Владикавказский математический журнал
Январь–март, 2005, Том 7, Выпуск 1

УДК **517.946**

НЕЛОКАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

А. А. Керефов, Е. В. Плотникова

Для уравнения третьего порядка методом функции Римана исследуется разрешимость нелокальной по временной переменной и нелокальной по пространственной переменной краевых задач. Методом интегральных уравнений устанавливается разрешимость задач Стеклова для исходного уравнения.

Рассмотрим в области $D = \{(x,t) : 0 < x < l,\, 0 < t < T\}$ для уравнения третьего порядка

$$Lu \equiv u_{xxt} - \lambda u_t + \mu u_{xx} = f(x,t) \qquad (1)$$

следующую задачу: *найти регулярное в области D решение $u(x,t)$, из класса $C^1(\overline{D}) \cap C^2(D)$, удовлетворяющее начальному*

$$u(x,0) = \alpha(x)u(x,T), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \qquad (2)$$

и граничным условиям

$$u(0,t) = g_0(t),\ u_x(0,t) = g(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \qquad (3)$$

где λ, μ — const, $g_0(t), g(t) \in C^1[0,T]$, $\alpha(x) \in C[0,l]$.

Доказательство существования и единственности решения задачи (1)–(3) проведем с помощью метода функции Римана [1]. Но для этого сначала исследуем в области D характеристическую задачу для уравнения (1) с начальным условием

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad \varphi(x) \in C^2[0,l]. \qquad (4)$$

Задачу нахождения решения $u(x,t)$ уравнения (1), удовлетворяющего условиям (3), (4) будем называть задачей Гурса.

Сопряженным по Лагранжу оператором для оператора Lu будет

$$L^*v \equiv -v_{xxt} + \lambda v_t + \mu v_{xx}.$$

Тогда в силу тождеств

$$vLu = vu_{xxt} - \lambda v u_t + \mu v u_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}[vu_{xt} + \mu v u_x] - v_x u_{xt} - \mu v_x u_x - \frac{\partial}{\partial t}[\lambda u v] + \lambda v_t u,$$

$$uL^*v = -uv_{xxt} + \lambda u v_t + \mu u v_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}[-uv_{xt} + \mu u v_x] + u_x v_{xt} - \mu v_x u_x + \lambda u v_t$$

имеем справедливость равенства

$$vLu - uL^*v = \frac{\partial}{\partial x}[vu_{xt} + uv_{xt} + \mu(vu_x - uv_x)] - \frac{\partial}{\partial t}[u_xv_x + \lambda uv]. \tag{5}$$

Введем функцию Римана $v(x,t;\xi,\tau)$, которая однозначно определяется следующими требованиями:

$$L^*v = 0, \tag{6}$$

$$\begin{cases} v(\xi,t;\xi,\tau) = 0, \\ v_x(\xi,t;\xi,\tau) = \exp\left\{\int\limits_\tau^t \mu dt_1\right\} = \exp\{\mu t - \mu\tau\}, \\ v(x,\tau;\xi,\tau) = \omega(x,\tau), \end{cases} \tag{7}$$

где $\omega(x,\tau)$ — регулярное решение задачи Коши

$$v_{xx}(x,\tau;\xi,\tau) - \lambda v(x,\tau;\xi,\tau) = 0, \tag{8}$$

$$v(\xi,\tau;\xi,\tau) = 0, \quad v_x(\xi,\tau;\xi,\tau) = 1,$$

(ξ,τ) — произвольная фиксированная точка области D.

Проинтегрировав (5) по области $\Omega = \{(\xi,\tau) : 0 < \xi < x, 0 < \tau < t\}$ и используя формулу Грина, находим

$$\iint\limits_\Omega (vLu - uL^*v)d\xi d\tau = \int\limits_0^x (v_\xi u_\xi + \lambda uv)\Big|_{\tau=0} d\xi + \int\limits_0^t \big(vu_{\xi\tau} + uv_{\xi\tau} + \mu(vu_\xi - vu_{\ xi})\big)\Big|_{\xi=x} d\tau$$
$$+ \int\limits_0^x (v_\xi u_\xi + \lambda uv)\Big|_{\tau=t} d\xi + \int\limits_0^t \big(vu_{\xi\tau} + uv_{\xi\tau} + \mu(vu_\xi - uv_\xi)\big)\Big|_{\xi=0} d\tau.$$

