма имеет вид:

$$\omega^\alpha(x,d^\alpha x)=\sum_{k=1}^{n}\omega_k^\alpha(x)d^\alpha x^k=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\sum_{k=1}^{n}(x^k)^{1-\alpha}\cdot\omega_k^\alpha(x)\cdot d(x^k)^\alpha.$$

В частности, когда $n=1$, $\omega^\alpha(x,d^\alpha x)=f_\alpha(x)d^\alpha x=\frac{x^{1-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}f_\alpha(x)dx^\alpha$. Дифференциальную форму степени 1 будем называть также линейной дробной дифференциальной формой.

Пример 1.1.3. Дробная дифференциальная 2-форма имеет вид:

$$\omega^\alpha(x,d_1^\alpha x,d_2^\alpha x)=\sum_{i<k}\omega_{ik}^\alpha(x)d^\alpha x^i\wedge d^\alpha x^k.$$

По определению внешнего произведения [1]:

$$\begin{aligned}d^\alpha x^i\wedge d^\alpha x^k&=(\mathbf{e}^i\wedge\mathbf{e}^k)(d_1^\alpha x,d_2^\alpha x)=\mathbf{e}^i(d_1^\alpha x)\mathbf{e}^k(d_2^\alpha x)-\mathbf{e}^i(d_2^\alpha x)\mathbf{e}^k(d_1^\alpha x)\\&=d_1^\alpha x^i d_2^\alpha x^k-d_2^\alpha x^i d_1^\alpha x^k=\begin{vmatrix}d_1^\alpha x^i & d_1^\alpha x^k\\ d_2^\alpha x^i & d_2^\alpha x^k\end{vmatrix}\\&=\Gamma^{-2}(1-\alpha)\{(x_1^i x_2^k)^{1-\alpha}d_1(x^i)^\alpha d_2(x^k)^\alpha-(x_2^i x_1^k)^{1-\alpha}d_2(x^i)^\alpha d_1(x^k)^\alpha\}.\end{aligned}$$

В частности, при $n=2$ получаем:

$$\omega^\alpha(x,d_1^\alpha x,d_2^\alpha x)=f_\alpha(x)\begin{vmatrix}d_1^\alpha x^1 & d_1^\alpha x^2\\ d_2^\alpha x^1 & d_2^\alpha x^2\end{vmatrix}.$$

В случае, когда $n=3$, обозначая $\omega_{12}^\alpha=R_\alpha$, $\omega_{23}=P_\alpha$, $\omega_{13}=-Q_\alpha$, получим:

$$\omega^\alpha=P_\alpha d^\alpha x^2\wedge d^\alpha x^3-Q_\alpha d^\alpha x^1\wedge d^\alpha x^3+R_\alpha d^\alpha x^1\wedge d^\alpha x^2=\begin{vmatrix}P_\alpha & Q_\alpha & R_\alpha\\ d_1^\alpha x^1 & d_1^\alpha x^2 & d_1^\alpha x^3\\ d_2^\alpha x^1 & d_2^\alpha x^2 & d_2^\alpha x^3\end{vmatrix}.$$

Пример 1.1.4. Дробная дифференциальная 3-форма в трехмерном пространстве имеет вид:

$$\omega^\alpha(x,d_1^\alpha x,d_2^\alpha x,d_3^\alpha x)=f_\alpha(x)\begin{vmatrix}d_1^\alpha x^1 & d_1^\alpha x^2 & d_1^\alpha x^3\\ d_2^\alpha x^1 & d_2^\alpha x^2 & d_2^\alpha x^3\\ d_3^\alpha x^1 & d_3^\alpha x^2 & d_3^\alpha x^3\end{vmatrix}.$$

Определитель равен элементу объема, отвечающему векторам $d_1^\alpha x, d_2^\alpha x, d_3^\alpha x$.

Как видно из проведенных выше построений, для них легко осуществить обобщение, когда вместо одного показателя дробности α, используется целый набор вещественных чисел.

Определение 1.1.2. Дробной дифференциальной формой степени p и упорядоченного набора показателей дробности $(\alpha_1,\ldots,\alpha_p)$, где $0<\alpha_i<1$, $i=\overline{1,p}$, будем называть определенную в области G параметрическую функцию p-параметров $\omega^{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}(x,\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_p)$, которая при каждом фиксированном $x\in G$ и фиксированных $\alpha_1,\ldots,\alpha_p\in(0,1)$ представляет собой знакопеременную p-форму из $A_p(E_n)$.

Множество всех дробных дифференциальных p-форм порядка $(\alpha_1,\ldots,\alpha_p)$ в области G обозначим через $\Omega_p^{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}(G)=\Omega_p^{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}(G,E^n)$. Очевидно, что при $\alpha_1=\alpha_2=$

$\ldots = \alpha_p = \alpha$: $\Omega_p^{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}(G) = \Omega_p^{\alpha}(G)$. Из (1.6) легко получить также общий вид для дробной дифференциальной формы $\omega^{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}$:

$$\omega^{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}(x, d_1^{\alpha_1}x, \ldots, d_p^{\alpha_p}x) = \sum_{i_1<\ldots<i_p} \omega_{i_1,\ldots,i_p}^{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}(x) d^{\alpha_1}x^{i_1} \wedge d^{\alpha_2}x^{i_2} \wedge \ldots \wedge d^{\alpha_p}x^{i_p}. \tag{1.7}$$

Обобщим в связи с выражением (1.7) разобранные выше примеры. В случае $p = 0$ 0-форма сохраняет свой вид. При $p = 1$ очевидно также никаких различий не возникает. При $p = 2$ 2-форма порядка (α_1, α_2) имеет вид:

$$\omega^{\alpha_1,\alpha_2}(x, d_1^{\alpha_1}x, d_2^{\alpha_2}x) = \sum_{i<k} \omega_{ik}^{\alpha_1,\alpha_2}(x) d^{\alpha_1}x^i \wedge d^{\alpha_2}x^k.$$

Здесь

$$\begin{aligned} d^{\alpha_1}x^i \wedge d^{\alpha_2}x^k &= (\mathbf{e}^i \wedge \mathbf{e}^k)(d_1^{\alpha_1}x, d_2^{\alpha_2}x) = \mathbf{e}^i(d_1^{\alpha_1}x)\mathbf{e}^k(d_2^{\alpha_2}x) - \mathbf{e}^i(d_2^{\alpha_2}x)\mathbf{e}^k(d_1^{\alpha_1}x) \\ &= d_1^{\alpha_1}x^i d_2^{\alpha_2}x^k - d_2^{\alpha_2}x^i d_1^{\alpha_1}x^k = \begin{vmatrix} d_1^{\alpha_1}x^i & d_1^{\alpha_1}x^k \\ d_2^{\alpha_2}x^i & d_2^{\alpha_2}x^k \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

т. е. видно, что и здесь никаких существенных отличий не возникает.

1.2. Внешний дифференциал дробного порядка.

