Владикавказский математический журнал
Апрель–июнь, 2005, Том 7, Выпуск 2

УДК **517.518**

СФЕРИЧЕСКИЕ ОПЕРАТОРЫ ТИПА ПОТЕНЦИАЛА В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ГЁЛЬДЕРА ПЕРЕМЕННОГО ПОРЯДКА

Б. Г. Вакулов

Посвящается выдающемуся математику, нашему Учителю, академику Сергею Михайловичу Никольскому

В работе описываются образы оператора типа сферического потенциала K^α, $\operatorname{Re}\alpha > 0$, и сферических сверток с ядрами, зависящими от скалярного произведения, и имеющих мультипликатор по сферическим гармоникам заданной асимптотики на бесконечности. На основании теорем о действии этих операторов и им обратных в пространствах переменной гёльдеровости строятся изоморфизмы этих пространств. Рассматривается сначала безвесовой случай, а затем с его помощью случай степенного веса.

Введение

В работе исследуются сферический оператор типа потенциала $K^\alpha, \operatorname{Re}\alpha > 0$,

$$(K^\alpha f)(x) = \frac{1}{\gamma_{n-1}(\alpha)} \int\limits_{S_{n-1}} \frac{f(\sigma)}{|x-\sigma|^{n-1-\alpha}}\, d\sigma, \quad x \in S_{n-1}, \tag{0.1}$$

где $\gamma_{n-1}(\alpha)$ — нормировочная константа и $\alpha \neq n-1, n+1, \ldots$, и связанный с ним сферический гиперсингулярный интеграл $D^\alpha, 0 \leqslant \operatorname{Re}\alpha < 2$ (см., например, [1–7]),

$$(D^\alpha f)(x) = \frac{1}{\gamma_{n-1}(-\alpha)} \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\substack{S_{n-1}\\ |x-\sigma|\geqslant\varepsilon}} \frac{f(\sigma)-f(x)}{|x-\sigma|^{n-1+\alpha}}\, d\sigma, \quad x \in S_{n-1}. \tag{0.2}$$

Наряду с операторами K^α и D^α рассматриваются также операторы

$$\mathcal{D}^\alpha = \frac{1}{b_n} I + D^\alpha, \qquad b_n = \frac{\Gamma\left(\frac{n-1-\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1+\alpha}{2}\right)}\ , \tag{0.3}$$

для которых при $0 \leqslant \operatorname{Re}\alpha < 2, \alpha \neq 0$, справедливы соотношения

$$\mathcal{D}^\alpha K^\alpha = I, \quad K^\alpha \mathcal{D}^\alpha = I \quad (0 < \operatorname{Re}\alpha < 2);$$

$$\mathcal{D}^{i\theta}\mathcal{D}^{-i\theta} = I \quad (\theta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}).$$

Операторы (0.1)–(0.3) изучаются в безвесовых и весовых пространствах переменной гёльдеровости (вес $\rho(x) = |x-a|^{\mu}$, $\operatorname{Re}\alpha - [\operatorname{Re}\alpha] + \lambda_+ < \mu < n-1+\lambda_-$). Центральным результатом здесь является получение изоморфизмов $(0 < \lambda_- \leqslant \lambda(x) \leqslant \lambda_+ < 1,\ \lambda_- = \inf\limits_{x\in S_{n-1}} \lambda(x),\ \lambda_+ = \sup\limits_{x\in S_{n-1}} \lambda(x))$:

$$\begin{gathered} K^{\alpha}[H_k^{\lambda(x)}(S_{n-1})] = H_{k+[\operatorname{Re}\alpha]}^{\lambda(x)+\{\operatorname{Re}\alpha\}}(S_{n-1}), \\ \mathcal{D}^{\pm i\theta}[H_k^{\lambda(x)}(S_{n-1})] = H_k^{\lambda(x)}(S_{n-1}) \quad \big(\theta \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\big), \end{gathered} \tag{0.4}$$

и

$$\begin{gathered} K^{\alpha}[H_k^{\lambda(x)}(\rho, S_{n-1})] = H_{k+[\operatorname{Re}\alpha]}^{\lambda(x)+\{\operatorname{Re}\alpha\}}(\rho, S_{n-1}), \\ \mathcal{D}^{\pm i\theta}[H_k^{\lambda(x)}(\rho, S_{n-1})] = H_k^{\lambda(x)}(\rho, S_{n-1}), \end{gathered} \tag{0.5}$$

при условиях $\operatorname{Re}\alpha > 0, \lambda_+ + \{\operatorname{Re}\alpha\} < 1$, и в предположении, что $\lambda(x)$ удовлетворяет условию

$$|\lambda(y) - \lambda(x)| \leqslant c|\ln|x-y||^{-1}, \quad x,\, y \in S_{n-1}, \quad |x-y| \leqslant \frac{1}{2}; \tag{0.6}$$

для выполнения изоморфизмов (0.5) требуется также, чтобы $\lambda(a) = \lambda_+$.

Пространства переменной гёльдеровости высших порядков понимаются в смысле принадлежности сферических производных порядка k классическим пространствам Гёльдера. Ранее в работах [2–6] для сферических операторов (0.1)–(0.2): сферического потенциала K^{α}, гиперсингулярного интеграла D^{α} при $\operatorname{Re}\alpha \neq 0$ и $D^{i\theta}$ $(\theta \in \mathbb{R}\setminus\{0\})$ при $\operatorname{Re}\alpha = 0$ выяснялось их действие в обобщенных классах Гёльдера $H^{\omega}(S_{n-1})$. Там предполагалось, что характеристика $\omega(t)$ принадлежит классу Φ_{β}^{δ} типа Бари — Стечкина, причем β и δ определяются в зависимости от n и $\operatorname{Re}\alpha$.

На основе полученных результатов, в частности при $\omega(t) = t^{\lambda}$, показывалось, что оператор K^{α} с $0 \leqslant \operatorname{Re}\alpha < 1$ осуществляет следующий изоморфизм:

$$K^{\alpha}[H^{\lambda}(S_{n-1})] = H^{\lambda+\operatorname{Re}\alpha}(S_{n-1}), \quad 0<\lambda,\ \operatorname{Re}\alpha < 1,\ \lambda + \operatorname{Re}\alpha < 1, \tag{0.7}$$

и

$$\mathcal{D}^{\pm i\theta}[H^{\lambda}(S_{n-1})] = H^{\lambda}(S_{n-1}) \quad \big(\theta \in \mathbb{R}\setminus\{0\},\ 0<\lambda<1\big). \tag{0.8}$$

В [4–7] эти результаты обобщены также на случай степенного веса.

Отметим еще, что дробные интегралы и дробные производные на отрезке вещественной оси в пространствах Гёльдера переменного порядка ранее рассматривались в [8–11]. При изучении дробной производной, а следовательно, и при установлении соответствующего изоморфизма и там возникало условие типа (0.6).

Все встречающиеся ниже постоянные, если не оговорено, будем обозначать одной буквой c. Кроме того, считаем $n \geqslant 3$. Случай $n = 2$ несколько отличается технически, но также может быть рассмотрен.