С учетом (3), (4), (6)–(8) и свойств криволинейных интегралов, из последнего равенства получим

$$\begin{aligned} u(x,t) &= g_0(t)v_x(x,t;0,t) \\ &- \int\limits_0^t \Big(v(x,t;0,\tau)g'(\tau) + \mu v(x,t;0,\tau)g(\tau) + g_0(\tau)\big(v_{\xi\tau}(x,t;0,\tau) - \mu v_\xi(x,t;0,\tau)\big)\Big)\, d\tau \\ &+ \int\limits_0^x \Big(\varphi'(\xi)v_\xi(x,t;\xi,0) + \lambda\varphi(\xi)v(x,t;\xi,0)\Big)\, d\xi - \int\limits_0^x \int\limits_0^t vf(\xi,\tau)\, d\xi d\tau \end{aligned} \tag{9}$$

Таким образом, формула (9) позволяет в явном виде выписать решение задачи Гурса (1), (3), (4), если известна функция $v(x,t;\xi,\tau)$.

Докажем существование и единственность функции Римана, определенной условиями (6)–(8). Для этого проинтегрируем сопряженное уравнение (6) по переменной x в пределах от ξ до x и воспользуемся условиями (7). В результате имеем

$$l^*v = v_{xt} - \lambda\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_\xi^x v(\eta,t)\, d\eta - \mu v_x,\ v_{xt} - \mu v_x = \lambda\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_\xi^x v(\eta,t)\, d\eta. \tag{10}$$

Уравнение (10) есть нагруженное дифференциальное уравнение, $lu = u_{xt} + \mu u_x$ — сопряженный по Лагранжу оператор по отношению к оператору l^*v. Тогда нетрудно получить справедливость равенства

$$ul^*v - vlu = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{2}(uv_t - vu_t) - \mu uv\right] + \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2}(uv_x - vu_x)\right]. \tag{11}$$

Пусть $R(x,t;\alpha,\beta)$ — функция Римана для уравнения $l^*v = 0$, т. е. представляет собой функцию, удовлетворяющую уравнению $lR = 0$ и условиям

$$R(\alpha,t;\alpha,\beta) = \exp\left\{-\int\limits_\beta^t \mu d\eta\right\} = \exp\{\mu\beta - \mu t\}, \quad R(x,\beta;\alpha,\beta) = 1, \tag{12}$$

где (α,β) — фиксированная точка области Ω. Интегрируя (11) по области $\Omega_1 = \{(x,t) : \alpha < x < \beta,\ \beta < t < \tau\}$ с учетом (7), (10) и (12) заключаем

$$v(\alpha,\beta) = \int\limits_\xi^\alpha B_1(x,\beta;\alpha,\beta)v(x,\beta)dx + \int\limits_\xi^\alpha dx \int\limits_\tau^\beta B_2(x,t;\alpha,\beta)v(x,t)dt = F, \tag{13}$$

где

$$F = \int\limits_\xi^\alpha \frac{1}{2}\Big(R(x,\tau;\alpha,\beta)\omega_x(x,\tau) - R_x(x,\tau;\alpha,\beta)\omega(x,\tau)\Big)dx$$
$$+\frac{1}{2}\exp\{\mu\beta - \mu\tau\}\omega(\alpha,\tau) - \lambda\int\limits_\xi^\alpha dx_2 \int\limits_{x_2}^\beta \omega(x_2,\tau)R(x,\tau;\alpha,\beta)\,dx,$$

$$B_1(x,\beta;\alpha,\beta) = \lambda\int\limits_x^\alpha R(x_2,\beta;\alpha,\beta)\,dx_2,$$

$$B_2(x,t;\alpha,\beta) = -\lambda\int\limits_\alpha^x R_t(x_2,t;\alpha,\beta)\,dx_2 = \lambda\int\limits_x^\alpha R_t(x_2,t;\alpha,\beta)\,dx_2.$$

Обратимая замена [2]

$$v(\alpha,\beta) = v_0(\alpha,\beta) + \int\limits_\xi^\alpha v_0(x_2,\beta)B_1(x_2,\beta;\alpha,\beta)\exp\left\{\int\limits_{x_2}^\alpha B_1(x_3,\beta)dx_3\right\}dx_2$$

редуцирует уравнение (13) к интегральному уравнению Вольтерра второго рода относительно $v_0(\alpha,\beta)$

$$v_0(\alpha,\beta) + \int\limits_\xi^\alpha dx \int\limits_\tau^\beta B_0(x,t;\alpha,\beta)v_0(x,t)dt = F,$$

где

$$B_0(x,t;\alpha,\beta) = B_1(x,t;\alpha,\beta)\int\limits_x^\alpha B_2(x_2,t;\alpha,\beta)\exp\left\{\int\limits_{x_2}^\alpha B_1(x_3,\beta)dx_3\right\}dx_2 + B_2(x,t;\alpha,\beta),$$

которое безусловно и однозначно разрешимо.

