Владикавказский математический журнал
Апрель–июнь, 2005, Том 7, Выпуск 2

УДК **517.9+517.5**

ОБ ОДНОМ ПРИМЕНЕНИИ СЛАБО ДОСТАТОЧНЫХ МНОЖЕСТВ

А. В. Абанин

Академику С. М. Никольскому
к его столетнему юбилею

Приводится применение теории слабо достаточных множеств к задаче об эпиморфности операторов типа свертки.

Важную роль в теории нормально разрешимых операторов и ее приложениях сыграла работа С. М. Никольского [1], которая впоследствии получила дальнейшее развитие в различных направлениях в исследованиях многих математиков (см. краткий обзор Ю. Ф. Коробейника [2] в этом номере ВМЖ). В настоящей статье будет представлено применение теории слабо достаточных множеств к вопросу о нормальной разрешимости оператора умножения в весовых пространствах целых функций и двойственной задаче об эпиморфности оператора типа свертки.

Пусть H_j, где $j = 1, 2$, — рефлексивные пространства Фреше с топологиями, задаваемыми наборами преднорм $(|\cdot|_{n,j})_{n=1}^{\infty}$, которые мы, не ограничивая общности, будем считать неубывающими по n. Предположим, что в $H_1 \bigcap H_2$ имеется такая система ненулевых элементов $\mathcal{E}(\mathbb{C}) := \{e(\lambda) : \lambda \in \mathbb{C}\}$, что $\ln |e(\lambda)|_{n,j}$ — локально ограниченные в $\mathbb{C}$ функции ($n \in \mathbb{N}$; $j = 1, 2$), и что обобщенное преобразование Лапласа $\mathcal{F} : F \in H_j' \longmapsto F(e(\lambda))$ является топологическим изоморфизмом сильного сопряженного к H_j пространства на весовое пространство целых функций $E_j = \operatorname*{ind}_n E_{n,j}$, где

$$E_{n,j} := \left\{ f \in H(\mathbb{C}) : \ \|f\|_{n,j} := \sup_{\lambda\in\mathbb{C}} \frac{|f(\lambda)|}{|e(\lambda)|_{n,j}} < \infty \right\}$$

— банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_{n,j}$ ($n \in \mathbb{N}$; $j = 1, 2$). Обозначим через $M(E_2, E_1)$ класс всех мультипликаторов из E_2 в E_1, т. е. тех целых функций μ, для которых $\mu f \in E_1$ при всех $f \in E_2$. Отметим, что структура классов мультипликаторов различных весовых пространств целых функций изучалась ранее Ю. Ф. Коробейником и автором (см., например, [3] и [4]). Предположим, что класс $M(E_2, E_1)$ нетривиален, зафиксируем $\mu(\lambda) \not\equiv 0$ из $M(E_2, E_1)$ и рассмотрим оператор умножения $M_\mu : f \longmapsto \mu f$. Из теоремы о замкнутом графике следует, что M_μ действует из E_2 в E_1 непрерывно. Поэтому сопряженный к M_μ оператор T_μ, который мы, следуя А. Мартино, будем называть оператором свертки, является линейным непрерывным оператором из H_1 в H_2. Из определения сопряженного оператора и наших предположений вытекает, что $T_\mu(e(\lambda)) = \mu(\lambda)e(\lambda)$ при всех $\lambda \in \mathbb{C}$.

Наша цель — при некоторых дополнительных ограничениях дать в терминах слабо достаточных множеств близкое к точному описание тех мультипликаторов μ, для которых оператор $T_\mu : H_1 \to H_2$ сюръективен. Отметим, что в силу общей теории двойственности сюръективность $T_\mu : H_1 \to H_2$ эквивалентна нормальной разрешимости оператора умножения $M_\mu : E_2 \to E_1$.