1. Обозначения и основные определения

Будем использовать следующие стандартные обозначения многомерного анализа на сфере S_{n-1} в $\mathbb{R}^n$:

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n); \quad |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}; \quad x\cdot y = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n;$$

$$S_{n-1}=\{x:\,x\in\mathbb{R}^n,|x|=1\};\quad |S_{n-1}|=2\pi^{\frac{n-1}{2}}\Gamma^{-1}\left(\frac{n-1}{2}\right);$$

$$\gamma_{n-1}(\alpha)=2^{\alpha}\pi^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma^{-1}\left(\frac{n-1-\alpha}{2}\right).$$

Отметим, что для придания смысла нормировочному коэффициенту $\gamma_{n-1}(\alpha)$ при $\operatorname{Re}\alpha\leqslant 0,\alpha\neq 0,-2\ldots$, следует в его выражении множитель $\Gamma\left(\alpha/2\right)$ понимать как аналитическое продолжение по α. Приведем некоторые факты, которыми будем пользоваться. Известен следующий частный случай формулы Функа — Гекке, называемый также формулой Каталана (см. например [13, с. 20]):

$$\int\limits_{S_{n-1}} f(x\cdot\sigma)\,d\sigma=C_n\int\limits_{-1}^{1} f(t)(1-t^2)^{(n-3)/2}\,dt,\quad x\in S_{n-1},\tag{1.1}$$

где $C_n=|S_{n-2}|=2\pi^{(n-1)/2}\Gamma^{-1}\left((n-1)/2\right)$ означает площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^{n-1}$. С помощью метода вращений, который используется для доказательства формулы (1.1), и с учетом того, что $|x-\sigma|=\sqrt{2(1-x\cdot\sigma)}$, вычисляются и оцениваются интегралы вида

$$J(a,b,x)=\int\limits_{a<|x-\sigma|<b} g(|x-\sigma|,x)\,d\sigma,\quad x\in S_{n-1},\tag{1.2}$$

где $0\leqslant a<b\leqslant 2$. А именно, справедлива

Лемма 1.1. *Пусть $n\geqslant 2$, тогда с учетом* (1.2), *имеем*

$$J(a,b,x)=2^{3-n}C_n\int\limits_{a}^{b} g(u,x)u^{n-2}(4-u^2)^{\frac{n-3}{2}}\,du,\tag{1.3}$$

и, в частности, при $n\geqslant 3$

$$|J(a,b,x)|\leqslant C_n\int\limits_{a}^{b}|g(u,x)|u^{n-2}\,du.\tag{1.4}$$

Из формулы (1.3), в частности, следует, что

$$\int\limits_{S_{n-1}}\frac{d\sigma}{|x-\sigma|^{n-1-\alpha}}=\gamma_{n-1}(\alpha),\quad \operatorname{Re}\alpha>0.$$

Отметим еще, что

$$\int\limits_{a<|x-\sigma|<b} g(|x-\sigma|,x)\,d\sigma=\int\limits_{a<|y-\sigma|<b} g(|y-\sigma|,x)\,d\sigma\quad x,y\in S_{n-1}.\tag{1.5}$$

Следующая оценка, представляющая интерес при $\gamma>n-1$, выводится из формулы (1.4):

$$\int\limits_{|y-\sigma|>2|x-y|}\frac{d\sigma}{|\sigma-y|^{\gamma}}\leqslant\int\limits_{|y-\sigma|>|x-y|}\frac{d\sigma}{|\sigma-y|^{\gamma}}\leqslant c|x-y|^{-\gamma+n-1},\quad \gamma>n-1,\tag{1.6}$$

см. подробности в [4–7].

В дальнейшем нам понадобятся известные классические числовые неравенства, которые мы приведем здесь для случая комплексных показателей:

$$|x^\mu - y^\mu| \leqslant c|x-y|x^{\operatorname{Re}\mu-1}, \qquad x \geqslant y > 0,\ \operatorname{Re}\mu \geqslant 0; \tag{1.7}$$

$$|x^\mu - y^\mu| \leqslant c|x-y|y^{\operatorname{Re}\mu-1}, \qquad x \geqslant y > 0,\ \operatorname{Re}\mu \leqslant 1; \tag{1.8}$$

$$|x^\mu - y^\mu| \leqslant c|x-y|^{\operatorname{Re}\mu}, \qquad x > 0,\ y > 0,\ 0 < \operatorname{Re}\mu \leqslant 1; \tag{1.9}$$

$$|x^\mu - y^\mu| \leqslant c|x-y|(x+y)^{\operatorname{Re}\mu-1}, \quad x > 0,\ y > 0,\ \operatorname{Re}\mu \geqslant 1. \tag{1.10}$$

При оценке сферических операторов возникает необходимость в оценках на части сферы, определяемой неравенством $|x-\sigma| \geqslant 2|x-y|$.

Лемма 1.2. *Пусть* $x, y \in S_{n-1}$ *и*

$$|x-\sigma| \geqslant 2|x-y|. \tag{1.11}$$

Тогда при $\operatorname{Re}\gamma > 0$ *справедливо неравенство*

$$\big||x-\sigma|^{-\gamma} - |y-\sigma|^{-\gamma}\big| \leqslant c\frac{|x-y|}{|x-\sigma|^{\operatorname{Re}\gamma}(|x-\sigma|+|x-y|)} \leqslant c\frac{|x-y|}{|x-\sigma|^{\operatorname{Re}\gamma+1}}. \tag{1.12}$$

$\lhd$ Для доказательства леммы 1.2 вначале заметим, что из упомянутых выше числовых неравенств (1.7)–(1.10) выводится следующее: пусть $a > 0$, $b > 0$ и, кроме того, $a \geqslant 2|b-a|, \operatorname{Re}\gamma > 0$, тогда справедливо неравенство

$$|a^{-\gamma} - b^{-\gamma}| \leqslant \frac{c}{a^{\operatorname{Re}\gamma}} \cdot \frac{|a-b|}{a+|a-b|}. \tag{1.13}$$

Чтобы вывести отсюда лемму 1.2, полагаем $a = |x-\sigma|$, $b = |y-\sigma|$, так что условие $a \geqslant 2|b-a|$ выполнено в силу (1.11). Остается применить (1.13) и воспользоваться монотонным возрастанием по ξ функции $\frac{\xi}{a+\xi}$ $(a > 0, \xi > 0)$, что приводит к (1.12), подробности см. в [7]. $\rhd$

Определение 1.1. Через $H^{\lambda(x)}(S_{n-1})$ обозначим банахово пространство непрерывных на S_{n-1} функций, для которых конечна норма

$$\|f\|_\lambda = \|f\|_C + A_f, \quad A_f = \sup_{x,y\in S_{n-1}} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^{\lambda(x)}} = \sup_{x,y\in S_{n-1}} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^{\lambda(y)}},$$

$$0 < \lambda_- \leqslant \lambda(x) \leqslant \lambda_+ < 1, \quad \lambda_- = \inf_{x\in S_{n-1}} \lambda(x), \quad \lambda_+ = \sup_{x\in S_{n-1}} \lambda(x).$$

Определение 1.2. *Весовым пространством переменной гёльдеровости* назовем следующее банахово пространство

$$H^{\lambda(x)}(\rho, S_{n-1}) = \Big\{f :\, \rho f \in H^{\lambda(x)}(S_{n-1}),\ \lim_{x\to a} \rho f = 0\Big\}.$$

Пусть K оператор сферической свертки инвариантный относительно всех вращений на сфере

$$(Kf)(x) = \int\limits_{S_{n-1}} k(x\cdot\sigma) f(\sigma) d\sigma, \qquad x \in S_{n-1}.$$

Если обозначить $f_{m\nu}$ коэффициенты $f(x) \in C^\infty(S_{n-1})$ при ее разложении в ряд Фурье — Лапласа по сферическим гармоникам, то известно, что на сферических гармониках его действие сводится к умножению $f_{m\nu}$ на последовательность $\{k_m\}_{m=0}^\infty$, называемую мультипликатором Фурье — Лапласа оператора K и определяемую через ядро по формуле

$$k_m = |S_{n-2}| \int_{-1}^{1} k(t) P_m(t)(1-t^2)^{\frac{n-3}{2}} dt, \tag{1.14}$$

где $P_m(t) = (C_{m+n-3}^m)^{-1} C_m^{\frac{n-2}{2}}(t)$ и $C_m^{\frac{n-2}{2}}(t)$ — многочлены Гегенбауэра (см., например, [12–14]).