Пусть $u(x,t;\alpha,\beta)$ — функция Римана для сопряженного уравнения $L^*v=0$. Тогда она является решением задачи

$$\begin{aligned}
&Lu=0,\\
&u(\alpha,t;\alpha,\beta)=0,\quad u_x(\alpha,t;\alpha,\beta)=-\exp\{\mu\beta-\mu t\},\\
&u(x,\beta;\alpha,\beta)=\omega_1(x,\beta),
\end{aligned}\tag{14}$$

где $\omega_1(x,\beta)$ — решение задачи Коши

$$\begin{gathered}
u_{xx}(x,\beta;\alpha,\beta)-\lambda u(x,\beta;\alpha,\beta)=0,\\
u(\alpha,\beta;\alpha,\beta)=0,\ u_x(\alpha,\beta;\alpha,\beta)=-1.
\end{gathered}\tag{15}$$

Интегрируя соотношение (5) по области Ω_1 и используя условия (14)–(15), получим справедливость свойства симметрии

$$u(\xi,\tau;\alpha,\beta)=v(\alpha,\beta;\xi,\tau).$$

Достаточно установить существование решения уравнения (1) при однородных условиях $u(0,t)=0,\ u_x(0,t)=0,\ u(x,0)=0.$

В самом деле, введя вместо функции $u(x,t)$ новую неизвестную функцию $w(x,t)$ по формуле

$$w(x,t)=u(x,t)-\big[\varphi(x)+g_0(t)-\varphi(0)+x(g(t)-g(0))\big],$$

которая удовлетворяет уравнению (1) с другой правой частью и однородным условиям

$$w(0,t)=w_x(0,t)=w(x,0)=0.\tag{16}$$

Пользуясь свойством симметричности функции Римана, непосредственной проверкой нетрудно убедится, что функция определенная равенством (8), удовлетворяет уравнению (1) и однородным условиям (16).

Таким образом, имеет место

Теорема. *Характеристическая задача Гурса* (3)–(4) *для уравнения* (1) *имеет единственное регулярное решение.*

Перейдем к задаче (1)–(3). Представление (9) удовлетворим начальному условию (2):

$$\begin{aligned}
u(x,T)&=g_0(T)v_x(x,T;0,T)\\
&-\int\limits_0^T\Big(v(x,T;0,\tau)g'(\tau)+\mu v(x,T;0,\tau)g(\tau)+g_0(\tau)\big(v_{\xi\tau}(x,T;0,\tau)-\mu v_\xi(x,T;0,\tau)\big)\Big)dt\\
&+\int\limits_0^x\Big(\varphi'(\xi)v_\xi(x,T;\xi,0)+\lambda\varphi(\xi)v(x,T;\xi,0)\Big)d\xi-\int\limits_0^x\int\limits_0^T vf(\xi,\tau)d\xi d\tau.
\end{aligned}$$

Умножив обе части последнего равенства на $\alpha(x)$, получаем интегральное уравнение Вольтерра второго рода относительно $u(x,0)$

$$u(x,0)[1-\alpha(x)v_x(x,T;x,0)]+\alpha(x)\int\limits_0^x u(\xi,0)[v_{\xi\xi}(x,T;\xi,0)-\lambda v(x,T;\xi,0)]d\xi$$
$$=\alpha(x)g_0(T)v_x(x,T;0,T)-\alpha(x)\int\limits_0^T[v(x,T;0,\tau)g'(\tau)+\mu v(x,T;0,\tau)g(\tau)]d\tau$$
$$-\alpha(x)g_0(0)v_x(x,T;0,0)-\alpha(x)\int\limits_0^x\int\limits_0^T vf(\xi,\tau)d\xi d\tau,$$

разрешив которое мы и получим решение задачи (1)–(3).

Теперь рассмотрим ряд краевых задач для уравнения (1).