Напомним понятие слабо достаточного множества, введенное Д. М. Шнайдером в [5]. Пусть $\Phi = (\varphi_n)_{n=1}^\infty$ — последовательность локально ограниченных в $\mathbb{C}$ функций. Ассоциируем с Φ банаховы пространства целых функций

$$E(\varphi_n) := \left\{ f \in H(\mathbb{C}) : \ \|f\|_n := \sup_{\lambda\in\mathbb{C}} \frac{|f(\lambda)|}{\exp\varphi_n(\lambda)} < \infty \right\}, \quad n \in \mathbb{N},$$

и введем в рассмотрение векторное пространство $E(\Phi) := \bigcup_{n=1}^\infty E(\varphi_n)$. Для произвольного подмножества S в $\mathbb{C}$ определим полунормированные пространства

$$E(\varphi_n; S) := \left\{ f \in E(\Phi) : \ \|f\|_{n,S} := \sup_{\lambda\in S} \frac{|f(\lambda)|}{\exp\varphi_n(\lambda)} < \infty \right\}, \quad n \in \mathbb{N},$$

и обозначим через τ_S топологию внутреннего индуктивного предела $\operatorname{ind}_n E(\varphi_n; S)$ в $E(\Phi)$. Всегда τ_S мажорируется топологией $\tau_\mathbb{C}$. В случае, когда τ_S совпадает с $\tau_\mathbb{C}$, множество S называется *слабо достаточным* для $E(\Phi)$.

Положим $\varphi_{n,j}(\lambda) := \ln|e(\lambda)|_{n,j}$ и $\Phi_j := (\varphi_{n,j})_{n=1}^\infty$, где $\lambda \in \mathbb{C}$, $j = 1, 2$. Тогда введенные выше пространства E_j не что иное, как $E(\Phi_j)$, $j = 1, 2$. Далее, назовем замкнутое множество V на плоскости (Φ_1, Φ_2)-*исключительным множеством функции* μ, если

$$(\forall n)(\exists m)(\exists R > 0)(\forall\lambda \in \mathbb{C}\setminus V)\ \big(|\lambda| > R \Rightarrow \ln|\mu(\lambda)| \geqslant \varphi_{n,1}(\lambda) - \varphi_{m,2}(\lambda) - R\big).$$

Предложение 1. *Если для функции μ существует такое (Φ_1, Φ_2)-исключительное множество V, что $\mathbb{C}\setminus V$ слабо достаточно для E_2 $(= E(\Phi_2))$, то оператор свертки T_μ — эпиморфизм H_1 на H_2, или, что равносильно, M_μ — нормально разрешимый оператор из E_2 в E_1.*

$\lhd$ В соответствии с теоремой о дискретизации слабо достаточных множеств, установленной О. В. Епифановым в [6], $\mathbb{C}\setminus V$ содержит последовательность $\Lambda = (\lambda_k)_{k=1}^\infty$ с единственной предельной точкой на бесконечности, которая образует слабо достаточное для E_2 множество. Тогда по теореме K из [7] система $\mathcal{E}(\Lambda) := (e(\lambda_k))_{k=1}^\infty$ является абсолютно представляющей в H_2, т. е. каждый элемент y из H_2 разлагается в абсолютно сходящийся в H_2 ряд $y = \sum_{k=1}^\infty c_k e(\lambda_k)$ (здесь $c_k = c_k(y)$ — комплексные числа, определяемые по y, возможно, неоднозначно; по поводу общего понятия абсолютно представляющих систем в локально выпуклых пространствах и основных свойств таких систем см. обзорную статью Ю. Ф. Коробейника [8]). Так как по условию V является (Φ_1, Φ_2)-исключительным множеством функции μ, то для любого n существуют m, $R > 0$ и $N \in \mathbb{N}$ такие, что для $k > N$

$$\left|\frac{c_k}{\mu(\lambda_k)}\right| |e(\lambda_k)|_{n,1} \leqslant e^R |c_k| \exp\big(\varphi_{m,2}(\lambda_k) - \varphi_{n,1}(\lambda_k)\big) |e(\lambda_k)|_{n,1} = e^R |c_k| |e(\lambda_k)|_{m,2},$$