Определение 1.3. Через $W_{\lambda,N}$ обозначим класс мультипликаторов $\{k_m\}_{m=0}^\infty$ по сферическим гармоникам $|k_m| < \infty$, допускающих асимптотику вида

$$k_m = \sum_{j=0}^{N} c_j m^{\lambda - j} + O(m^{\lambda - N - \varepsilon}), \quad m \to \infty,$$

где $c_0 \neq 0, \varepsilon > 0$ и $\lambda \in \mathbb{C}$, $N = 0, 1, \dots$ (см., например, [15, 16]).

Еще нам понадобятся следующие две леммы.

Лемма 1.3. *Если $\{k_m\}_{m=0}^\infty \in W_{\lambda,N}$ и $k_m \neq 0$, $m = 0, 1, \dots$, то $\{k_m^{-1}\}_{m=0}^\infty \in W_{\lambda,N}$. Если $\{k_m\}_{m=0}^\infty \in W_{\lambda,N}$, $\{\ell_m\}_{m=0}^\infty \in W_{\mu,N}$, то $\{k_m \ell_m\}_{m=0}^\infty \in W_{\lambda+\mu,N}$.*

$\lhd$ Доказывается непосредственной проверкой. $\rhd$

Лемма 1.4. *Если $\{k_m\}_{m=0}^\infty \in W_{-\lambda,N}$, где $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$, $\lambda \neq n - 1 + 2k$, $k = 0, 1, 2, \dots$, $N \geqslant [(n+1)/2]$, то оператор отвечающий этому мультипликатору имеет вид*

$$A\varphi = K^\lambda(aI + B)\varphi = K^\lambda\left(a\varphi + \int_{S_{n-1}} k(x \cdot \sigma)\varphi(\sigma)d\sigma\right), \tag{1.15}$$

где $k(t) \in L_1\left([-1,1], (1-t^2)^{\frac{n-3}{2}}\right)$ и $a = \lim\limits_{m\to\infty} m^\lambda k_m$. Если $N > n - 1 + 2\alpha - \mathrm{Re}\,\lambda, 0 < \alpha \leqslant 1$, то оператор отвечающий этому мультипликатору имеет вид:

$$A\varphi = \int_{S_{n-1}} k(x \cdot \sigma)\varphi(\sigma)d\sigma + \sum_{j=0}^{N} c_j K^{\lambda+j}\varphi,$$

в случае $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$ и

$$A\varphi = c_0\varphi + \int_{S_{n-1}} k(x \cdot \sigma)\varphi(\sigma)d\sigma + \sum_{j=1}^{N} c_j K^j\varphi, \tag{1.16}$$

в случае $\lambda = 0$. Здесь $k(t) \in H^\alpha([-1,1])$, $c_0 = \lim\limits_{m\to\infty} m^\lambda k_m$.

$\lhd$ Лемма 1.4 следует из вида мультипликатора по сферическим гармоникам для оператора (0.1):

$$k_m = \frac{\Gamma(m + (n-1-\alpha)/2)}{\Gamma(m + (n-1+\alpha)/2)} \qquad (1.17),$$

известного асимптотического представления для $\Gamma(z+a)/\Gamma(z+b)$ при $z \to \infty$ ([17, c. 20]) и леммы 1.3 (подробнее см. [4], [15]).

Определение 1.4. Пространство $C^\lambda(S_{n-1})$, $\operatorname{Re}\lambda > 0$, — это замыкание пространства $C^\infty(S_{n-1})$ по норме $\|f\|_{C(S_{n-1})} + \|D^\lambda f\|_{C(S_{n-1})}$, где D^λ произвольный оператор сферического дифференцирования (сферический оператор свертки) с мультипликатором класса $W_{\lambda,N}$, $N \geqslant \left[\frac{n+1}{2}\right]$ ($[\cdot]$ — целая часть числа).

Определение 1.5. Пространствами переменной гёльдеровости старших порядков на сфере S_{n-1} назовем пространство

$$H_k^{\lambda(x)}(S_{n-1}) = \Big\{f:\ f(\sigma) \in C^k(S_{n-1});\ A_{D^k f} < \infty,\ k = 1,2,\cdots\Big\},$$

где D^k — сферический оператор дифференцирования с мультипликатором из $W_{k,N}$, $N > n - 1 + 2\lambda_+$.

Определение 1.6. Весовыми пространствами переменной гёльдеровости старших порядков на сфере S_{n-1} назовем пространства

$$H_k^{\lambda(x)}(\rho, S_{n-1}) = \Big\{f:\ \rho D^k f \in H^{\lambda(x)}(S_{n-1}), \lim_{x\to a} \rho D^k f = 0,\ k = 1,2,\dots\Big\},$$

где D^k — сферический оператор дифференцирования с мультипликатором из $W_{k,N}$, $N > n + 1$.

В этих случаях пространство $C^\lambda(H_k^{\lambda(x)})$ с точностью до эквивалентности норм не зависит от выбора оператора D^λ (D^k). Это доказывается с помощью леммы 1.4 и рассуждений аналогичных тем, что проводятся для обобщенных пространств Гёльдера (см. [2, 3]).

Через $H_0^{\lambda(x)}(S_{n-1})$ и $H_0^{\lambda(x)}(\rho, S_{n-1})$ естественно обозначить $H^{\lambda(x)}(S_{n-1})$ и $H^{\lambda(x)}(\rho, S_{n-1})$.

Различные варианты пространств такого типа ранее рассматривались в одномерном случае в работах [8–11, 18–20]. В многомерном случае на сфере ранее рассматривались только различные варианты обобщенных пространств Гёльдера, см. [2–7, 21, 22].

2. Сферические операторы в пространствах $H^{\lambda(x)}(S_{n-1})$

Теорема 2.1. *Пусть $f \in H^{\lambda(x)}(S_{n-1})$ и $0 < \lambda_+$, $\operatorname{Re}\alpha, \lambda_+ + \operatorname{Re}\alpha < 1$. Тогда $K^\alpha f \in H^{\lambda(x)+\operatorname{Re}\alpha}(S_{n-1})$.*

$\lhd$ Вначале приведем одно важное представление для разности $(K^\alpha f)(x) - (K^\alpha f)(y)$. Ясно, что нормировочный множитель $\gamma_{n-1}^{-1}(\alpha)$ войдет при оценках разности мультипликативно в константу в правых частях. По этой причине достаточно рассматривать оператор $K^\alpha f$ без него, что мы и будем предполагать. Кроме того, всюду в дальнейшем будем считать $0 < h < 1/2$ и обозначать $|x - y| = h$. С учетом того, что

$$\int\limits_{S_{n-1}} \frac{d\sigma}{|x-\sigma|^{n-1-\alpha}} = \int\limits_{S_{n-1}} \frac{d\sigma}{|y-\sigma|^{n-1-\alpha}},$$

имеем

$$\begin{aligned}(K^\alpha f)(x) - (K^\alpha f)(y) &= \int\limits_{|x-\sigma|<2h} \frac{f(\sigma)-f(x)}{|x-\sigma|^{n-1-\alpha}}\,d\sigma - \int\limits_{|x-\sigma|<2h} \frac{f(\sigma)-f(x)}{|y-\sigma|^{n-1-\alpha}}\,d\sigma \\ &+ \int\limits_{|x-\sigma|>2h} [f(\sigma)-f(x)]\big(|x-\sigma|^{\alpha-n+1} - |y-\sigma|^{\alpha-n+1}\big)\,d\sigma = I_1 + I_2 + I_3.\end{aligned} \tag{2.1}$$

В (2.1) каждое слагаемое оценивается по отдельности по аналогии с оценками для A_1, A_2, A_4 в нижеследующей теореме для гиперсингулярного интеграла $D^\alpha f$. $\rhd$

Теорема 2.2. *Пусть* $f \in H^{\lambda(x)}(S_{n-1})$, $0 < \lambda_-, \operatorname{Re}\alpha, \lambda_- - \operatorname{Re}\alpha < 1$ *и выполнено условие* (0.6), *тогда* $D^\alpha f \in H^{\lambda(x)-\operatorname{Re}\alpha}(S_{n-1})$.