Задача 1. *Найти регулярное в области D решение уравнения* (1), *из класса $C^1(\overline{D})\cap C^2(D)$, удовлетворяющее условиям:*

$$u(x,0)=\sum_{k=1}^n\alpha_k(x)u(x,t_k),\quad 0<t_k\leqslant T;$$
$$u(0,t)=g_0(t),\quad u_x(0,t)=g(t),\quad 0\leqslant t\leqslant T, \tag{17}$$

где $g_0(t)$, $g(t)$, $\alpha_k(x)$ — заданные достаточно гладкие в областях определения функции.

В представлении (9), дающем решение задачи Гурса, $t=t_k$. Умножая почленно полученные при этом выражения на $\alpha_k(x)$, получим:

$$\alpha_k(x)u(x,t_k)=\alpha_k(x)g_0(t_k)v_x(x,t_k;0,t_k)-\alpha_n(x)\int\limits_0^{t_k}\Big(v(x,t_k;0,\tau)g'(\tau)+\mu v(x,t_k;0,\tau)g(\tau)$$
$$+\alpha_k(x)g_0(\tau)\big(v_{\xi\tau}(x,t_k;0,\tau)-\mu v_\xi(x,t_k;0,\tau)\big)\Big)d\tau+\alpha_k(x)\int\limits_0^x\Big(\big(u(\xi,0)\big)'_\xi v_\xi(x,t_k;\xi,0)$$
$$+\lambda u(\xi,0)v(x,t_k;\xi,0)\Big)d\xi-\alpha_k(x)\int\limits_0^x\int\limits_0^{t_k}vf(\xi,\tau)d\xi d\tau\qquad(k:=1,2,...,n).$$

С учетом нелокального по временной переменой условия из (17), в результате почленного сложения полученных соотношений, окончательно имеем интегральное уравнение Вольтерра второго рода относительно $u(x,0)$.

$$u(x,0)\Big(1-\sum_{k=1}^n\alpha_k(x)v_x(x,t_k;x,0)\Big)+\sum_{k=1}^n\alpha_k(x)\int\limits_0^x u(\xi,0)\big(v_{\xi\xi}(x,t_k;\xi,0)-\lambda v(x,t_k;\xi,0)\big)\,d\xi$$
$$=\sum_{k=1}^n\alpha_k(x)\Big(g_0(t_k)v(x,t_k;0,t_k)-g_0(0)v_x(x,t_k;0,0)-$$
$$-\int\limits_0^{t_k}\big(v(x,t_k;0,\tau)g'(\tau)+\mu v(x,t_k;0,\tau)g(\tau)\big)\,d\tau\Big)-\sum_{k=1}^n\alpha_k(x)\int\limits_0^x\int\limits_0^{t_k}vf(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau. \tag{18}$$

Следовательно, разрешимость задачи (1), (17) эквивалентно редуцирована к разрешимости интегрального уравнения Вольтерра второго рода (18) относительно следа $u(x,t)$ на характеристике $t=0$.

Задача 2. *Найти регулярное в области D решение уравнения* (1), *из класса $C^1(\overline{D})\cap C^2(D)$, удовлетворяющее условиям:*

$$u(x,0)=\phi(x),\quad u(l,t)=0,\quad u(0,t)=\alpha(t)u(x_1,t),\quad 0\leqslant x_1\leqslant l, \tag{19}$$

где $\phi(x)\in C^1[0,l]$.

Полагая в представлении (9) $x=l$ и учитывая однородное условие $u(l,t)=0$, после ряда преобразований получим первое функциональное соотношение связывающее $u(0,t)$ и $u_x(0,t)$:

$$\begin{aligned} u(0,t)v_x(l,t;0,t)-\int\limits_0^t u(0,\tau)\Big(v_{\xi\tau}(l,t;0,\tau)-\mu v_\xi(l,t;0,\tau)\Big)d\tau \\ =v(l,t;0,t)u_x(0,t)-v(l,t;0,0)\phi'(0)-\int\limits_0^t\big(v_\tau(l,t;0,\tau)-\mu v(l,t;0,\tau)\big)u_x(0,\tau)\,d\tau \\ -\int\limits_0^l\big(\phi'(\xi)v_\xi(l,t;\xi,0)+\lambda\phi(\xi)v(l,t;\xi,0)\big)\,d\xi-\int\limits_0^l\int\limits_0^t vf d\xi\,d\tau. \end{aligned}\tag{20}$$