где N выбрано настолько большим, что $|\lambda_k| > R$ при $k > N$. Поэтому ряд $\sum\limits_{k=1}^\infty \dfrac{c_k}{\mu(\lambda_k)} e(\lambda_k)$ сходится абсолютно в H_1 к некоторому элементу x_y. Ясно, что $T_\mu x_y = y$, и тем самым предложение доказано. $\rhd$

Замечание. Изложенный в доказательстве предложения 1 прием использования абсолютно представляющих систем в вопросах разрешимости функциональных уравнений и ранее применялся А. Ф. Леонтьевым, В. Х. Мусояном, Ю. Ф. Коробейником, Ю. Н. Фроловым и др. (см. по этому поводу, например, [9]).

Покажем теперь, как при некоторых дополнительных ограничениях можно получить результат обратного по отношению к предложению 1 характера.

Положим

$$M_0(E_2, E_1) := \big\{\mu \in H(\mathbb{C}) : (\forall n)(\exists m)\, |f(\lambda)| = O\big(e^{\varphi_{m,1}(\lambda)-\varphi_{n,2}(\lambda)}\big) \text{ в } \mathbb{C}\big\}.$$

Нетрудно видеть, что $M_0(E_2, E_1) \subset M(E_2, E_1)$. Одно из ограничений, которое мы будем использовать ниже, состоит в требовании справедливости равенства $M(E_2, E_1) = M_0(E_2, E_1)$. Отметим, что это равенство заведомо выполняется для так называемых густых пространств E_2 (см. предложение 3 из [3]) и что простые по форме условия густоты имеются в [3] и [4].

Предложение 2. *Допустим, что верхняя огибающая $\varphi_2(\lambda) := \varlimsup\limits_{n\to\infty} \varphi_{n,2}(\lambda)$ весовой последовательности Φ_2 принимает всюду в $\mathbb{C}$ конечные значения, а Φ_1 такова, что*

$$(\forall n)(\exists m)\ \lim_{\lambda\to\infty} \big(\varphi_{m,1}(\lambda) - \varphi_{n,1}(\lambda)\big) = +\infty. \tag{1}$$

Положим

$$V_{n,\mu} := \big\{\lambda \in \mathbb{C} : \ln|\mu(\lambda)| \leqslant \varphi_{n,1}(\lambda) - \varphi_2(\lambda)\big\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Если $M(E_2, E_1) = M_0(E_2, E_1)$, то из нормальной разрешимости оператора $M_\mu : E_2 \to E_1$ или, что то же самое, эпиморфности оператора $T_\mu : H_1 \to H_2$ следует, что при любом $n \in \mathbb{N}$ множество $\mathbb{C} \setminus V_{n,\mu}$ слабо достаточно для E_2.

◁ Зафиксируем произвольное $k \in \mathbb{N}$ и рассмотрим $f \in E_2$ с оценкой $|f(\lambda)| = O(\exp\varphi_{k,2}(\lambda))$ вне $V_{n,\mu}$. Не ограничивая общности, можно считать, что $k \geqslant n$. Так как $\mu \in M(E_2, E_1)$ и по условию $M(E_2, E_1) = M_0(E_2, E_1)$, то при некотором $l \geqslant k$ всюду в $\mathbb{C}$ имеет место соотношение $|\mu(\lambda)| = O\big(\exp(\varphi_{l,1}(\lambda) - \varphi_{k,2}(\lambda))\big)$. Поэтому

$$|f(\lambda)\mu(\lambda)| = O\big(\exp\varphi_{l,1}(\lambda)\big) \text{ вне } V_{n,\mu}.$$

Далее, из принадлежности f пространству E_2 и определения $V_{n,\mu}$ следует, что

$$|f(\lambda)\mu(\lambda)| = O\big(\exp\varphi_{n,1}(\lambda)\big) \text{ на } V_{n,\mu}.$$

Таким образом,

$$|f(\lambda)\mu(\lambda)| = O\big(\exp\varphi_{l,1}(\lambda)\big) \text{ всюду в } \mathbb{C}. \tag{2}$$

Отметим, что номер l зависит лишь от k и μ.