Определение 1.2.1. Внешним дробным дифференциалом p-линейной дробной дифференциальной формы порядка $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ $\omega^{\alpha_1,\ldots,\alpha_p} \in \Omega_p^{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}(G)$ будем называть форму $d^{\beta}\omega^{\alpha_1,\ldots,\alpha_p} \in \Omega_{p+1}^{\beta,\alpha_1,\ldots,\alpha_p}(G)$, определяемую соотношением:

$$d^{\beta}\omega^{\alpha_1,\ldots,\alpha_p} = \sum_{i_1<\ldots<i_p} d^{\beta}\omega_{i_1,\ldots,i_p}^{\alpha_1,\ldots,\alpha_p} \wedge d^{\alpha_1}x^{i_1} \wedge \ldots \wedge d^{\alpha_p}x^{i_p},$$

где согласно определениям (1.4) и (1.5)

$$d^{\beta}\omega_{i_1,\ldots,i_p}^{\alpha_1,\ldots,\alpha_p} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^{\beta}\omega_{i_1,\ldots,i_p}^{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}(x)}{\partial^{\beta}x^k}\, d^{\beta}x^k.$$

Таким образом, если

$$\omega^{\alpha_1,\ldots,\alpha_p} = \sum_{i_1<\ldots<i_p} \omega_{i_1,\ldots,i_p}^{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}(x) d^{\alpha_1}x^{i_1} \wedge \ldots \wedge d^{\alpha_p}x^{i_p},$$

то

$$d^{\beta}\omega^{\alpha_1,\ldots,\alpha_p} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i_1<\ldots<i_p} \frac{\partial^{\beta}\omega_{i_1,\ldots,i_p}^{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}}{\partial^{\beta}x^k}\, d^{\beta}x^k \wedge d^{\alpha_1}x^{i_1} \wedge \ldots \wedge d^{\alpha_p}x^{i_p}.$$

Пример 1.2.1. Дробный дифференциал степени нуль (т. е. функции $f(x)$) имеет вид:

$$d^{\beta}f(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{d^{\beta}f}{d^{\beta}x^k}\, d^{\beta}x^k. \tag{1.8}$$

Пример 1.2.2. Вычислим дифференциал от линейной формы

$$\omega^{\alpha} = \omega^{\alpha}(x, d^{\alpha}x) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i^{\alpha}(x) d^{\alpha}x^i.$$

Получим
$$d^\beta \omega^\alpha = d^\beta \omega^\alpha(x, d^\alpha x) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^\beta \omega_i^\alpha(x)}{\partial^\beta x^k}\, d^\beta x^k \wedge d^\alpha x^i.$$
Так как $d^\beta x^k \wedge d^\alpha x^i = -d^\alpha x^i \wedge d^\beta x^k$ и $d^\beta x^k \wedge d^\alpha x^k = 0$, то
$$\begin{aligned} d^\beta \omega^\alpha &= \sum_{k<i} \frac{\partial^\beta \omega_i^\alpha}{\partial^\beta x^k}\, d^\beta x^k \wedge d^\alpha x^i + \sum_{i<k} \frac{\partial^\beta \omega_i^\alpha}{\partial^\beta x^k}\, d^\beta x^k \wedge d^\alpha x^i + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^\beta \omega_i^\alpha}{\partial^\beta x^k}\, d^\beta x^k \wedge d^\alpha x^k \\ &= \sum_{k<i} \frac{\partial^\beta \omega_i^\alpha}{\partial^\beta x^k}\, d^\beta x^k \wedge d^\alpha x^i - \sum_{k<i} \frac{\partial^\beta \omega_k^\alpha}{\partial^\beta x^i}\, d^\alpha x^k \wedge d^\beta x^i, \end{aligned}$$
т. е.
$$d^\beta \omega^\alpha = \sum_{k<i} \left\{ \frac{\partial^\beta \omega_i^\alpha}{\partial^\beta x^k}\, d^\beta x^k \wedge d^\alpha x^i - \frac{\partial^\beta \omega_k^\alpha}{\partial^\beta x^i}\, d^\alpha x^k \wedge d^\beta x^i \right\}. \tag{1.9}$$
В частности, при $\beta = \alpha$ выражение (1.9) упрощается:
$$d^\alpha \omega^\alpha = \sum_{k<i} \left(\frac{\partial^\alpha \omega_i^\alpha}{\partial^\alpha x^k} - \frac{\partial^\alpha \omega_k^\alpha}{\partial^\alpha x^i} \right) d^\alpha x^k \wedge d^\alpha x^i.$$

Например, когда $n = 2$, получим для
$$\omega^\alpha = \omega_1^\alpha(x,y) d^\alpha x + \omega_2^\alpha(x,y) d^\alpha y = P_\alpha d^\alpha x + Q_\alpha d^\alpha y,$$
где $x^1 = x$, $x^2 = y$, $\omega_1^\alpha(x,y) = P_\alpha(x,y) = P_\alpha$, $\omega_2^\alpha(x,y) = Q_\alpha(x,y) = Q_\alpha$, что
$$d^\beta \omega^\alpha = \frac{\partial^\beta Q_\alpha}{\partial^\beta x}\, d^\beta x \wedge d^\alpha y - \frac{\partial^\beta P_\alpha}{\partial^\beta y}\, d^\alpha x \wedge d^\beta y,$$
$$d^\alpha \omega^\alpha = \left(\frac{\partial^\alpha Q_\alpha}{\partial^\alpha x} - \frac{\partial^\alpha P_\alpha}{\partial^\alpha y} \right) d^\alpha x \wedge d^\alpha y.$$

1.3. Свойства дробного внешнего дифференциала. Непосредственно из определения (1.2.1) вытекают следующие два свойства, верные в силу линейности дробной производной Римана — Лиувилля [2]:

(1) если $\omega_1^{\alpha_1,\ldots,\alpha_p} \in \Omega_p^{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}(G)$, $\omega_2^{\widetilde{\alpha}_1,\ldots,\widetilde{\alpha}_p}(G)$, то
$$d^\beta \{\omega_1^{\alpha_1,\ldots,\alpha_p} + \omega_2^{\widetilde{\alpha}_1,\ldots,\widetilde{\alpha}_p}\} = d^\beta \omega_1^{\alpha_1,\ldots,\alpha_p} + d^\beta \omega_2^{\widetilde{\alpha}_1,\ldots,\widetilde{\alpha}_p}.$$

(2) если $\omega^{\alpha_1,\ldots,\alpha_p} \in \Omega_p^{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}(G)$ и λ — вещественное число, то
$$d^\beta (\lambda \omega^{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}) = \lambda\, d^\beta \omega^{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}.$$

(3) Для нахождения третьего свойства, которое должно определять дробный внешний дифференциал от внешнего произведения двух дробных дифференциальных форм проведем следующие вычисления.