В представлении (9) полагаем $x=x_1$ и полученное при этом выражение почленно умножим на $\alpha(t)$, в результате нелокального по пространственной переменной условия $u(0,t)=\alpha(t)u(x_1,t), 0\leqslant x_1\leqslant l$, получим

$$\begin{aligned} u(0,t)\big(1-\alpha(t)v_x(x_1,t;0,t)\big)+\alpha(t)\int\limits_0^t\big(v_{\xi\tau}(x_1,t;0,\tau)-\mu v_\xi(x_1,t;0,\tau)\big)u(0,\tau)\,d\tau \\ +\alpha(t)v(x_1,t;0,t)u_x(0,t)-\alpha(t)\int\limits_0^t\big(v_\tau(x_1,t;0,\tau)-\mu v(x_1,t;0,\tau)\big)u_x(0,\tau)\,d\tau \\ =\alpha(t)\Bigg(\int\limits_0^{x_1}\big(\lambda\phi(\xi)v(x_1,t;\xi,0)+\phi'(\xi)v_\xi(x_1,t;\xi,0)\big)\,d\xi+v(x_1,t;0,0)-\int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^t vf d\xi\,d\tau\Bigg). \end{aligned}\tag{21}$$

Выражение (21) — второе функциональное соотношение между следами $u(0,t)$ и $u_x(0,t)$.

Таким образом, разрешимость задач (1), (19) редуцирована к разрешимости системы интегральных уравнений Вольтерра второго рода (20), (21).

Функция $v(l,t;0,\tau)$ на отрезке $[0,l]$ нигде в нуль не обращается, если λ не является собственным значением оператора, порожденного выражением $v_{xx}-\lambda v$ и условиями $v(0,\tau;l,\tau)=v(l,\tau;l,\tau)=0$.

Так будет, например, когда $\lambda\geqslant 0$. В самом деле, если при таком $\tau\in[0,l]$ функция $v(0,\tau;l,\tau)=0$, то задача

$$v_{xx}-\lambda v=0,\quad v(0,\tau)=v(l,\tau)=0$$

имеет только тривиальное решение $v(x,\tau;l,\tau) = 0$, что противоречит условию $v_x(l,\tau,l,\tau) = 1$. Поэтому решение уравнения Вольтерра (20) $u_x(0,t)$ будет функцией непрерывной вместе со своей производной на отрезке $[0,l]$.

Задача 3. *Найти регулярное в области D решение уравнения* (1), *из класса $C^1(\overline{D}) \cap C^2(D)$, удовлетворяющее условиям:*

$$u(x,0) = \phi(x), \quad u(l,t) = 0, \quad u(0,t) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(t) u(x_k,t), \quad 0 \leqslant x_k \leqslant l, \tag{22}$$

где $\phi(x) \in C^1[0,l]$, $\alpha_k(t) \in C[0,T]$.

Удовлетворив представление (9) граничному условию $u(l,t) = 0$ получим функциональное соотношение между $u(0,t)$ и $u_x(0,t)$

$$\begin{gathered} u(0,t)v_x(l,t;0,t) - \int\limits_0^t u(0,\tau)\big(v_{\xi\tau}(l,t;0,\tau) - \mu v_\xi(l,t;0,\tau)\big)\,d\tau \\ = v(l,t;0,t)u_x(0,t) - v(l,t;0,0)\phi'(0) - \int\limits_0^t \big(v_\tau(l,t;0,\tau) - \mu v(l,t;0,\tau)\big)u_x(0,\tau)\,d\tau \qquad (23) \\ - \int\limits_0^l \big(\phi'(\xi)v_\xi(l,t,\xi,0) + \lambda\phi(\xi)v(l,t;\xi,0)\big)\,d\xi - \int\limits_0^l \int\limits_0^t vf\,d\xi d\tau, \end{gathered}$$