$\lhd$ Как и в теореме 2.2 используется запись для $D^\alpha f$ без мультипликативной постоянной $\gamma_{n-1}^{-1}(-\alpha)$. Имеем

$$\begin{aligned}(D^\alpha f)(x) - (D^\alpha f)(y) &= \int\limits_{S_{n-1}} \frac{f(\sigma)-f(x)}{|x-\sigma|^{n-1+\alpha}}\,d\sigma - \int\limits_{S_{n-1}} \frac{f(\sigma)-f(y)}{|y-\sigma|^{n-1+\alpha}}\,d\sigma \\ &= A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = \int\limits_{|x-\sigma|<2h} \frac{f(\sigma)-f(x)}{|x-\sigma|^{n-1+\alpha}}\,d\sigma \\ &- \int\limits_{|x-\sigma|<2h} \frac{f(\sigma)-f(y)}{|y-\sigma|^{n-1+\alpha}} d\sigma + [f(x)-f(y)] \int\limits_{|x-\sigma|>2h} \frac{d\sigma}{|\sigma-y|^{n-1+\alpha}} \\ &+ \int\limits_{|x-\sigma|>2h} [f(\sigma)-f(x)]\big(|x-\sigma|^{-\alpha-n+1} - |y-\sigma|^{-\alpha-n+1}\big)\,d\sigma.\end{aligned} \tag{2.2}$$

Для A_1 с учетом (1.4) имеет место оценка

$$|A_1| \leqslant \int\limits_{|x-\sigma|<2h} \frac{|\sigma-x|^{\lambda(x)}}{|x-\sigma|^{n-1+\operatorname{Re}\alpha}} d\sigma \leqslant c\int_0^{2h} t^{\lambda(x)-\operatorname{Re}\alpha-1} dt \leqslant c\frac{h^{\lambda(x)-\operatorname{Re}\alpha}}{\lambda(x)-\operatorname{Re}\alpha}.$$

Так как $\lambda_- - \operatorname{Re}\alpha > 0$, то

$$|A_1| \leqslant ch^{\lambda(x)-\operatorname{Re}\alpha}. \tag{2.3}$$

При оценке A_2 имеем:

$$|A_2| \leqslant c \int\limits_{|y-\sigma|<3h} \frac{|\sigma-y|^{\lambda(y)}}{|\sigma-y|^{n-1+\operatorname{Re}\alpha}} d\sigma \leqslant ch^{\lambda(y)-\operatorname{Re}\alpha}.$$

Здесь мы учли, что $\{\sigma : |x-\sigma| < 2h\} \subset \{\sigma : |\sigma - y| < 3h\}$ и оценку (2.3). Далее при $\lambda(y) - \lambda(x) \geqslant 0$ очевидно, что

$$|A_2| \leqslant ch^{\lambda(x)-\operatorname{Re}\alpha}.$$

При $\lambda(y) - \lambda(x) < 0$ с учетом (0.6) получаем

$$|A_2| \leqslant ch^{\lambda(x)-\operatorname{Re}\alpha} \exp(|\lambda(y)-\lambda(x)||\ln h|^{-1}) \leqslant ch^{\lambda(x)-\operatorname{Re}\alpha}.$$

Для A_3 ввиду оценки (1.6) имеем

$$|A_3| \leqslant ch^{\lambda(x)-\operatorname{Re}\alpha}.$$

При оценке A_4, используя (1.12), находим, что

$$|A_4| \leqslant ch \int\limits_{|x-\sigma|>2h} \frac{|x-\sigma|^{\lambda(x)}}{|x-\sigma|^{n+\operatorname{Re}\alpha}} d\sigma \leqslant ch \int\limits_{2h}^{2} \frac{u^{\lambda(x)}}{u^{2+\operatorname{Re}\alpha}} du. \tag{2.4}$$

Далее, вычисляя интеграл в (2.4), получаем

$$|A_4| \leqslant c\frac{h^{\lambda(x)-\operatorname{Re}\alpha}}{1-\lambda(x)+\operatorname{Re}\alpha} \leqslant ch^{\lambda(x)-\operatorname{Re}\alpha}. \tag{2.5}$$

Собирая полученные оценки, получаем нужное. $\rhd$

Рассмотрим теперь оператор D^α в случае, когда $\alpha = \pm i\theta$ — чисто мнимое, понимая его, как и при $\operatorname{Re}\alpha > 0$, в виде (0.2). Оператор $D^{\pm i\theta}$ обладает свойствами как сферического потенциала, так и гиперсингулярного интеграла.

Для дальнейшего нам понадобится следующая вспомогательная

Лемма 2.1 ([6, 7])**.** *Пусть* $\theta \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$*. Тогда* ($h = |x-y|$)

$$\sup_{h>0}|I(h)| < \infty, \quad I(h) = \int\limits_{|x-\sigma|>2h} \frac{d\sigma}{|y-\sigma|^{n-1+i\theta}}.$$

Теорема 2.3. *Пусть* $f \in H^{\lambda(x)}(S_{n-1})$ *и выполнено условие* (0.6)*, тогда* $\mathcal{D}^{\pm i\theta}f \in H^{\lambda(x)}(S_{n-1})$.

$\lhd$ Здесь также используется представление (2.2) справедливое и при $\alpha = \pm i\theta$ (в силу (0.3)). Далее нужно только проанализировать схему доказательства теоремы 2.2 применительно к этому случаю. Ясно, что оценки для $|A_1|$ и $|A_2|$ сохраняются. При оценке $|A_4|$ мы приходим к оценкам типа (2.4), (2.5) и на этом останавливаемся. Наконец, оценивая A_3, например, для случая $\alpha = i\theta$, имеем $|A_3| \leqslant h^{\lambda(x)}|I(h)|$ и остается воспользоваться леммой 2.1, что приводит к оценке $|A_3| \leqslant ch^{\lambda(x)}$. Объединяя все оценки, получаем требуемое. $\rhd$

3. Сферические операторы в пространствах $H^{\lambda(x)}(\rho, S_{n-1})$

Всюду в дальнейшем будем иметь в виду, что вес $\rho(x) = |x-a|^\mu, \operatorname{Re}\alpha - [\operatorname{Re}\alpha] + \lambda_+ < \mu < n-1+\lambda_-)$. Кроме того, учитывая, что ниже в оценках интегралов по различным частям сферы от одинаковых подынтегральных функций конечные оценки оказываются совпадающими, будем отождествлять все эти оцениваемые интегралы одним пронумерованным символом. Сформулируем теперь теоремы о действии операторов (0.1)–(0.3) в пространствах переменной гёльдеровости. Доказательство, ввиду однотипности, приведем лишь для теоремы 3.3.