Пусть $\omega_1^{\alpha_1,\ldots,\alpha_p} \in \Omega_p^{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}(G)$, $\omega_2^{\widetilde{\alpha}_1,\ldots,\widetilde{\alpha}_q} \in \Omega_q^{\widetilde{\alpha}_1,\ldots,\widetilde{\alpha}_q}(G)$. В произвольном случае, для некоторой s-формы порядка $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ верно:
$$\omega^{\alpha_1,\ldots,\alpha_s} = \sum_{i_1<\ldots<i_s} \omega_{i_1,\ldots,i_s}^{\alpha_1,\ldots,\alpha_s}(x) d^{\alpha_1} x^{i_1} \wedge \ldots \wedge d^{\alpha_s} x^{i_s}.$$

Введем следующие обозначения:

$$\frac{\partial^\beta \omega^{\alpha_1,\ldots,\alpha_s}}{\partial^\beta x^k} = \sum_{i_1<\ldots<i_s} \frac{\partial^\beta \omega^{\alpha_1,\ldots,\alpha_s}_{i_1,\ldots,i_s}}{\partial^\beta x^k} d^{\alpha_1} x^{i_1} \wedge \ldots \wedge d^{\alpha_s} x^{i_s}.$$

Тогда $d^\beta \omega^{\alpha_1,\ldots,\alpha_s}$ можно записать в виде:

$$d^\beta \omega^{\alpha_1,\ldots,\alpha_s} = \sum_{k=1}^{n} d^\beta x^k \wedge \frac{\partial^\beta \omega^{\alpha_1,\ldots,\alpha_s}}{\partial^\beta x^k}.$$

Положим, что $\omega^{\alpha_1,\ldots,\alpha_s} = \omega_1^{\alpha_1,\ldots,\alpha_p} \wedge \omega_2^{\widetilde{\alpha}_1,\ldots,\widetilde{\alpha}_q}$ (так, что $\widetilde{\alpha}_1 = \alpha_{p+1}$, $\widetilde{\alpha}_2 = \alpha_{p+2}, \ldots, \widetilde{\alpha}_q = \alpha_{p+q} = \alpha_s, s = p+q$). Рассмотрим выражение $\partial^\beta \omega^{\alpha_1,\ldots,\alpha_s}/\partial^\beta x^k$. Согласно (1.4) имеем:

$$\frac{\partial^\beta \omega^{\alpha_1,\ldots,\alpha_s}}{\partial^\beta x^k} = \Gamma(2-\alpha) x_k^{\alpha-1} \frac{\partial^\beta \omega^{\alpha_1,\ldots,\alpha_s}}{\partial (x^k)^\beta}.$$

Используя определение внешнего произведения [1] и учитывая коммутативность оператора $D^\beta_{0+}(x^k)$ с оператором перестановки σ, запишем последовательно:

$$(D^\beta_{0+} \omega^{\alpha_1,\ldots,\alpha_s})(x^k) = (D^\beta_{0+}(\omega_1^{\alpha_1,\ldots,\alpha_p} \wedge \omega_2^{\widetilde{\alpha}_1,\ldots,\widetilde{\alpha}_q}))(x^k) = \sum_\sigma (\operatorname{sgn}\sigma) \sigma \{ D^\beta_{0+}(\omega_1^{\alpha_1,\ldots,\alpha_p} \omega_2^{\widetilde{\alpha}_1,\ldots,\widetilde{\alpha}_q})(x^k)\}.$$

Применяя, в свою очередь, к дробной производной от произведения двух дробных форм (а в конечном счете двух определенных функций) обобщенное правило Лейбница [2] в виде

$$D^\beta_{0+}(\omega_1^{\alpha_1,\ldots,\alpha_p} \omega_2^{\widetilde{\alpha}_1,\ldots,\widetilde{\alpha}_q})(x^k) = \sum_{m=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \beta \\ m \end{pmatrix} (D^{\beta-m}_{0+} \omega_1^{\alpha_1,\ldots,\alpha_p})(x^k) \cdot \frac{\partial^m \omega_2^{\widetilde{\alpha}_1,\ldots,\widetilde{\alpha}_q}}{\partial (x^k)^m},$$

найдем, что

$$(D^\beta_{0+} \omega^{\alpha_1,\ldots,\alpha_s})(x^k) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_\sigma \begin{pmatrix} \beta \\ m \end{pmatrix} \operatorname{sgn}\sigma \cdot \sigma \{ (D^{\beta-m}_{0+} \omega_1^{\alpha_1,\ldots,\alpha_p})(x^k) \cdot D^m_{0+} \omega_2^{\widetilde{\alpha}_1,\ldots,\widetilde{\alpha}_q})(x^k)\}. \tag{1.10}$$

Напомним, что действие оператора σ из некоторого множества перестановок $\sum_p$ ($\sigma \in \sum_p$) на форму ω в нашем случае имеет вид:

$$\sigma \omega^{\alpha_1,\ldots,\alpha_p} = \sum_{i_1<\ldots<ß_p} \omega^{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}_{i_{\sigma(1)},\ldots,i_{\sigma(p)}}(x) \cdot d^{\alpha_1} x^{i_{\sigma(1)}} \wedge \ldots \wedge d^{\alpha_p} x^{i_{\sigma(p)}}. \tag{1.11}$$

При необходимости, конечно, можно рассмотреть дополнительное обобщение выражения (1.11) введением нового оператора перестановок σ_α, определенного на множестве перестановок $\sum_p(\alpha)$, такого, что

$$\sigma_\alpha \omega^{\alpha_1,\ldots,\alpha_p} = \omega^{\alpha_{\sigma(1)},\ldots,\alpha_{\sigma(p)}} = \sum_{i_1<\ldots<i_p} \omega^{\alpha_{\sigma(1)},\ldots,\alpha_{\sigma(p)}}_{i_1,\ldots,i_p}(x) \cdot d^{\alpha_{\sigma(1)}} x^{i_1} \wedge \ldots \wedge d^{\alpha_{\sigma(p)}} x^{i_p},$$

а также рассмотреть совместное действие двух независимых перестановок $\alpha \in \sum_p(\alpha)$ и $\sigma_i \in \sum_p(i)$, которые, разумеется, коммутируют между собой:

$$\sigma_\alpha \sigma_i \omega^{\alpha_1,\ldots,\alpha_p} = \sum_{i_1<\ldots<i_p} \omega^{\alpha_{\sigma_\alpha(1)},\ldots,\alpha_{\sigma_\alpha(p)}}_{i_{\sigma_i(1)},\ldots,i_{\sigma_i(p)}}(x) \cdot d^{\alpha_{\sigma_\alpha(1)}} x^{i_{\sigma_i(1)}} \wedge d^{\alpha_{\sigma_\alpha(2)}} x^{i_{\sigma_i(2)}} \wedge \ldots \wedge d^{\alpha_{\sigma_\alpha(p)}} x^{i_{\sigma_i(p)}}.$$

Однако в данной работе включение таких операторов производиться не будет.