а затем и условию $u(0,t) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(t)u(x_k,t)$, $0 \leqslant x_k \leqslant l$, в результате ряда преобразований получим второе функциональное соотношение между $u(0,t)$ и $u_x(0,t)$

$$\begin{gathered} u(0,t)\left(1 - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(t)v_x(x_k,t;0,t)\right) + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(t) \int\limits_0^t \big(v_{\xi\tau}(x_k,t;0,\tau) - \mu v_\xi(x_k,t;0,\tau)\big)u(0,\tau)\,d\tau \\ + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(t)v(x_k,t;0,t)u_x(0,t) - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(t) \int\limits_0^t \big(v_\tau(x_k,t;0,\tau) - \mu v(x_k,t;0,\tau)\big)u_x(0,\tau)\,d\tau \\ = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(t)\left(\int\limits_0^{x_k} \big(\lambda\phi(\xi)v(x_k,t;\xi,0) + \phi'(\xi)v_\xi(x_k,t;\xi,0)\big)\,d\xi + v(x_k,t;0,0) - \int\limits_0^{x_k}\int\limits_0^t vf d\xi\,d\tau\right). \end{gathered} \tag{24}$$

Следовательно, разрешив систему интегральных уравнений Вольтерра второго рода (23), (24), мы получаем решение задачи (1), (22).

Задача 4. *Найти регулярное в области D решение уравнения* (1) *из класса $C^1(\overline{D}) \cap C^2(D)$, удовлетворяющее условиям:*

$$u_x(0,t) = \alpha_1 u(0,t) + \alpha_2 u(l,t), \quad u_x(l,t) = \beta_1 u(0,t) + \beta_2 u(l,t), \quad u(x,0) = \phi(x), \tag{25}$$

где $\phi(x) \in C^1[0,l]$, $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ — const.

Краевые условия вида (25) есть условия Стеклова первого класса [3]. Граничные условия перепишем в виде

$$u(0,t) = \frac{1}{\beta_1}u_x(l,t) - \frac{\beta_2}{\beta_1}u(l,t), u_x(0,t) = \alpha_1 u(0,t) + \alpha_2 u(l,t).$$

Из представения (9) при $x = l$ находим, что

$$
\begin{aligned}
u(l,t) &= u(0,t)v_x(l,t;0,t) - \int\limits_0^t u(0,\tau)\big(v_{\xi\tau}(l,t;0,\tau) - \mu v_\xi(l,t;0,\tau)\big)\,d\tau \\
&\quad - \int\limits_0^t \big(\mu v(l,t;0,\tau) - v_\tau(l,t;0,\tau)\big)u_x(0,\tau)\,d\tau - v(l,t;0,t)u_x(0,t) \\
&\quad + v(l,t;0,0)\phi'(0) + \int\limits_0^l \big(\phi'(\xi)v_\xi(l,t;\xi,0) + \lambda\phi(\xi)v(l,t;\xi,0)\big)\,d\xi - \int\limits_0^l\int\limits_0^t vf\,d\xi d\tau.
\end{aligned}
\tag{26}
$$

Умножим последнее выражение на α_2. Так как $\alpha_2 u(l,t) = u_x(0,t) - \alpha_1 u(0,t)$, находим соотношение между $u(0,t)$ и $u_x(0,t)$

$$
\begin{aligned}
&A(t)u_x(0,t) + \int\limits_0^t L_1(t,\tau)u_x(0,\tau)\,d\tau + B(t)u(0,t) + \int\limits_0^t L_2(t,\tau)u(0,\tau)\,d\tau \\
&= \alpha_2\int\limits_0^l \big(\lambda\phi(\xi)v(l,t;\xi,0) + \phi'(\xi)v_\xi(l,t;\xi,0)\big)\,d\xi + \alpha_2 v(l,t;0,0)\phi'(0) - \int\limits_0^l\int\limits_0^t vf\,d\xi d\tau,
\end{aligned}
\tag{27}
$$

где

$$
\begin{aligned}
A(t) &= 1 + \alpha_2 v(l,t;0,t), & L_1(t,\tau) &= \alpha_2[\mu v(l,t;0,\tau) - v_\tau(l,t;0,\tau)], \\
B(t) &= -\alpha_1 - \alpha_2 v_\xi(l,t;0,t), & L_2(t,\tau) &= \alpha_2[v_{\xi\tau}(l,t;0,\tau) - \mu v_\xi(l,t;0,\tau)].
\end{aligned}
$$

Продифференцировав (9) по x и умножив почленно на $\frac{1}{\beta_1}$, при $x = l$ получим равенство