Теперь воспользуемся тем, что оператор M_μ нормально разрешим, т. е. тем, что $M_\mu(E_2)$ — замкнутое подпространство в E_1. Поскольку E_1, в силу условия (1), — (DFS)-пространство (или в терминологии Себаштьяна-и-Сильва LN^*-пространство; см. по поводу таких пространств и их свойств обзор В. В. Жаринова [10]), то тогда $M_\mu(E_2)$, наделенное индуцированной из E_1 топологией, совпадает с $\operatorname{ind}\limits_n (M_\mu(E_2) \bigcap E_{n,1})$ и также является (DFS)-пространством. Это обстоятельство позволяет применить теорему А. Гротендика об открытом отображении (см. Приложение 1 Д. А. Райкова в книге [11], теорема 2), в соответствии с которой M_μ — топологический изоморфизм E_2 на $M_\mu(E_2)$

(инъективность оператора M_μ очевидна). Отсюда с помощью факторизационной теоремы А. Гротендика (см. [12, теорема 6.5.1]) получаем, что имеются такие $m \in \mathbb{N}$ и $C > 0$, что для всех $g \in E_2$

$$\sup_{\lambda\in\mathbb{C}} \frac{|g(\lambda)|}{\exp\varphi_{m,2}(\lambda)} \leqslant C \sup_{\lambda\in\mathbb{C}} \frac{|g(\lambda)\mu(\lambda)|}{\exp\varphi_{l,1}(\lambda)}.$$

Применив это неравенство к f вместо g и использовав (2), заключаем отсюда, что $|f(\lambda)| = O(\exp\varphi_{m,2}(\lambda))$ в $\mathbb{C}$. При этом номер m зависит в конечном итоге лишь от k и μ. Остается воспользоваться теоремой 2 из [13], чтобы завершить доказательство. $\rhd$

Замечание. Две весовые последовательности неубывающих по n локально ограниченных в $\mathbb{C}$ функций $\Phi = (\varphi_n)_{n=1}^\infty$ и $\Psi = (\psi_n)_{n=1}^\infty$ называются эквивалентными ($\Phi \sim \Psi$), если одновременно выполняются два условия:

$$(\forall k)(\exists l)(\exists C)(\forall\lambda\in\mathbb{C})\ \varphi_k(\lambda) \leqslant \psi_l(\lambda) + C$$

и

$$(\forall n)(\exists m)(\exists D)(\forall\lambda\in\mathbb{C})\ \psi_n(\lambda) \leqslant \varphi_m(\lambda) + D.$$

Очевидно, что если $\Phi \sim \Psi$, то пространства $E(\Phi)$ и $E(\Psi)$ совпадают между собой как множества и топологические пространства. Нетрудно также видеть, что слабая достаточность множества и нормальная разрешимость оператора умножения инвариантны относительно замены весовых последовательностей на эквивалентные. Поэтому в предложениях 1 и 2 можно вместо $\Phi_j = (\ln|e(\lambda)|_{n,j})_{n=1}^\infty$ брать любые эквивалентные им последовательности, что мы и будем делать в дальнейшем.

Покажем, как из предложений 1 и 2 можно получать критерии нормальной разрешимости операторов умножения и сюръективности операторов типа свертки. Мы рассмотрим в качестве примера пространства целых функций с заданной оценкой индикатора при порядке $\rho > 0$ и двойственные к ним пространства аналитических в (ρ, α)-выпуклых областях функций, где $\alpha(z)$ — функция вида $z^\rho\big(1 + \frac{a_1}{z} + \ldots \frac{a_n}{z^n}\big)$ со специально подобранными коэффициентами a_k $(1 \leqslant k \leqslant n)$. По поводу используемых ниже понятий и результатов, связанных с теорией целых функций и (ρ, α)-выпуклыми множествами, см. [14] и [15]. Отметим лишь, что частным случаем (ρ, α)-выпуклых множеств при $\alpha(z) \equiv z^\rho$ являются ρ-выпуклые (см. [16]), а, следовательно, и выпуклые (они получаются при $\rho = 1$ и $\alpha(z) \equiv z$) множества.