Из (1.10) следует:

$$\frac{\partial^\beta \omega^{\alpha_1,\ldots,\alpha_s}}{\partial^\beta x^k} = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{\sigma}\left(\begin{array}{c}\beta\\ m\end{array}\right)(\operatorname{sgn}\sigma)\sigma\left\{\frac{\partial^{\beta-m}\omega_1^{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}}{\partial^{\beta-m}x^k}\frac{\partial^m\omega_2^{\widetilde{\alpha}_1,\ldots,\widetilde{\alpha}_q}}{\partial(x^k)^m}\right\}$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty}\left(\begin{array}{c}\beta\\ m\end{array}\right)\frac{\partial^{\beta-m}\omega_1^{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}}{\partial^{\beta-m}x^k}\wedge\frac{\partial^m\omega_2^{\widetilde{\alpha}_1,\ldots,\widetilde{\alpha}_q}}{\partial(x^k)^m}$$
$$= \frac{\partial^\beta \omega_1^{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}}{\partial^\beta x^k}\wedge\omega_2^{\widetilde{\alpha}_1,\ldots,\widetilde{\alpha}_q} + \sum_{m=1}^{\infty}\left(\begin{array}{c}\beta\\ m\end{array}\right)\frac{\partial^{\beta-m}\omega_1^{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}}{\partial^{\beta-m}x^k}\wedge\frac{\partial^m\omega_2^{\widetilde{\alpha}_1,\ldots,\widetilde{\alpha}_q}}{\partial(x^k)^m}.$$

Учтем свойство антикоммутативности внешнего произведения [1], согласно которому

$$\omega = \omega_1\wedge\omega_2 = (-1)^{pq}\omega_2\wedge\omega_1.$$

Тогда

$$\frac{\partial^\beta \omega^{\alpha_1,\ldots,\alpha_s}}{\partial^\beta x^k} = \frac{\partial^\beta \omega_1^{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}}{\partial^\beta x^k}\wedge\omega_2^{\widetilde{\alpha}_1,\ldots,\widetilde{\alpha}_q} + (-1)^{pq}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\begin{array}{c}\beta\\ m\end{array}\right)\frac{\partial^m\omega_2^{\widetilde{\alpha}_1,\ldots,\widetilde{\alpha}_q}}{\partial(x^k)^m}\wedge\frac{\partial^{\beta-m}\omega_1^{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}}{\partial^{\beta-m}x^k}.$$

Отсюда

$$d^\beta\omega^{\alpha_1,\ldots,\alpha_s} = \sum_{k=1}^{n} d^\beta x^k\wedge\frac{\partial^\beta \omega_1^{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}}{\partial^\beta x^k}\wedge\omega_2^{\widetilde{\alpha}_1,\ldots,\widetilde{\alpha}_q}$$
$$+(-1)^{pq}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\begin{array}{c}\beta\\ m\end{array}\right)\sum_{k=1}^{n} d^\beta x^k\wedge\frac{\partial^m\omega_2^{\widetilde{\alpha}_1,\ldots,\widetilde{\alpha}_q}}{\partial(x^k)^m}\wedge\frac{\partial^{\beta-m}\omega_1^{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}}{\partial^{\beta-m}x^k}.$$

Так как первое слагаемое, очевидно, равно $d^\beta\omega_1^{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}\wedge\omega_2^{\widetilde{\alpha}_1,\ldots,\widetilde{\alpha}_q}$, то в плане формальной симметрии с первым слагаемым целесообразно ввести следующее «символическое» внешнее произведение:

$$(d^\beta\tilde{\wedge}\partial^m)\omega_1\wedge\omega_2 \equiv \sum_{k=1}^{n} d^\beta x^k\wedge\frac{\partial^m\omega_1}{\partial(x^k)^m}\wedge\frac{\partial^{\beta-m}\omega_2}{\partial^{\beta-m}x^k}. \qquad (1.12)$$

В частности, при $n=1$:

$$(d^\beta\tilde{\wedge}\partial^m)\omega_1\wedge\omega_2 = d^\beta x\wedge\frac{\partial^m\omega_1}{\partial x^m}\wedge\frac{\partial^{\beta-m}\omega_2}{\partial^{\beta-m}x}.$$

Используя обозначение (1.12), искомое выражение примет вид:

$$d^\beta\omega^{\alpha_1,\ldots,\alpha_s} = d^\beta\omega_1^{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}\wedge\omega_2^{\widetilde{\alpha}_1,\ldots,\widetilde{\alpha}_q} + (-1)^{pq}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\begin{array}{c}\beta\\ m\end{array}\right)(d^\beta\tilde{\wedge}\partial^m)\omega_2^{\widetilde{\alpha}_1,\ldots,\widetilde{\alpha}_q}\wedge\omega_1^{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}.$$

Таким образом, доказано третье (обобщенное) свойство дробного внешнего дифференциала, согласно которому если $\omega^{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}\in\Omega_p^{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}(G)$ и $\omega_2^{\widetilde{\alpha}_1,\ldots,\widetilde{\alpha}_q}\in\Omega_q^{\widetilde{\alpha}_1,\ldots,\widetilde{\alpha}_q}(G)$, то

$$d^\beta(\omega_1^{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}\wedge\omega_2^{\widetilde{\alpha}_1,\ldots,\widetilde{\alpha}_q}) = d^\beta\omega_1^{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}\wedge\omega_2^{\widetilde{\alpha}_1,\ldots,\widetilde{\alpha}_q}$$
$$+(-1)^{pq}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\begin{array}{c}\beta\\ m\end{array}\right)(d^\beta\tilde{\wedge}\partial^m)\omega_2^{\widetilde{\alpha}_1,\ldots,\widetilde{\alpha}_q}\wedge\omega_1^{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}. \qquad (1.13)$$

В случае $\beta = 1$ мы получим из (1.13) выражение свойства внешнего дифференциала в обычной форме

$$d(\omega_1^{\alpha_1,\dots,\alpha_p} \wedge \omega_2^{\widetilde{\alpha}_1,\dots,\widetilde{\alpha}_q}) = d\omega_1^{\alpha_1,\dots,\alpha_p} \wedge \omega_2^{\widetilde{\alpha}_1,\dots,\widetilde{\alpha}_q} + (-1)^p \omega_1^{\alpha_1,\dots,\alpha_p} \wedge d\omega_2^{\widetilde{\alpha}_1,\dots,\widetilde{\alpha}_q}. \tag{1.14}$$

Из сравнения (1.13) и (1.14) видно, что в отличие от первых двух свойств, которые обобщаются на дробный случай без формальных изменений в третьем свойстве возникает существенное отличие, связанное с наличием бесконечного числа слагаемых вместо двух, как в обычном случае.

Найдем теперь обобщение основного свойства внешнего дифференциала $d(d\omega) = 0$ на случай дробного внешнего дифференциала с неравными внешним и внутренним показателями дробности дифференциалов.