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\beta_1}u_x(l,t) &= \frac{u(0,t)}{\beta_1}v_{\xi x}(l,t;0,t) + \frac{\lambda}{\beta_1}\phi(l)v(l,t;l,0) + \frac{\phi'(l)}{\beta_1}v_x(l,t;l,0) \\
&\quad + \int\limits_0^l \frac{1}{\beta_1}\big(\lambda\phi(\xi)v_x(l,t;\xi,0) + \phi'(\xi)v_{x\xi}(l,t;\xi,0)\big)\,d\xi - \frac{1}{\beta_1}v_x(l,t;0,t)u_x(0,t) \\
&\quad + \frac{1}{\beta_1}v_x(l,t;0,0)\phi'(0) - \int\limits_0^t \frac{1}{\beta_1}\big(\mu v_x(l,t;0,\tau) - v_{\tau x}(l,t;0,\tau)\big)u_x(0,\tau)\,d\tau \\
&\quad - \int\limits_0^t \frac{1}{\beta_1}\big(v_{\xi\tau x}(l,t;0,\tau) - \mu v_{\xi x}(l,t;0;\tau)\big)u(0,\tau)\,d\tau - \frac{1}{\beta_1}\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_0^l\int\limits_0^t vf\,d\xi d\tau.
\end{aligned}
\tag{28}
$$

Умножив обе части (26) почленно на $-\frac{\beta_2}{\beta_1}$ и сложив полученное при этом равенство с выражением (28), в силу первого краевого условия получаем справедливость следующего равенства

$$
\begin{gathered}
C(t)u(0,t)+\int\limits_0^t M_1(t,\tau)u(0,\tau)d\tau+D(t)u_x(0,t)+\int\limits_0^t M_2(t,\tau)u_x(0,\tau)d\tau \\
=\frac{\lambda}{\beta_1}\phi(l)v(l,t;0,0)+\frac{1}{\beta_1}\phi'(l)v_x(l,t;l,0)+\int\limits_0^l\left(\frac{\lambda}{\beta_1}v_x(l,t;\xi,0)\right. \\
\left.-\frac{\lambda\beta_2}{\beta_1}v(l,t;\xi,0)\right)\phi(\xi)d\xi+\int\limits_0^l\left(\frac{1}{\beta_1}v_{\xi x}(l,t;\xi,0)-\frac{1}{\beta_1}v_\xi(l,t;\xi,0)\right)\phi'(\xi)d\xi \\
+\left(\frac{1}{\beta_1}v_x(l,t;0,0)-\frac{\beta_2}{\beta_1}v(l,t;0,0)\right)\phi'(0)-\frac{1}{\beta_1}\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_0^l\int\limits_0^t vf d\xi d\tau-\int\limits_0^l\int\limits_0^t\frac{\beta_2}{\beta_1}vf d\xi d\tau,
\end{gathered}
\tag{29}
$$

где

$$
\begin{gathered}
C(t)=1-\frac{1}{\beta_1}v_{\xi x}(l,t;0,t)+\frac{\beta_2}{\beta_1}v_\xi(l,t;0,t),\quad D(t)=\frac{1}{\beta_1}v_x(l,t;0,t)-\frac{\beta_2}{\beta_1}v(l,t;0,t),\\
M_1(t,\tau)=\frac{1}{\beta_1}v_{\xi\tau x}(l,t;0,\tau)-\frac{\mu}{\beta_1}v_{\xi x}(l,t;0,\tau)-\frac{\beta_2}{\beta_1}v_{\xi\tau}(l,t;0,\tau)+\frac{\mu}{\beta_1}v_\xi(l,t;0,\tau),\\
M_2(t,\tau)=\frac{\mu}{\beta_1}v_x(l,t;0,\tau)-\frac{1}{\beta_1}v_{\tau x}(l,t;0,\tau)-\frac{\beta_2\mu}{\beta_1}v(l,t;0,\tau)+\frac{\beta_2}{\beta_1}v_\tau(l,t;0,\tau).
\end{gathered}
$$

Таким образом, вопрос о разрешимости задачи Стеклова первого класса (1), (25) редуцирован к вопросу разрешимости системы интегральных уравнений (27)–(29).

Задача 5. *Найти регулярное в области D решение уравнения уравнения* (1) *из класса $C^1(\overline{D})\cap C^2(D)$, удовлетворяющее условиям Стеклова второго класса* [3]

$$
u(l,t)=\alpha_1(t)u(0,t),\quad u_x(l,t)=\beta_1u_x(0,t)+\beta_2u(0,t),\quad u(x,0)=\phi(x),
\tag{30}
$$

где $\phi(x)\in C^1[0,l]$, $\alpha_1(t)\in C[0,T]$, β_1,β_2 — const.