Пусть G — ограниченная (ρ, α)-выпуклая функция с (ρ, α)-опорной функцией $g(-\theta)$. Обозначим через $H(G)$ пространство всех аналитических в G функций, наделенное топологией равномерной сходимости на компактах из G. Эту топологию можно задать с помощью последовательности норм

$$|f|_{D_n} := \max\{|f(z)| : z \in \overline{D}_n\}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

где $(D_n)_{n=1}^\infty$ — произвольно зафиксированная последовательность областей, исчерпывающая G изнутри (т. е. $G = \bigcup_{n=1}^\infty D_n$ и $\overline{D}_n \subset D_{n+1}$ при $n = 1, 2, \ldots$). Как известно (см. [15, гл. 5, теорема 2.6]), обобщенное преобразование Лапласа $F \longmapsto F_z(K_{\rho,\alpha}(\lambda, z))$ устанавливает топологический изоморфизм между сильным сопряженным к $H(G)$ пространством и $E(\Phi_G)$, где $\Phi_G := \Big(|\lambda|^\rho\big(g(\arg\lambda) - 1/k\big)\Big)_{k=1}^\infty$. Здесь $K_{\rho,\alpha}(\lambda, z)$ — целая в $\mathbb{C}^2$ функция, которая при $\alpha(z) = z^\rho$ есть не что иное, как функция Миттаг-Леффлера $E_{\rho,1/\rho}(z) := \sum_{k=0}^\infty z^k/\Gamma\Big(\frac{k+1}{\rho}\Big)$. Отметим, что $E(\Phi_G)$ совпадает с пространством $[\rho, g(\theta))$ тех целых функций, которые имеют при порядке ρ конечные типы и индикаторы, строго меньшие $g(\theta)$. Кроме того, мы будем еще пользоваться тем, что Φ_G эквивалентна последовательности $\big(\ln|K_{\rho,\alpha}(\lambda,z)|_n\big)_{n=1}^{\infty}$ (это нетрудно извлечь из контекста на С. 142–146 в [15]) и что $E(\Phi_G)$ — густое пространство (это следует из предложения 7 в [3]).

Предположим, что нам даны две ограниченные (ρ,α)-выпуклые области G_1 и G_2 с (ρ,α)-опорными функциями $g_1(-\theta)$ и $g_2(-\theta)$, причем $g_1(\theta)\equiv g_2(\theta)+h(\theta)$, где $h(\theta)$ — 2π-периодическая ρ-тригонометрически выпуклая функция. Положим $H_j := H(G_j)$, $e(\lambda) := K_{\rho,\alpha}(\lambda,z)$, $E_j := E(\Phi_{G_j}) = [\rho, g_j(\theta))$, где $j=1,2$ и $\lambda\in\mathbb{C}$, возьмем произвольную целую функцию μ, имеющую при порядке ρ конечный тип и индикатор, равный $h(\theta)$, и применим к этим пространствам и μ предложения 1 и 2. Отметим, что в данном случае класс мультипликаторов $M(E_2,E_1)$ совпадает с $M_0(E_2,E_1)$ и представляет собой пространство $[\rho,h(\theta)]$ всех целых функций конечного типа при порядке ρ с индикаторами при этом порядке, не превосходящими $h(\theta)$. Поэтому $\mu\in M(E_2,E_1)$.