Предположим вначале, что ω есть форма степени 0, т. е. $\omega(x) = f(x)$. Тогда согласно (1.8) для $\beta, \gamma \in (0,1)$ будет

$$d^\gamma(d^\beta f) = d^\gamma \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^\beta f}{\partial^\beta x^k}\, d^\beta x^k = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^{\beta+\gamma} f}{\partial^\gamma x^i \partial^\beta x^k}\, d^\gamma x^i \wedge d^\beta x^k.$$

Так как $d^\gamma x^i \wedge d^\beta x^k = -d^\beta x^k \wedge d^\gamma x^i$, это равенство можно переписать в виде аналогичном по структуре выражению (1.9):

$$d^\gamma(d^\beta f) = \sum_{i<k} \left\{ \frac{\partial^{\beta+\gamma} f}{\partial^\gamma x^i \partial^\beta x^k}\, d^\gamma x^i \wedge \partial^\beta x^k - \frac{\partial^{\beta+\gamma} f}{\partial^\gamma x^k \partial^\beta x^i}\, d^\beta x^i \wedge \partial^\gamma x^k \right\}. \tag{1.15}$$

Из данного выражения видно, что в общем случае $d^\gamma(d^\beta f) \neq 0$ и, следовательно, основное свойство внешнего дифференциала $d(d\omega) = 0$ не имеет непосредственного аналогичного обобщения для дробного внешнего дифференциала с произвольными показателями β и γ. Однако, в частном случае, когда $\beta = \gamma$, для некоторых классов функций $f(x)$ можно ожидать выполнения основного свойства. Для этого положим $0 < \beta < 1/2$, так что $0 < 2\beta < 1$. Из (1.15) следует равенство

$$d^\beta(d^\beta f) = \sum_{i<k} \left\{ \frac{\partial^{2\beta} f}{\partial^\beta x^i \partial^\beta x^k} - \frac{\partial^{2\beta} f}{\partial^\beta x^k \partial^\beta x^i} \right\} d^\beta x^i \wedge d^\beta x^k.$$

Если функция $f(x)$ принадлежит множеству измеримых функций на $\mathbb{R}^n = E^n$, то всегда $\partial^{2\beta} f/\partial^\beta x^i \partial^\beta x^k = \partial^{2\beta} f/\partial^\beta x^k \partial^\beta x^i$. Поэтому, если $f(x) \in L_q(R^n)$, то выполнено свойство

$$d^\beta(d^\beta f) = 0. \tag{1.16}$$

В случае линейной формы $\omega^\alpha = \omega^\alpha(x, d^\alpha x)$, используя представление (1.9) и свойство 1.3.3 в виде выражения (1.13), имеем

$$\begin{aligned} d^\beta(d^\beta \omega^\alpha) &= \sum_{i=1}^{n} d^\beta(d^\beta \omega_i^\alpha \wedge d^\alpha x^i) = \sum_{i=1}^{n} \{ d^\beta(d^\beta \omega_i^\alpha) \wedge d^\alpha x^i \\ &+ (-1) \sum_{m=1}^{\infty} \binom{\beta}{m} (d^\beta \tilde{\wedge} \partial^m)(d^\alpha x^i \wedge d^\beta \omega_i^\alpha) \}. \end{aligned} \tag{1.17}$$

Здесь

$$d^\beta \omega_i^\alpha = \sum_{k=1}^{n} d^\beta_{x_k} \omega_i^\alpha = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^\beta \omega_i^\alpha}{\partial^\beta x^k}\, d^\beta x^k,$$

$$(d^{\beta}\tilde{\wedge}\partial^{m})(d^{\alpha}x^{i}\wedge d^{\beta}\omega_{i}^{\alpha})=\sum_{k=1}^{n}d^{\beta}x^{k}\wedge\frac{\partial^{m}(d^{\alpha}x^{i})}{\partial(x^{k})^{m}}\wedge\frac{\partial^{\beta-m}(d^{\beta}\omega_{i}^{\alpha})}{\partial^{\beta-m}x^{k}}.$$

Следует отметить, что согласно логике определения 1.1.1 или 1.1.2 переменные x и $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_p$ (а значит и $d^{\alpha_1}x^{i_1},d^{\alpha_2}x^{i_2},\ldots,d^{\alpha_p}x^{i_2}$) необходимо рассматривать как независимые переменные, иначе при фиксированном $x\in G$ функция $\omega^{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}$ не будет представлять собой нетривиальную знакопеременную p-форму из $A_p\,(E^n)$. В этом случае выражение (1.4) нужно понимать в «численном» смысле, устанавливающем связь между значениями $d^{\alpha}x$ и dx^{α}, но не определяющем функциональную зависимость $d^{\alpha}x$ от x (в противном случае данные построения вообще теряют всякий смысл).

В силу сказанного, частные производные в (1.17) вида $\frac{\partial^m(d^{\alpha}x^i)}{\partial(x^k)m}$ равны нулю, откуда $(d^{\beta}\widetilde{\wedge}\partial^{m})(d^{\alpha}x^{i}\wedge d^{\beta}\omega_{i}^{\alpha})=0$ для $m=1,2,\ldots$ и, так как, из (1.16) следует, что для 0-формы ω_i^{α}, $d^{\beta}(d^{\beta}\omega_i^{\alpha})=0$, то для линейной формы ω^{α} так же:

$$d^{\beta}(d^{\beta}\omega^{\alpha})=0. \tag{1.18}$$

Пусть теперь в общем случае дана форма

$$\omega^{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}=\sum_{i_1<\ldots<i_p}\omega_{i_1,\ldots,i_p}^{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}(x)d^{\alpha_1}x^{i_1}\wedge\ldots\wedge d^{\alpha_p}x^{i_p}.$$

Тогда

$$d^{\beta}\omega^{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}=\sum_{i_1<\ldots<i_p}d^{\beta}\omega_{i_1,\ldots,i_p}^{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}\wedge d^{\alpha_1}x^{i_1}\wedge\ldots\wedge d^{\alpha_p}x^{i_p}=\sum_{k=1}^{n}d^{\beta}x^{k}\wedge\frac{\partial^{\beta}\omega^{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}}{\partial^{\beta}x^{k}}.$$

Согласно (1.13) выполняется

$$d^{\beta}(d^{\beta}\omega^{\alpha_1,\ldots,\alpha_p})=\sum_{k=1}^{n}\left\{d^{\beta}(d^{\beta}x^{k})\wedge\frac{\partial^{\beta}\omega^{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}}{\partial^{\beta}x^{k}}+(-1)^{2p}\sum_{m=1}^{\infty}\binom{\beta}{m}(d^{\beta}\tilde{\wedge}\partial^{m})d^{\beta}x^{k}\wedge\frac{\partial^{\beta}\omega^{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}}{\partial^{\beta}x^{k}}\right\},$$

где

$$(d^{\beta}\tilde{\wedge}\partial^{m})d^{\beta}x^{k}\wedge\frac{\partial^{\beta}\omega^{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}}{\partial^{\beta}x^{k}}=\sum_{i=1}^{n}d^{\beta}x^{i}\wedge\frac{\partial^{m}(d^{\beta}x^{k})}{\partial(x^{i})^{m}}\wedge\frac{\partial^{2\beta-m}\omega^{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}}{\partial^{\beta}x^{k}\partial^{\beta-m}x^{i}}.$$

Учитывая результаты (1.16) и (1.18), находим, что для формы $\omega^{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}$ выполняется свойство:

$$d^{\beta}(d^{\beta}\omega^{\alpha_1,\ldots,\alpha_p})=0. \tag{1.19}$$

2. Дробные дифференцируемые отображения

2.1. Определение дробных дифференцируемых отображений. Рассмотрим произвольную m-мерную область D евклидова пространства E^m и n-мерную область $G\subset E^n$. Точки области D будем обозначать символами $t=(t^1,t^2,\ldots,t^m)$, а точки области G — символами $x=(x^1,x^2,\ldots,x^n)$.