Теорема 3.1. *Пусть* $f \in H^{\lambda(x)}(\rho, S_{n-1})$ *и* $0 < \lambda_+$, $\operatorname{Re}\alpha$, $\lambda_+ + \operatorname{Re}\alpha < 1$, $\lambda(a) = \lambda_+$, *тогда*

$$K^\alpha f \in H^{\lambda(x)+\operatorname{Re}\alpha}(\rho, S_{n-1}). \tag{3.1}$$

Теорема 3.2. *Пусть* $f \in H^{\lambda(x)}(\rho, S_{n-1})$, $0 < \lambda_-$, $\operatorname{Re}\alpha$, $\lambda_- - \operatorname{Re}\alpha < 1$, $\lambda(a) = \lambda_+$ *и выполнено условие* (0.6)*, тогда*

$$D^\alpha f \in H^{\lambda(x)-\operatorname{Re}\alpha}(\rho, S_{n-1}). \tag{3.2}$$

Теорема 3.3. *Пусть* $f \in H^{\lambda(x)}(\rho, S_{n-1}), \lambda(a) = \lambda_+$ *и выполнено условие* (0.6)*, тогда*

$$\mathcal{D}^{\pm i\theta} f \in H^{\lambda(x)}(S_{n-1}). \tag{3.3}$$

$\lhd$ В силу (0.3) доказательство достаточно провести для оператора $D^{\pm i\theta}$. Используя обычное обозначение

$$\psi(x) = |x-a|^{\mu} f(x), \quad \operatorname{Re}\alpha - [\operatorname{Re}\alpha] + \lambda_+ < \mu < n-1+\lambda_-, \tag{3.4}$$

имеем

$$\rho(x)(D^{i\theta} f)(x) = (D^{i\theta}\psi)(x) + g(x), \tag{3.5}$$

где

$$g(x) = \int\limits_{S_{n-1}} \frac{|x-a|^{\mu} - |\sigma-a|^{\mu}}{|\sigma-a|^{\mu}|x-\sigma|^{n-1+i\theta}} \psi(\sigma)d\sigma. \tag{3.6}$$

Оценка для первого слагаемого в правой части (1.6) уже получена в безвесовом случае (см. теорему 2.3). Остается оценить разность $g(x)-g(y)$. Используя для удобства обозначение

$$\Delta(x,\sigma) = \frac{|x-a|^{\mu} - |\sigma-a|^{\mu}}{|\sigma-a|^{\mu}|x-\sigma|^{n-1+i\theta}}, \tag{3.7}$$

представим $g(x)-g(y)$ в виде

$$\begin{aligned} g(x)-g(y) = &\int\limits_{|x-\sigma|<2h} \Delta(x,\sigma)\psi(\sigma)d\sigma - \int\limits_{|x-\sigma|<2h} \Delta(y,\sigma)\psi(\sigma)d\sigma \\ &+ \int\limits_{|x-\sigma|>2h} \{\Delta(x,\sigma)-\Delta(y,\sigma)\}\psi(\sigma)d\sigma = I_1+I_2+I_3. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Далее необходимо оценить каждое слагаемое в (3.8). Это удается сделать за счет специальных разбиений сферы.

а) Случай $1 \leqslant \mu < n-1$. С учетом (1.7) и (1.14) имеем

$$|\Delta(x,\sigma)| \leqslant c \begin{cases} \frac{1}{|\sigma-a||x-\sigma|^{n-2}}, & |x-\sigma| \leqslant |\sigma-a|; \\ \frac{1}{|\sigma-a|^{n-1}}, & |x-\sigma| > |\sigma-a|, \end{cases} \tag{3.9}$$

так что оценка в правой части (3.9) не зависит от μ.

Для I_1 с учетом (3.9) при $|x-\sigma| \leqslant |\sigma-a|$, (1.4) и $\lambda(a)=\lambda_+$ имеем

$$|I_1| \leqslant c \int\limits_{\substack{|x-\sigma|<2h \\ |x-\sigma|<|\sigma-a|}} \frac{|\sigma-a|^{\lambda(a)}}{|\sigma-a||x-\sigma|^{n-2}} d\sigma \leqslant c\int\limits_0^h \frac{t^{\lambda(a)}}{t}dt \leqslant ch^{\lambda(a)} \leqslant ch^{\lambda(x)}.$$

Если $|x-\sigma| > |\sigma-a|$, то из второго неравенства (3.9) с учетом $\{|\sigma-a| < |\sigma-x| < 2h\} \subset \{|\sigma-a| < 2h\}$, (1.4) и $\lambda(a)=\lambda_+$ получаем

$$|I_1| \leqslant c \int\limits_{|\sigma-a|<2h} \frac{|\sigma-a|^{\lambda(a)}}{|\sigma-a|^{n-1}} d\sigma \leqslant c\int\limits_0^h \frac{t^{\lambda(a)}}{t}dt \leqslant ch^{\lambda(a)} \leqslant ch^{\lambda(x)}.$$

Таким образом,

$$|I_1| \leqslant ch^{\lambda(x)}. \tag{3.10}$$

Аналогично оценивается интеграл I_2. Перейдем к оценке I_3.

Прежде всего оценим $|\Delta(x,\sigma)-\Delta(y,\sigma)|$. С использованием неравенств (1.7), (1.10), (1.12), простых оценок $|x-a|\leqslant|x-\sigma|+|\sigma-a|$ и $|y-\sigma|\leqslant h+|x-\sigma|$ и предположения $|y-a|<|x-a|$, найдем

$$|\Delta(x,\sigma)-\Delta(y,\sigma)|\leqslant\frac{ch}{|\sigma-a||x-\sigma|^{n-1}}+\frac{ch}{|\sigma-a|^{\mu}|x-\sigma|^{n-\mu}}. \tag{3.11}$$

Последнее более удобно переписать по аналогии с (3.9):

$$|\Delta(x,\sigma)-\Delta(y,\sigma)|\leqslant ch\begin{cases}\frac{1}{|\sigma-a||x-\sigma|^{n-1}}, & |x-\sigma|\leqslant|\sigma-a|;\\ \frac{1}{|\sigma-a|^{\mu}|x-\sigma|^{n-\mu}}, & |x-\sigma|>|\sigma-a|.\end{cases} \tag{3.12}$$

Для I_3 при $|x-\sigma|<|\sigma-a|$ из первого неравенства (3.12) с учетом (1.4) имеем

$$|I_3|\leqslant ch\int\limits_{|x-\sigma|>2h}\frac{|x-\sigma|^{\lambda(x)}}{|x-\sigma|^{n}}\,d\sigma\leqslant ch\int\limits_{h}^{2}\frac{u^{\lambda(x)}}{u^2}\,du\leqslant ch^{\lambda(x)}. \tag{3.13}$$

Если же $|x-\sigma|>|\sigma-a|$, то рассматриваем две возможности $|x-\sigma|>|\sigma-a|>2h$ и $|x-\sigma|>2h>|\sigma-a|$. Вновь на основе (3.12) имеем

$$|I_3|\leqslant ch\int\limits_{|a-\sigma|>2h}\frac{|\sigma-a|^{\lambda(a)}}{|\sigma-a|^{n}}d\sigma+ch^{\mu-n+1+\lambda(a)}\times\int\limits_{|\sigma-a|<2h}\frac{d\sigma}{|\sigma-a|^{\mu}}. \tag{3.14}$$

Отсюда с учетом (1.4) и условий $\lambda(a)=\lambda_+,\ \mu<n-1$ легко приходим к оценке в правой части (3.13).

Объединение оценок для I_1, I_2 и I_3 дает (3.3) при $1\leqslant\mu<n-1$.

б) Случай $0<\mu\leqslant1$. В этом случае с учетом (1.7)–(1.8) для $|\Delta(x,\sigma)|$ имеем оценку

$$|\Delta(x,\sigma)|\leqslant\frac{c}{|\sigma-a||x-\sigma|^{n-2}}$$

и нетрудно видеть, что правая часть этой оценки совпадает с правой частью в оценке (3.9) при $|x-\sigma|<|a-\sigma|$ и оценивается тем же выражением $c|\sigma-a|^{1-n}$, что было и в случае (3.9) при $|x-\sigma|>|a-\sigma|$. Следовательно, оценки $|I_1|$ и $|I_2|$ сохраняются. Чтобы оценить $|I_3|$, заметим, что с учетом (1.7), (1.8) и (1.12) легко показать, что

$$|\Delta(x,\sigma)-\Delta(y,\sigma)|\leqslant\frac{ch^{\mu}}{|\sigma-a||x-\sigma|^{n-2+\mu}}. \tag{3.15}$$

При $|x-\sigma|<|a-\sigma|$ с учетом (1.4) из (3.15) получаем

$$|I_3|\leqslant ch^{\mu}\int\limits_{|x-\sigma|>2h}\frac{|x-\sigma|^{\lambda(x)}}{|x-\sigma|^{n-1+\mu}}\,d\sigma\leqslant ch^{\mu}\int\limits_{h}^{2}\frac{t^{\lambda(x)}}{t^{1+\mu}}\,dt\leqslant ch^{\lambda(x)}. \tag{3.16}$$