В равенстве (9) предположим, что $x=l$. С учетом краевого условия $u(l,t)=\alpha_1(t)u(0,t)$, после ряда преобразование находим

$$
\begin{gathered}
u(0,t)\big(\alpha_1(t)-v_x(l,t;0,t)\big)-\int\limits_0^t u(0,\tau)\big(v_{\xi\tau}(l,t;0,\tau)-\mu v_\xi(l,t;0,\tau)\big)\,d\tau \\
+u_x(0,t)v(l,t;0,t)-\int\limits_0^t u_x(0,\tau)\big(\mu v(l,t;0,\tau)-v_\tau(l,t;0,\tau)\big)\,d\tau \\
=\int\limits_0^l\big(\phi'(\xi)v_\xi(l,t;\xi,0)+\lambda\phi(\xi)v(l,t;\xi,0)\big)\,d\xi+v(l,t;0,0)\phi'(0)-\int\limits_0^l\int\limits_0^t vf\,d\xi d\tau.
\end{gathered}
\tag{31}
$$

Найдем производную $u(x,t)$ из (9) по x и полагая $x=l$, получаем следующее соотношение

$$
\begin{aligned}
u_x(l,t) &= u(0,t)v_{\xi x}(l,t;0,t) + \lambda\phi(l)v(l,t;l,0) + \phi'(l)v_x(l,t;l,0)\\
&+ \int\limits_0^l \big(\lambda\phi(\xi)v_x(l,t;\xi,0) + \phi'(\xi)v_{\xi x}(l,t;\xi,0)\big)\,d\xi - v_x(l,t;0,t)u_x(0,t)\\
&+ v_x(l,t;0,0)\phi'(0) - \int\limits_0^t \big(\mu v_x(l,t;0,\tau) - v_{\tau x}(l,t;0,\tau)\big)u_x(0,\tau)\,d\tau\\
&- \int\limits_0^t \big(v_{\xi\tau x}(l,t;0,\tau) - \mu v_{\xi x}(l,t;0,\tau)\big)u(0,\tau)\,d\tau - \frac{\partial}{\partial x}\int\limits_0^l\int\limits_0^t vf\,d\xi d\tau.
\end{aligned}
$$

А в силу второго граничного условия $u_x(l,t) = \beta_1 u_x(0,t) + \beta_2 u(0,t)$ окончательно получим второе функциональное соотношение между $u(0,t)$ и $u_x(0,t)$

$$
\begin{aligned}
&u(0,t)\big(\beta_2 - v_{\xi x}(l,t;0,t)\big) + \int\limits_0^t \big(v_{\xi\tau x}(l,t;0,\tau)\big)u(0,\tau)\,d\tau + u_x(0,t)\big(\beta_1 + v_x(l,t;0,t)\big)\\
&+ \int\limits_0^t \big(\mu v_x(l,t;0,\tau) - v_{\tau x}(l,t;0,\tau)\big)u_x(0,\tau)\,d\tau = \lambda\phi(l)v(l,t;l,0) + \phi'(l)v_x(l,t;l,0) \qquad (32)\\
&+ \int\limits_0^l \big(\lambda\phi(\xi)v_x(l,t;\xi,0) + \phi'(\xi)v_{\xi x}(l,t;\xi,0)\big)\,d\xi + v_x(l,t;0,0)\phi'(0) - \frac{\partial}{\partial x}\int\limits_0^l\int\limits_0^t vf\,d\xi d\tau.
\end{aligned}
$$

Таким образом, разрешив систему интегральных уравнений Вольтерра второго рода, полученных из функциональных соотношений (31), (32) между $u(0,t)$ и $u_x(0,t)$, мы и получим решение задачи (1), (30).

Литература

1. *Шхануков М. Х.* Дифференциальные уравнения.—Минск: Наука и техника, 1982.—Т. 18, № 4.—С. 689-699.
2. *Бицадзе А. В.* Уравнения смешанного типа.—М.: Изд-во АН СССР, 1959.—162 с.
3. *Нахушев А. М.* Уравнения математической биологии.—М.: Высшая школа, 1995.—301 с.

Статья поступила 8 июля 2004 г.

Керефов Анатолий Анатольевич, к. ф.-м. н.
г. Нальчик, Кабардино-Балкарский госуниверситет
E-mail: kerefovaa@rambler.ru

Плотникова Елена Владимировна
г. Нальчик, Кабардино-Балкарский госуниверситет