Будем говорить, что φ отображает D в G, если $\varphi=\{\varphi^1,\varphi^2,\ldots,\varphi^n\}$, где $\varphi^k(t)$ определены в области D, а векторы x с координатами $x^k=\varphi^k(t)$ лежат в области G.

Определим отображение φ^*, которое переводит $\Omega_p^{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}(G,E^n)=\Omega_p^{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}(G)$ в $\Omega_p^{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}(D,E^m)=\Omega_p^{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}(D)$ для любого p, $0\leqslant p\leqslant n$. При этом мы будем считать, что каждая компонента $\varphi^k(t)$ отображения φ является бесконечно дифференцируемой и измеримой на $D \subset E^m$ функцией.

Определение 2.1.1. Пусть φ — отображение $D \subset E^m$ в $G \subset E^n$. Обозначим через φ^* отображение, которое для всех $0 \leqslant p \leqslant n$ действует из $\Omega_p^{\alpha_1,\dots,\alpha_p}(G)$ в $\Omega_p^{\alpha_1,\dots,\alpha_p}(D)$ по следующему правилу: если

$$\omega = \omega^{\alpha_1,\dots,\alpha_p} = \sum_{i_1<\dots<i_p} \omega_{i_1,\dots,i_p}^{\alpha_1,\dots,\alpha_p}(x) d^{\alpha_1}x^{i_1} \wedge \dots \wedge d^{\alpha_p}x^{i_p},$$

то

$$\varphi^*(\omega) = \varphi^*(\omega^{\alpha_1,\dots,\alpha_p}) = \sum_{i_1<\dots<i_p} \omega_{i_1,\dots,i_p}^{\alpha_1,\dots,\alpha_p}(\varphi(t)) \cdot \varphi^*(d^{\alpha_1}x^{i_1}) \wedge \dots \wedge \varphi^*(d^{\alpha_p}x^{i_p}),$$

где

$$\varphi^*(d^\alpha x^i) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^\alpha \varphi^i}{\partial^\alpha t^k}\, d^\alpha t^k.$$

Пример 2.1.1. Пусть ω — форма степени 0, т. е. $\omega = f(x)$. Тогда $\varphi^*(f) = f(\varphi(t))$.

Пример 2.1.2. Пусть φ отображает n-мерную область $D \subset E^n$ в n-мерную область $G \subset E^n$ и пусть ω — следующая n-форма:

$$\omega = d^{\alpha_1}x^1 \wedge d^{\alpha_2}x^2 \wedge \dots \wedge d^{\alpha_n}x^n.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\varphi^*(\omega) &= \left(\sum_{k_1=1}^{n} \frac{\partial^{\alpha_1}\varphi^1}{\partial^{\alpha_1}t^{k_1}}\, d^{\alpha_1}t^{k_1} \right) \wedge \dots \wedge \left(\sum_{k_n=1}^{n} \frac{\partial^{\alpha_n}\varphi^n}{\partial^{\alpha_n}t^{k_n}}\, d^{\alpha_n}t^{k_n} \right) \\ &= \sum_{k_1=1}^{n} \dots \sum_{k_n=1}^{n} \frac{\partial^{\alpha_1}\varphi^1}{\partial^{\alpha_1}t^{k_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}\varphi^n}{\partial^{\alpha_n}t^{k_n}}\, d^{\alpha_1}t^{k_1} \wedge \dots \wedge d^{\alpha_n}t^{k_n} \qquad (2.1) \\ &= \sum_\sigma \frac{\partial^{\alpha_1}\varphi^1}{\partial^{\alpha_1}t^{\sigma(1)}} \frac{\partial^{\alpha_2}\varphi^2}{\partial^{\alpha_2}t^{\sigma(2)}} \cdot \ldots \cdot \frac{\partial^{\alpha_n}\varphi^n}{\partial^{\alpha_n}t^{\sigma(n)}}\, d^{\alpha_1}t^{\sigma(1)} \wedge d^{\alpha_2}t^{\sigma(2)} \wedge \dots \wedge d^{\alpha_n}t^{\sigma(n)}.\end{aligned}$$

В частности, при $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = \alpha$ выражение (2.1) существенно упрощается:

$$\sum_\sigma \frac{\partial^\alpha\varphi^1}{\partial^\alpha t^{\sigma(1)}} \cdots \frac{\partial^\alpha\varphi^n}{\partial^\alpha t^{\sigma(n)}}\, d^\alpha t^{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge d^\alpha t^{\sigma(n)} = d^\alpha t^{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge d^\alpha t^{\sigma(n)} \sum_\sigma (\operatorname{sgn}\sigma) \frac{\partial^\alpha\varphi^1}{\partial^\alpha t^{\sigma(1)}} \cdots \frac{\partial^\alpha\varphi^n}{\partial^\alpha t^{\sigma(n)}},$$

или, вводя естественное обозначение

$$\sum_\sigma (\operatorname{sgn}\sigma) \frac{\partial^\alpha\varphi^1}{\partial^\alpha t^{\sigma(1)}} \cdots \frac{\partial^\alpha\varphi^n}{\partial^\alpha t^{\sigma(n)}} \equiv \det\left\{ \frac{\partial^\alpha\varphi^i}{\partial^\alpha t^j} \right\} \equiv \frac{D^\alpha(\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^n)}{D^\alpha(t^1, t^2, \dots, t^n)},$$

найдем, что в силу симметричности дифференциалов $d^\alpha t^i$ при едином α:

$$\varphi^*(d^\alpha x^1 \wedge d^\alpha x^2 \wedge \dots \wedge d^\alpha x^n) = \frac{D^\alpha(\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^n)}{D^\alpha(t^1, t^2, \dots, t^n)}\, d^\alpha t^1 \wedge d^\alpha t^2 \wedge \dots \wedge d^\alpha t^n. \qquad (2.2)$$

Замечание. По аналогии с обычным случаем форму $\varphi^*(\omega)$ из (2.2) можно назвать дробной дифференциальной формой, получающейся из формы ω при помощи замены переменных φ.

2.2. Свойства отображения φ^*. Справедливы следующие свойства дробного отображения φ^*:

2.1.1. *Если* $\omega_1 \in \Omega_p^{\alpha_1,\dots,\alpha_p}(G)$, $\omega_2 \in \Omega_q^{\beta_1,\dots,\beta_q}(G)$, *то* $\varphi^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = \varphi^*(\omega_1) \wedge \varphi^*(\omega_2)$.