Если $|x-\sigma|>|\sigma-a|$, то при $|x-\sigma|>|\sigma-a|>2h$, и вновь учитывая (1.4), имеем как и в (3.16):

$$|I_3|\leqslant ch^{\mu}\int\limits_{|x-\sigma|>|a-\sigma|>2h}\frac{|\sigma-a|^{\lambda(a)}}{|\sigma-a|^{n-1+\mu}}d\sigma\leqslant ch^{\mu}\int\limits_{h}^{2}\frac{t^{\lambda(a)}}{t^{1+\mu}}dt\leqslant ch^{\lambda(x)}.$$

Наконец, если $|x-\sigma| > 2h > |\sigma-a|$, то правая часть в (3.15) оценивается как $ch^{2-n}|\sigma-a|^{-1}$ и мы получаем

$$|I_3| \leqslant ch^{2-n} \int\limits_{|a-\sigma|<2h} \frac{|\sigma-a|^{\lambda(a)}}{|\sigma-a|}\, d\sigma \leqslant ch^{\lambda(x)}. \tag{3.17}$$

Собирая полученные при $0 < \mu \leqslant 1$ оценки, приходим к (3.3).

Рассмотрим теперь случай «больших» μ ($\mu \geqslant n-1$). В этом случае для сферического гиперсингулярного оператора $D^{i\theta}$ ($\theta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$) справедлива оценка

$$|g(x)-g(y)| \leqslant c \left(h^{\mu-n+1} \int\limits_0^h \frac{t^{\lambda(x)}}{t^{\mu-n+2}}\, dt + h \int\limits_h^2 \frac{t^{\lambda(x)}}{t^2}\, dt \right). \tag{3.18}$$

Поэтому условие $\mu < n-1+\lambda_-$ обеспечивает сходимость первого интеграла. В результате получаем нужное. $\rhd$

В заключение отметим весьма важное дополнение к теоремам этого параграфа, которое необходимо при рассмотрении вопроса об изоморфизме.

Теорема 3.4. *Пусть $\rho(x) = |x-a|^\mu$ и пусть $\rho(x)f(x) \in C(S_{n-1})$, причем $(\rho f)(a) = 0$. В условиях теорем настоящего параграфа оценки для сферических потенциалов (сферических гиперсингулярных интегралов) могут быть дополнены утверждением $\lim\limits_{x\to a}(\rho K^\alpha f)(x) = 0$ ($\lim\limits_{x\to a}(\rho D^\alpha f)(x) = 0$, соответственно).*

$\lhd$ Доказательство теоремы рассмотрим на примере теоремы 3.3 в чисто мнимом случае. Покажем, что $\lim\limits_{x\to a}(\rho D^{i\theta} f)(x) = 0$, при этом можно даже считать, что $\rho(x)f(x) \in L_\infty(S_{n-1})$. Это следует из того, что интегралы определяемые функциями, стоящими в правой части равенства (3.5) абсолютно сходятся. Поэтому функция в левой части (3.5) непрерывна и непосредственная подстановка $x = a$ дает $(\rho D^{i\theta} f)(a) = 0$, что и требовалось. $\rhd$

Интересно отметить, что в некоторых случаях вывод теоремы 3.4 может быть сделан и без предположения вида $(\rho f)(a) = 0$. Приведем одно из подобных утверждений для сферического оператора типа потенциала.

Теорема 3.5. *Пусть $\rho(x) = |x-a|^\mu$, $0 < \mu < n-1, 0 < \operatorname{Re}\alpha < 1$ и $\rho(x)f(x) \in C(S_{n-1})$. Тогда $\lim\limits_{x\to a}(\rho K^\alpha f)(x) = 0$.*

Доказательство теоремы 3.5 предварим следующей леммой (см. [7]).

Лемма 3.2. *Пусть $\xi < n-1$, $\eta < n-1, \lambda \in \mathbb{R}$. Тогда*

$$\int\limits_{S_{n-1}} \frac{(|x-\sigma|+|y-\sigma|)^\lambda}{|x-\sigma|^\xi |y-\sigma|^\eta} d\sigma \leqslant c \begin{cases} |x-y|^{-(\xi+\eta-\lambda-n+1)}, & \xi+\eta-\lambda > n-1, \\ \ln\frac{2}{|x-y|}, & \xi+\eta-\lambda = n-1, \\ 1, & \xi+\eta-\lambda < n-1, \end{cases} \tag{3.19}$$

$$\int\limits_{S_{n-1}} \frac{(|x-\sigma|+|y-\sigma|)^\lambda}{|x-\sigma|^\xi |y-\sigma|^\eta} d\sigma \geqslant c_1 \begin{cases} |x-y|^{-(\xi+\eta-\lambda-n+1)}, & \xi+\eta-\lambda > n-1, \\ \ln\frac{2}{|x-y|}, & \xi+\eta-\lambda = n-1, \\ 1, & \xi+\eta-\lambda < n-1. \end{cases}$$

$\lhd$ Доказательство теоремы 3.5. Воспользуемся оценкой (3.19). Из нее следует, что $|(\rho K^\alpha f)(x)| \leqslant c\|\rho f\|_{C(S_{n-1})}|x-a|^{\min(\mu,\operatorname{Re}\alpha)-\varepsilon}$ с произвольным $\varepsilon > 0$, что и завершает доказательство. $\rhd$

4. Изоморфизм пространств переменной гёльдеровости

Здесь сформулируем основные результаты.

Теорема 4.1. *Пусть* $f \in H_k^{\lambda(x)}(S_{n-1})$ *и* $\operatorname{Re}\alpha > 0, \lambda_+ + \{\operatorname{Re}\alpha\} < 1$ *и выполнено условие* (0.6). *Тогда* K^α *осуществляет изоморфизм между пространствами* $H_k^{\lambda(x)}(S_{n-1})$ *и* $H_{k+[\operatorname{Re}\alpha]}^{\lambda(x)+\{\operatorname{Re}\alpha\}}(S_{n-1})$, *а оператор* $\mathcal{D}^{\pm i\theta}$ *сохраняет пространство* $H_k^{\lambda(x)}(S_{n-1})$, *т. е. справедливы представления* (0.5).

$\lhd$ Пусть $0 < \operatorname{Re}\alpha < 1, k = 0$. Первое утверждение теоремы 4.1 следует из теорем 2.1, 2.2, представления (0.7) и вложений $H^{\lambda_+}(S_{n-1}) \subset H^{\lambda(x)}(S_{n-1}) \subset H^{\lambda_-}(S_{n-1})$, а второе — из теоремы 2.3 и представления (0.8).