Обозначим через $\delta(g_2)$ дополнение до $\mathbb{R}$ множества $\operatorname{int}\{\theta\in\mathbb{R} : g_2''(\theta)+\rho^2 g_2(\theta)=0\}$, являющегося объединением всех интервалов ρ-тригонометричности функции g_2, и допустим, что μ имеет вполне регулярный рост на $\delta(g_2)$. Тогда из классической теории целых функций (см. [14, гл. III]) следует, что имеется такое множество V_0 кружков с нулевой линейной плотностью (C^0-множество), что имеет место условие:

$$(\forall n)(\exists R_n>0)\ \ln|\mu(\lambda)| \geqslant |\lambda|^\rho\big(h(\arg\lambda)-1/n\big)$$

для любых $\lambda\in\mathbb{C}\setminus V_0$ с $|\lambda|\geqslant R_n$ и $\arg\lambda\in\delta(g_2)$. Отсюда следует, что V_0 является (Φ_{G_1},Φ_{G_2})-исключительным множеством для μ. Далее, с помощью принципов Фрагмена — Линделефа и максимума модуля и определения C^0-множества стандартным путем устанавливается, что $\mathbb{C}\setminus V_0$ — слабо достаточное для E_2 множество. Последнее следует также из приведенных в [17] условий слабой достаточности множеств для пространств вида $[\rho(r), g(\theta))$, где $\rho(r)\to\rho$ — уточненный порядок. Остается воспользоваться предложением 1, чтобы прийти к выводу об эпиморфности оператора $T_\mu : H(G_1)\to H(G_2)$.

Обратно, если $T_\mu(H(G_1)) = H(G_2)$, то по предложению 2 множество

$$V_{n,\mu} := \left\{\lambda\in\mathbb{C} :\ \ln|\mu(\lambda)|\leqslant|\lambda|^\rho\left(h(\arg\lambda)-\frac{1}{n}\right)\right\}$$

обладает тем свойством, что $\mathbb{C}\setminus V_{n,\mu}$ слабо достаточно для E_2 при любом натуральном n. Если предположить, что $\mu(\lambda)$ не имеет полной регулярности роста на каком-либо из лучей множества $\delta(g_2)$, скажем, θ_0, то в соответствии с [18] имеются $n_0\in\mathbb{N}$, $\alpha_0\in(0,1)$ и последовательность $r_m\uparrow\infty$ такие, что $\ln|\mu(\lambda)|\leqslant|\lambda|^\rho\Big(h(\arg\lambda)-\dfrac{1}{n_0}\Big)$ при всех $\lambda\in K_m := \big\{\zeta : |\zeta - r_m e^{i\theta_0}|\leqslant\alpha_0 r_m\big\}$, $m=1,2,\ldots$ Так как $U := \bigcup_{m=1}^{\infty}K_m$ содержится в $V_{n_0,\mu}$, то $\mathbb{C}\setminus V_{n_0,\mu}$ вложено в $\mathbb{C}\setminus U$. Поэтому $\mathbb{C}\setminus U$ также должно быть слабо достаточным для E_2. А последнее невозможно, так как слабо достаточные для $E_2=[\rho,g_2(\theta))$ множества S обладают тем свойством (см. [17], а также [19]), что для любых $\theta_0\in\delta(g_2)$ и $\varepsilon>0$

$$\lim_{k\to1+0}\lim_{r\to\infty}\frac{\inf\{\lambda\in S :\ |\lambda|\geqslant kr,\ |\arg\lambda-\theta_0|\leqslant\varepsilon\}}{\sup\{\lambda\in S :\ |\lambda|\leqslant r,\ |\arg\lambda-\theta_0|\leqslant\varepsilon\}} = 1.$$

Итак, мы пришли к следующему результату, обобщающему известный критерий В. А. Ткаченко эпиморфности операторов типа свертки в ρ-выпуклых областях [20] и одновременно являющемуся усилением результатов Л. С. Маергойза из § 3 главы 5 в [15], в которых были установлены достаточные условия эпиморфности таких операторов в (ρ,α)-выпуклых областях (в [15] требовалось, чтобы μ имела вполне регулярный рост на всех лучах, исходящих из начала координат).