$\lhd$ Пусть

$$\omega_1 = \omega_1^{\alpha_1,\dots,\alpha_p} = \sum_{i<\dots<i_p} a_{i_1,\dots,i_p}^{\alpha_1,\dots,\alpha_p}(x)\, d^{\alpha_1}x^{i_1} \wedge \dots \wedge d^{\alpha_p}x^{i_p},$$

$$\omega_2 = \omega_2^{\beta_1,\dots,\beta_q} = \sum_{k_1<\dots<k_q} b_{k_1,\dots,k_q}^{\beta_1,\dots,\beta_q}(x)\, d^{\beta_1}x^{k_1} \wedge \dots \wedge d^{\beta_q}x^{k_q}.$$

Тогда

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = \sum_{i_1<\dots<i_p} \sum_{k_1<\dots<k_q} a_{i_1,\dots,i_p}^{\alpha_1,\dots,\alpha_p}(x) b_{k_1,\dots,k_q}^{\beta_1,\dots,\beta_q}(x)\, d^{\alpha_1}x^{i_1} \wedge \dots \wedge d^{\alpha_p}x^{i_p} \wedge d^{\beta_1}x^{k_1} \wedge \dots \wedge d^{\beta_q}x^{k_q},$$

и, следовательно,

$$\varphi^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = \sum_i \sum_k a_i^\alpha(\varphi(t)) b_k^\beta(\varphi(t)) \varphi^*(d^{\alpha_1}x^{i_1}) \wedge \dots \wedge \varphi^*(d^{\alpha_p}x^{i_p}) \wedge \varphi^*(d^{\beta_1}x^{k_1}) \wedge \dots \wedge \varphi^*(d^{\beta_q}x^{k_q})$$
$$= \sum_i a_i^\alpha(\varphi) \cdot \varphi^*(d^{\alpha_1}x^{i_1}) \wedge \dots \wedge \varphi^*(d^{\alpha_p}x^{i_p}) \wedge \left[\sum_k b_k^\beta(\varphi) \cdot \varphi^*(b^{\beta_1}x^{k_1}) \wedge \dots \wedge \varphi^*(b^{\beta_q}x^{k_q}) \right]$$
$$= \varphi^*(\omega_1) \wedge \varphi^*(\omega_2). \quad \rhd$$

2.2.2. *Если* $\omega \in \Omega_p^{\alpha_1,\dots,\alpha_{p-1},\beta}(G)$, *то* $\varphi^*(d^\beta \omega) = d^\beta \varphi^*(\omega)$.

$\lhd$ Докажем вначале это равенство для $p = 0$, т. е. для $\omega = f(x)$. Получим

$$d^\beta \omega = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^\beta f}{\partial^\beta x^i}\, d^\beta x^i, \quad \varphi^*(\omega) = f(\varphi(t)).$$

Из представления (1.3) для оператора дробного дифференцирования вида $D_{0+}^\alpha = \left(\frac{d}{dx}\right)^\alpha$, следует, что $D_{0+}^\alpha f(x) = \left(\frac{df(x)}{dx}\right)^\alpha = d^\alpha f(x)/dx^\alpha$, откуда для сложной функции $f(\varphi(x))$ будет верным представление

$$D_{0+}^\alpha f(\varphi(x)) = \left(\frac{df(\varphi(x))}{dx}\right)^\alpha = \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\frac{d\varphi}{dx}\right)^\alpha = \frac{\partial^\alpha f}{\partial^\alpha \varphi}\frac{d^\alpha \varphi}{dx^\alpha},$$

так как для приращения функции $(d\varphi(x))^\alpha = d^\alpha \varphi(x)$. Из сказанного находим, что для $f = f(\varphi(x))$

$$\frac{d^\alpha f}{d^\alpha x} = \frac{\partial^\alpha f}{\partial^\alpha \varphi}\frac{d^\alpha \varphi}{d^\alpha x}. \tag{2.3}$$

Используя (2.3) легко найдем, что

$$d^\beta \varphi^*(\omega) = \sum_{k=1}^m \frac{\partial^\beta}{\partial^\beta t^k} f(\varphi(t)) d^\beta t^k = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m \frac{\partial^\beta f}{\partial^\beta x^i}\frac{\partial^\beta \varphi^i}{\partial^\beta t^k}\, d^\beta t^k = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^\beta f}{\partial^\beta x^i}\, \varphi^*(d^\beta x^i) = \varphi^*(d^\beta \omega).$$

Для произвольного φ проведем доказательство по индукции. Пусть $\omega = \omega^{\alpha_1,\dots,\alpha_p} = f^{\alpha_1,\dots,\alpha_p}_{i_1,\dots,i_p}(x) d^{\alpha_1}x^{i_1} \wedge \dots \wedge d^{\alpha_p}x^{i_p}$. Тогда $d^\beta\omega = d^\beta f^{\alpha_1,\dots,\alpha_p}_{i_1,\dots,i_p}(x) \wedge d^{\alpha_1}x^{i_1} \wedge \dots \wedge d^{\alpha_p}x^{i_p}$.

По свойству 2.2.1 и только что доказанному соотношению

$$\varphi^*(d^\beta\omega) = \varphi^*(d^\beta f) \wedge \varphi^*(d^{\alpha_1}x^{i_1}) \wedge \dots \wedge (d^{\alpha_p}x^{i_p}).$$

С другой стороны

$$\begin{aligned} d^\beta\varphi^*(\omega) &= d^\beta\varphi^*[(f d^{\alpha_1}x^{i_1} \wedge \dots \wedge d^{\alpha_{p-1}}x^{i_{p-1}}) \wedge d^{\alpha_p}x^{i_p}] \\ &= d^\beta[\varphi^*(f d^{\alpha_1}x^{i_1} \wedge \dots \wedge d^{\alpha_{p-1}}x^{i_{p-1}}) \wedge \varphi^*(d^{\alpha_p}x^{i_p})]. \end{aligned}$$

Далее в силу свойства 1.3.3 внешнего дифференциала верно

$$d^\beta\varphi^*(\omega) = d^\beta\varphi^*(f d^{\alpha_1}x^{i_1} \wedge \dots \wedge d^{\alpha_{p-1}}x^{i_{p-1}}) \wedge \varphi^*(d^{\alpha_p}x^{i_p})$$
$$+(-1)^{p-1}\sum_{m=1}^{\infty}\begin{pmatrix}\beta\\ m\end{pmatrix}(d^\beta\tilde{\wedge}\partial^m)\varphi^*(d^{\alpha_p}x^{i_p}) \wedge \varphi^*(f d^{\alpha_1}x^{i_1} \wedge \dots \wedge d^{\alpha_{p-1}}x^{i_{p-1}}).$$

Учитывая свойство антикоммутативности внешнего произведения, найдем

$$(d^\beta\tilde{\wedge}\partial^m)\varphi^*(d^{\alpha_p}x^{i_p}) \wedge \varphi^*(f d^{\alpha_1}x^{i_1} \wedge \dots \wedge d^{\alpha_{p-1}}x^{i_{p-1}})$$
$$= (-1)^{p-1}\sum_{k=1}^{n} d^\beta x^k \wedge \frac{\partial^m}{\partial(x^k)^m}\varphi^*(f d^{\alpha_1}x^{i_1} \wedge \dots \wedge d^{\alpha_{p-1}}x^{i_{p-1}}) \wedge \frac{\partial^{\beta-m}}{\partial^{\beta-m}x^k}\varphi^*(d^{\alpha_p}x^{i_p}).$$