Случай $\operatorname{Re}\alpha \geqslant 1$, $k \geqslant 1$ сводится к случаю $0 < \operatorname{Re}\alpha < 1, k = 0$ путем выбора $D^{[\operatorname{Re}\alpha]}$: $D^{[\operatorname{Re}\alpha]}K^\alpha = K^{\alpha-[\operatorname{Re}\alpha]}$. $\rhd$

Теорема 4.2. *Пусть оператор* A^α *имеет мультипликатор* $\{k_m\}_{m=0}^\infty$. *Если* $\{k_m\}_{m=0}^\infty \in W_{-\alpha,N}$, $\operatorname{Re}\alpha > 0$, $N > n-1+2\lambda_+, k_m \neq 0, m = 0,1,\ldots, \alpha \neq n-1, n+1, \ldots, \lambda_+ + \{\operatorname{Re}\alpha\} < 1$ *и выполнено условие* (0.6). *Тогда*

$$A^\alpha(H_k^{\lambda(x)}(S_{n-1})) = H_{k+[\operatorname{Re}\alpha]}^{\lambda(x)+\operatorname{Re}\alpha}(S_{n-1}).$$

$\lhd$ Здесь также достаточно рассмотреть случай $k = 0$ и $0 < \operatorname{Re}\alpha < 1$, так как случай $\operatorname{Re}\alpha \geqslant 1$, $k \geqslant 1$ получается за счет выбора $D^{[\operatorname{Re}\alpha]}$: $D^{[\operatorname{Re}\alpha]}A^\alpha = A^{\alpha-[\operatorname{Re}\alpha]}$. Для оператора A^α в силу (1.16) из леммы 1.4 справедливо представление

$$A^\alpha = K^\alpha(cI + B).$$

Так как оператор B имеет структуру

$$B = \int\limits_{S_{n-1}} k(x\cdot\sigma)\varphi(\sigma)d\sigma + \sum_{j=1}^{N} c_j K^j \varphi,$$

где $k(t) \in H^{\lambda_+}([-1,1])$, а K^j — потенциалы целого порядка j, то, очевидно, что оператор $(cI + B)$ обратим, сохраняет переменную гёльдеровость и поэтому в силу теоремы 2.4 и изоморфизма (0.4) мы получаем нужное. $\rhd$

Справедливы также аналогичные весовые теоремы.

Теорема 4.3. *Пусть* $f \in H_k^{\lambda(x)}(\rho, S_{n-1})$ *и* $\operatorname{Re}\alpha > 0$, $\lambda_+ + \{\operatorname{Re}\alpha\} < 1$, $\lambda(a) = \lambda_+$ *и выполнено условие* (0.6). *Тогда* K^α *осуществляет изоморфизм между пространствами* $H_k^{\lambda(x)}(\rho, S_{n-1})$ *и* $H_{k+[\operatorname{Re}\alpha]}^{\lambda(x)+\{\operatorname{Re}\alpha\}}(\rho, S_{n-1})$, *а оператор* $\mathcal{D}^{\pm i\theta}$ *сохраняет пространство* $H_k^{\lambda(x)}(\rho, S_{n-1})$, *т. е. справедливы представления* (0.5).

$\lhd$ Пусть $0 < \operatorname{Re}\alpha < 1, k = 0$. Первое утверждение теоремы 4.3 следует из теорем 3.1, 3.2, представления аналогичного (0.7) для весового случая и вложений $H^{\lambda_+}(\rho, S_{n-1}) \subset H^{\lambda(x)}(\rho, S_{n-1}) \subset H^{\lambda_-}(\rho, S_{n-1})$, а второе из теоремы 3.3 и представления аналогичного (0.8) для весового случая.

Случай $\operatorname{Re}\alpha \geqslant 1, k \geqslant 1$ сводится к случаю $0 < \operatorname{Re}\alpha < 1, k = 0$ за счет выбора $D^{[\operatorname{Re}\alpha]}$: $D^{[\operatorname{Re}\alpha]}K^\alpha = K^{\alpha-[\operatorname{Re}\alpha]}$. $\rhd$

Теорема 4.4. *Пусть оператор* A^α *имеет мультипликатор* $\{k_m\}_{m=0}^\infty$. *Если* $\{k_m\}_{m=0}^\infty \in W_{-\alpha,N}$, $\operatorname{Re}\alpha > 0$, $N > n+1, k_m \neq 0$ *при* $m = 0,1,\ldots, \alpha \neq n-1, n+1, \ldots, \lambda_+ + \{\operatorname{Re}\alpha\} < 1$, $\lambda(a) = \lambda_+$ *и выполнено условие* (0.6), *то*

$$A^\alpha(H_k^{\lambda(x)}(\rho, S_{n-1})) = H_{k+[\operatorname{Re}\alpha]}^{\lambda(x)+\operatorname{Re}\alpha}(\rho, S_{n-1}).$$

◁ Здесь также достаточно рассмотреть случай $k = 0$ и $0 < \operatorname{Re}\alpha < 1$, так как случай $\operatorname{Re}\alpha \geqslant 1, k \geqslant 1$ получается за счет выбора $D^{[\operatorname{Re}\alpha]}$: $D^{[\operatorname{Re}\alpha]}A^\alpha = A^{\alpha-[\operatorname{Re}\alpha]}$. Для оператора A^α в силу (1.16) и леммы 1.4 справедливо представление

$$A^\alpha = K^\alpha(cI + B).$$

Так как оператор B имеет структуру

$$B = \int\limits_{S_{n-1}} k(x\cdot\sigma)\varphi(\sigma)d\sigma + \sum_{j=1}^{N} c_j K^j\varphi,$$

где $k(t) \in C^1([-1,1])$, а K^j — потенциалы целого порядка j, то, очевидно, что оператор $(cI+B)$ обратим, сохраняет переменную гёльдеровость с весом и поэтому в силу теоремы 3.4 и изоморфизма (0.5) мы получаем нужное. ▷

Замечание. Утверждения теорем 4.2, 4.4 означают существование и единственность решения многомерного интегрального уравнения первого рода, порождаемого оператором A^α, в пространствах гёльдеровских функций переменного порядка.

К операторам, удовлетворяющим условиям теоремы 2.5, относится ряд известных операторов сферической свертки, см. например [12, 14–16]:

$$(K_1^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^1 (1-r)^{\alpha-1}P_r f(t)dr, \quad \operatorname{Re}\alpha > 0,$$

$$(K_2^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^1 \left(\ln\frac{1}{r}\right)^{\alpha-1} P_r f(t)dr, \quad \operatorname{Re}\alpha > 0,$$

где

$$P_r f(x) = \frac{1}{c_n}\int\limits_{S_{n-1}} \frac{(1-r^2)}{|rx'-\sigma|^n} f(\sigma)d\sigma, \quad x' = \frac{x}{|x|},\ r = |x|,\ x\in\mathbb{R}^n,$$

а c_n — хорошо известная нормировочная постоянная для оператора Пуассона,

$$(K_3^\alpha f)(x) = \int\limits_{S_{n-1}} \chi_{n-\alpha}\left(\frac{1+x\cdot\sigma}{2}\right) f(\sigma)d\sigma,$$

где

$$\chi_\beta(z) = \sum_{j=2}^{\infty}\frac{(\beta)_j z^j}{((\beta+1)/2)_j j}, \quad 0\leqslant z\leqslant 1,\ (\beta)_j = \beta(\beta+1)\dots(\beta+j-1),$$

с мультипликаторами по сферическим гармоникам

$$k_m^1 = \frac{1}{(m+1)^\alpha}, \quad k_m^2 = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+1+\alpha)}, \quad k_m^3 = \frac{\Gamma((m+n-\alpha)/2)\Gamma(m/2)}{\Gamma((m+\alpha)/2)\Gamma((m+n)/2)}$$

соответственно.

Рассмотрим также двуполюсный потенциал

$$(K^\alpha f)(x) = c\int_{S_{n-1}} \frac{f(\sigma)}{|x-\sigma|^{n-1-\alpha}|x+\sigma|^{n-1-\alpha}}\,d\sigma, \quad x\in S_{n-1},$$

где $n \geqslant 3$, $\operatorname{Re}\alpha > 0$ и c — некоторая нормировочная постоянная, имеющий мультипликатор по сферическим гармоникам (см. [23]):

$$k_m = c2^{\alpha-n+1}|S_{n-2}|(-1)^m\sqrt{\pi}\frac{\Gamma(\frac{\alpha}{2})}{\Gamma(\frac{\alpha+1}{2})}{}_3F_2\left(-m, m+n-2, \frac{\alpha}{2}, \alpha, \frac{n-1}{2}; 1\right),$$

откуда после несложных преобразований получаем

$$k_m = c_1\left[1+(-1)^m\right]\frac{\Gamma(\frac{m+1}{2})\Gamma(\frac{m-\alpha+n-1}{2})}{\Gamma(\frac{m+n-1}{2})\Gamma(\frac{1+m+\alpha}{2})} \sim dm^{-\alpha}, \quad m \to \infty, \tag{4.1}$$

где $c_1 = c2^{\alpha-n}|S_{n-2}|\pi^{-1}\Gamma(\frac{n-1}{2})\Gamma(\frac{\alpha}{2})\Gamma(\frac{\alpha+3-n}{2})\sin\frac{(n-\alpha-1)\pi}{2}$.