Предложение 3. *Пусть G_1 и G_2 — (ρ,α)-выпуклые области с (ρ,α)-опорными функциями $g_1(-\theta)$ и $g_2(-\theta)$, причем $g_1(\theta) \equiv g_2(\theta) + h(\theta)$, где $h(\theta)$ — ρ-тригонометрически выпуклая функция, и пусть μ — произвольная целая функция, имеющая при порядке ρ конечный тип и индикатор, равный $h(\theta)$. Для того чтобы оператор свертки $T_\mu : H(G_1) \to H(G_2)$ был эпиморфизмом, необходимо и достаточно, чтобы μ имела вполне регулярный рост на множестве $\delta(g_2)$.*

В заключение отметим, что предложения 1 и 2 можно использовать и для других пространств (например, для пространств ультрадифференцируемых функций). Однако это требует значительных дополнительных исследований, выходящих по объему за рамки настоящей работы.

Литература

1. *Никольский С. М.* Линейные уравнения в линейных нормированных пространствах // Изв. АН СССР. Сер. мат.—1943.—Т. 7, № 3.—С. 147–166.
2. *Коробейник Ю. Ф.* О применении теории возмущений нормально разрешимых операторов к некоторым классам операторов в комплексной области // Владикавк. мат. журн.—2005.—Т. 7, вып. 2.—С. 74–87.
3. *Коробейник Ю. Ф.* О мультипликаторах весовых функциональных пространств // Analysis Math.—1989.—Т. 15, № 2.—P. 105–114.
4. *Абанин А. В.* Густые пространства и аналитические мультипликаторы // Изв. вузов. Сев.-Кавказ. регион. Естеств. науки.—1994.—№ 4.—С. 3–10.
5. *Schneider D. M.* Sufficient sets for some spaces of entire functions // Trans. Amer. Math. Soc.—1974.—V. 197.—P. 161–180.
6. *Епифанов О. В.* Вариации слабо достаточных множеств в пространствах аналитических функций // Изв. вузов. Математика.—1986.—№ 7.—С. 50–56.
7. *Коробейник Ю. Ф.* Индуктивные и проективные топологии. Достаточные множества и представляющие системы // Изв. АН СССР. Сер. мат.—1986.—Т. 50, № 3.—С. 539–565.
8. *Коробейник Ю. Ф.* Представляющие системы // Успехи мат. наук.—1981.—Т. 36, № 1.—С. 73–126.
9. *Коробейник Ю. Ф.* Представляющие системы // Изв. АН СССР. Сер. мат.—1978.—Т. 42, № 2.—С. 325–355.
10. *Жаринов В. В.* Компактные семейства ЛВП и пространства FS и DFS // Успехи мат. наук.—1979.—Т. 34, № 4.—С. 97–131.
11. *Робертсон А. П., Робертсон В. Дж.* Топологические векторные пространства.—М.: Мир, 1967.—257 с.
12. *Эдвардс Р.* Функциональный анализ. Теория и приложения.—М.: Мир, 1969.—1072 с.
13. *Абанин А. В.* О некоторых признаках слабой достаточности // Мат. заметки.—1986.—Т. 40, № 4.—С. 442–454.
14. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций.—М.: Гостехиздат, 1956.—632 с.
15. *Маергойз Л. С.* Асимптотические характеристики целых функций и их приложения в математике и биофизике.—Новосибирск: Наука, 1991.—272 с.
16. *Джрбашян М. М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области.—М.: Наука, 1966.—672 с.
17. *Абанин А. В.* Распределение показателей представляющих систем обобщенных экспонент // Мат. заметки.—1991.—Т. 49, № 2.—С. 3–13.
18. *Азарин В. С.* О лучах вполне регулярного роста целой функции // Мат. сб.—1969.—Т. 79, № 4.—С. 463–476.
19. *Абанин А. В.* О свойствах и распределении на плоскости эффективных множеств // Изв. Сев.-Кав. науч. центра высш. шк. Сер. естеств. наук.—1985.—№ 3.—С. 34–37.
20. *Ткаченко В. А.* Уравнения типа свертки в пространствах аналитических функционалов // Изв. АН СССР. Сер. мат.—1977.—Т. 41, № 2.—С. 378–392.

Статья поступила 12 ноября 2004 г.

Абанин Александр Васильевич, д. ф.-м. н.
г. Ростов, Ростовский государственный университет;
E-mail: abanin@math.rsu.ru