Заметим, что $\varphi^*(d^{\alpha_p}x^{i_p}) = d^{\alpha_p}\varphi^*(x^{i_p})$ в силу только что доказанного. В связи с полугрупповым свойством дробной производной [1] имеем $\frac{\partial^{\beta-m}}{\partial^{\beta-m}x^k}\varphi^*(d^{\alpha_p}x^{i_p}) = \frac{\partial^{-m}}{\partial^{-m}x^k}\frac{\partial^\beta}{\partial^\beta x^k} d^{\alpha_p}\varphi^*(x^{i_p})$. При $\alpha_p = \beta$ сразу найдем, что $\frac{\partial^\beta}{\partial^\beta x^k} d^\beta\varphi^*(x^{i_p}) = 0$, так как $d^\beta(d^\beta\varphi^*(x^{i_p})) = 0$, по основному свойству дробного внешнего дифференциала (1.19). Следовательно,

$$(d^\beta\tilde{\wedge}\partial^m)\varphi^*(d^\beta x^{i_p}) \wedge \varphi^*(f d^{\alpha_1}x^{i_1} \wedge \dots \wedge d^{\alpha_{p-1}}x^{i_{p-1}}) = 0$$

и

$$d^\beta\varphi^*(\omega) = d^\beta\varphi^*(f d^{\alpha_1}x^{i_1} \wedge \dots \wedge d^{\alpha_{p-1}}x^{i_{p-1}}) \wedge \varphi^*(d^\beta x^{i_p}).$$

По предположению индукции, справедливому для $p-1$, выводим

$$d^\beta\varphi^*(f d^{\alpha_1}x^{i_1} \wedge \dots \wedge d^{\alpha_{p-1}}x^{i_{p-1}}) = \varphi^*(d^\beta f \wedge d^{\alpha_1}x^{i_1} \wedge \dots \wedge d^{\alpha_{p-1}}x^{i_{p-1}}).$$

В результате получим

$$d^\beta\varphi^*(\omega) = \varphi^*(d^\beta f \wedge d^{\alpha_1}x^{i_1} \wedge \dots \wedge d^{\alpha_{p-1}}x^{i_{p-1}}) \wedge \varphi^*(d^\beta x^{i_p})$$

и по свойству 2.2.1

$$d^\beta\varphi^*(\omega^{\alpha_1,\dots,\alpha_{p-1},\beta}) = \varphi^*(d^\beta f \wedge d^{\alpha_1}x^{i_1} \wedge \dots \wedge d^{\alpha_{p-1}}x^{i_{p-1}} \wedge d^\beta x^{i_p}).\triangleright$$

Следующее важное свойство назовем *транзитивностью дробного отображения*

2.2.3. Рассмотрим открытые области $u \subset E^l$, $V \subset E^m$, $W \subset E^n$, точки которых соответственно $u = (u^1, u^2, \dots, u^l)$, $v = (v^1, v^2, \dots, v^m)$, $w = (w^1, w^2, \dots, w^n)$. Пусть φ

отображает $U \to V$, а ψ отображает $V \to W$. Через $\psi \circ \varphi$ обозначим отображение, называемое композицией, которое действует по правилу

$$(\psi \circ \varphi)(u) = \psi[\varphi(u)].$$

Аналогично введем композицию $\varphi^* \circ \psi^*$, которая для любого p переводит $\Omega_p(W)$ в $\Omega_p(U)$, т. е.

$$(\varphi^* \circ \psi^*)(\omega) = \varphi^*[\psi^*(\omega)].$$

Справедливо следующее равенство:

$$(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*.$$

$\lhd$ Обозначим $\beta = \psi \circ \varphi$. Это означает, что $\beta = (\beta^1, \beta_2, \dots, \beta^n)$, где $\beta^k = \psi^k(\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^m)$.

Проведем сначала доказательство для линейной формы $d^\alpha w^k \subset \Omega_1^\alpha(W)$. Получим

$$\beta^*(d^\alpha w^k) = d^\alpha \beta^*(w^k) = d^\alpha \beta^k(u) = \sum_{i=1}^{l} \frac{\partial^\alpha \beta^k}{\partial^\alpha u^i}\, d^\alpha u^i = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^\alpha \psi^k}{\partial^\alpha v^j} \cdot \frac{\partial^\alpha \varphi^j}{\partial^\alpha u^i}\, d^\alpha u^i.$$

Далее

$$\begin{aligned}(\varphi^* \circ \psi^*)(d^\alpha w^k) &= \varphi^*[\psi^k(d^\alpha w^k)] = \varphi^*[d^\alpha \psi^*(w^k)] = \varphi^*(d^\alpha \psi^k) \\ &= \varphi^* \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^\alpha \psi^k}{\partial^\alpha v^j}\, d^\alpha v^j \right) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^\alpha \psi^k}{\partial^\alpha v^j} \cdot \varphi^*\,(d^\alpha v^j).\end{aligned}$$

Но

$$\varphi^*(d^\alpha v^j) = d^\alpha \varphi^*(v^j) = d^\alpha \varphi^j = \sum_{i=1}^{l} \frac{\partial^\alpha \varphi^j}{\partial^\alpha u^i}\, d^\alpha u^i,$$

и тогда

$$(\varphi^* \circ \psi^*)(d^\alpha w^k) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{l} \frac{\partial^\alpha \psi^k}{\partial^\alpha v^j} \cdot \frac{\partial^\alpha \varphi^j}{\partial^\alpha u^i}\, d^\alpha u^i$$

и равенство доказано. Отсюда следует справедливость свойства 2.2.3. для любой дробной дифференциальной линейной формы. Далее доказательство проведем по индукции. Пусть

$$\omega = \omega^{\alpha_1, \dots, \alpha_p} = f(w) d^{\alpha_1} w^{i_1} \wedge \dots \wedge d^{\alpha_p} w^{i_p} \in \Omega_p^{\alpha_1 \dots \alpha_p}(W).$$

Тогда

$$\begin{aligned}\beta^*(\omega) &= \beta^*(f d^{\alpha_1} w^{i_1} \wedge \dots \wedge d^{\alpha_{p-1}} w^{i_{p-1}}) \wedge \beta^*(d^{\alpha_p} w^{i_p}) \\ &= (\varphi^* \circ \psi^*)(f d^{\alpha_1} w^{i_1} \wedge \dots \wedge d^{\alpha_{p-1}} w^{i_{p-1}}) \wedge (\varphi^* \circ \psi^*)(d^{\alpha_p} w^{i_p}) \\ &= (\varphi^* \circ \psi^*)(f d^{\alpha_1} w^{i_1} \wedge \dots \wedge d^{\alpha_p} w^{i_p}) = (\varphi^* \circ \psi^*)(\omega). \rhd\end{aligned}$$

Основной задачей дальнейшего развития теории дробных дифференциальных форм является построение теории, позволяющей проводить корректное интегрирование дробных форм. Причем на первое место здесь выдвигается нетривиальный вопрос о выборе адекватного многообразия интегрирования для каждой данной дробной формы.

Литература

1. *Постников М. М.* Гладкие многообразия.—М.: Наука, 1987.—480 с.
2. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.—Минск: Наука, 1987.—688 с.
3. *Иосида К.* Функциональный анализ.—М.: Мир, 1967.

Статья поступила 11 февраля 2005 г.

Казбеков Каирбек Казбекович, к. ф.-м. н.
г. Владикавказ, Институт прикладной математики и информатики ВНЦ РАН
E-mail: `kairbek75@mail.ru`