Обозначим $A = \frac{1}{2}(I+Q)$, где Q оператор отражения на сфере, действующий по правилу $(Qf)(x) = f(-x)$. Ясно, что оператор A имеет мультипликатор вида $k_m = 0$, если m нечетное и $k_m = 1$, если m четное.

Лемма 4.1. *Пусть* $\operatorname{Re}\alpha > 0, \alpha \neq n-1, n+1, \ldots$ *Тогда*

$$\mathbf{K}^\alpha = A(c_2 I + B_1)K^\alpha, \tag{4.2}$$

где c_2 — некоторая константа, порождаемая асимптотическим разложением мультипликатора оператора K^α, а оператор B_1 сохраняет переменную гёльдеровость.

$\lhd$ Доказательство (4.2) вытекает из представления (4.1) для мультипликатора $\mathbf{K}^\alpha$, известного асимптотического представления для $\frac{\Gamma(z+a)}{\Gamma(z+b)}$ (см. [17, с. 20]) и леммы 1.4 (подробнее см. также [4]). $\rhd$

Теорема 4.5. *Пусть* $f \in H_k^{\lambda(x)}(\rho, S_{n-1})$, $\operatorname{Re}\alpha > 0, \lambda_+ + \{\operatorname{Re}\alpha\} < 1, \lambda(a) = \lambda_+$, *тогда справедливо вложение*

$$\mathbf{K}^\alpha(H_k^{\lambda(x)}(\rho, S_{n-1})) \to H_{k+[\operatorname{Re}\alpha]}^{\lambda(x)+\{\operatorname{Re}\alpha\}}(\rho, S_{n-1}). \tag{4.3}$$

$\lhd$ Утверждение теоремы следует из представления (4.2), теоремы 4.4 и того факта, что операторы A и B_1 сохраняют, в силу леммы 4.1, переменную гёльдеровость. $\rhd$

Замечание. Очевидно, что оператор $\mathbf{K}^\alpha$ не удовлетворяет одному из условий теоремы 4.4, а именно тому, что $k_m \neq 0, m = 0, 1, \ldots$, поэтому вместо изоморфизма мы имеем одностороннее вложение (4.3). Однако, если рассматривать только четные функции, то для них соответствующий изоморфизм имеет место при условии (0.6). $\rhd$

Литература

1. *Павлов П. М., Самко С. Г.* Описание пространств $L_p^\alpha(S_{n-1})$ в терминах гиперсингулярных интегралов // Докл. АН СССР.—1984.—Т. 276, № 3.—С. 546–550.
2. *Вакулов Б. Г.* Операторы типа потенциала на сфере в обобщенных классах Гёльдера // Изв. вузов. Математика.—1986.—№ 11.—С. 66–69.
3. *Вакулов Б. Г.* Операторы типа потенциала на сфере в обобщенных пространствах Гёльдера.— Ростов-на-Дону: Ростовский университет, 1986. Деп. в ВИНИТИ 06.05.86, № 1563-В.
4. *Вакулов Б. Г.* Сферические операторы типа потенциала в обобщенных пространствах Гёльдера с весом на сфере // Изв. вузов. Сев. Кавк. регион. Естеств. науки.—1999.—№ 4.—С. 5–10.
5. *Вакулов Б. Г., Карапетянц Н. К., Шанкишвили Л. Д.* Сферические потенциалы комплексного порядка в обобщенных пространствах Гёльдера с весом // Докл. РАН. Математика.—2002.—Т. 382, № 3.—С. 1–4.
6. *Vakulov B. G., Karapetians N. K., Shankishvili L. D.* Spherical hypersingular operators of imaginary order and their multipliers // Frac. Calculus and Appl. Analysis.—2001.—V. 4, №. 1.—P. 101–112.

7. *Vakulov B. G., Karapetians N. K., Shankishvili L. D.* Spherical potentials of complex order in generalized Hölder spaces // Izvestiya NAN Armenii.—2001.—V. 36, № 2.—P. 54–78.
8. *Гинзбург А. И., Карапетянц Н. К.* Дробное интегродифференцирование в гёльдеровских классах переменного порядка // Докл. РАН. Математика.—1994.—Т. 339, № 4.—С. 439–441.
9. *Karapetians N. K., Ginzburg A. I.* Fractional integrals and singular integrals in the Hölder classes of variable order // Integral Transforms and Special Functions.—1994.—V. 2, № 2.—P. 91–106.
10. *Ross B., Samko S.* Fractional integration operator of variable order in the Hölder spaces $H^{\lambda(x)}$ // Intern. J. Math. & Math. Sci.—1995.—V. 18, № 4.—P. 777–788.
11. *Гинзбург А. И., Карапетянц Н. К.* Дробные интегралы в весовых пространствах гёльдеровских функций переменного порядка // В сб.: Интегро-дифференциальнные операторы и их приложения. Вып. 2.—Ростов-на-Дону: Изд-во ДГТУ.—1997.—С. 94–98.
12. *Самко С. Г.* Сингулярные интегралы по сфере и построение характеристики по символу // Изв. вузов. Математика.—1983.—№ 4.—С. 28–42.
13. *Самко С. Г.* Гиперсингулярные интегралы и их приложения.—Ростов-на-Дону: Изд-во РГУ.—1984, 208 с.
14. *Samko S. G.* Hypersingular Integrals and their Applications. Series «Analytical Methods and Special Functions».—London–New-York: Taylor & Francis.—2002.—V. 5.—358+ xvii p.
15. *Samko S. G., Vakulov B. G.* On equivalent norms in fractional order functions spaces of continuous functions on the unit sphere // Fract. Calculus and Appl. Analysis.—2000.—V. 3, № 4.—P. 401–433.
16. *Вакулов Б. Г.* Об эквивалентных нормировках в пространствах функций комплексной гладкости на сфере // Тр. ин-та мат. НАН Беларуси.—2001.—Т. 9.—С. 41–44.
17. *Люк Ю.* Специальные математические функции их аппроксимации.—М.: Мир, 1980.—606 с.
18. *Daodi K., Levy Vehel J., Meyer Y.* Construction of continuous functions with prescribed local regularity // Constructive Approximation.—1998.—V. 14, № 3.—P. 349–385.
19. *Мамедханов Д. И., Нерсесян А. А.* О конструктивной характеристике класса $H_{\alpha}^{\lambda+\alpha}(x_0, [-\pi, \pi])$ // В сб.: Исслед. по теории линейных операторов.—Баку.—1987.—С. 74–78.
20. *Плещинский Н. Б.* О построении функций, удовлетворяющих условию Гёльдера с заданным показателем // Изв. вузов. Математика.—1984.—№ 8.—С. 74–77.
21. *Никольский С. М., Лизоркин П. И.* Приближение сферическими полиномами // Тр. МИАН СССР.—1984.—Т. 166.—С. 186–200.
22. *Никольский С. М., Лизоркин П. И.* Оценки для производных гармонических многочленов и сферических полиномов в L_p // Acta. Sci. Math.—1985.—Т. 48.—С. 406–416.
23. *Вакулов Б. Г., Карапетянц Н. К.* Операторы типа потенциала на сфере с особенностями на полюсах // Докл. РАН. Математика.—2003.—Т. 392, № 2.—С. 151–154.

Статья поступила 12 ноября 2004 г.

Вакулов Борис Григорьевич, к. ф.-м. н.
г. Ростов-на-Дону, Ростовский государственный университет
E-mail: vakulov@ns.math.rsu.ru