Владикавказский математический журнал
Январь–март, 2005, Том 7, Выпуск 1

УДК **517.98**

КОНЕЧНАЯ ПРЕДСТАВИМОСТЬ В СЛОЯХ ПРОСТОРНЫХ БАНАХОВЫХ РАССЛОЕНИЙ

А. Е. Гутман, А. В. Коптев, А. И. Попов

В данной статье показано, что слои просторных непрерывных банаховых расслоений наследуют (а в некоторых случаях и усиливают) конечную представимость нормированного пространства в «соседних» слоях. Каждый из установленных здесь фактов можно расценивать как аналог соответствующего свойства ультрапроизведений банаховых пространств.

Локальная теория банаховых пространств (восходящая к работам Джеймса, Линденштрауса, Пельчинского, Розенталя) изучает свойства банаховых пространств, связанные со структурой их конечномерных подпространств (такие свойства называются локальными и, как правило, они имеют геометрический характер). В рамках этой теории особую роль играет конструкция ультрапроизведения банаховых пространств, с помощью которой, в частности, удалось решить несколько открытых проблем локальной теории и выявить взаимосвязи между локальными и «бесконечномерными» свойствами банаховых пространств.

Многие результаты локальной теории в общих чертах могут быть охарактеризованы следующим образом. Пусть $\mathcal{X} = (X_i)_{i\in I}$ — семейство банаховых пространств, $\mathfrak{U}$ — ультрафильтр на I и $\mathcal{X}/\mathfrak{U}$ — ультрапроизведение $\mathcal{X}$ по $\mathfrak{U}$. Если каждое из пространств X_i обладает определенным локальным свойством (P), то свойством (P) обладает и пространство $\mathcal{X}/\mathfrak{U}$, причем зачастую для $\mathcal{X}/\mathfrak{U}$ справедлив некоторый более сильный вариант (P). Наоборот, если $\mathcal{X}/\mathfrak{U}$ обладает определенным локальным свойством, то этим свойством (или некоторым более слабым его аналогом) обладают пространства X_i для «почти всех» $i \in I$.

Аналогичный характер имеют некоторые результаты инфинитезимального анализа, связанные с понятием нестандартной оболочки банахова пространства (что объясняется достаточно очевидной связью нестандартной оболочки с конструкцией ультрастепени).

Результаты, подобные упомянутым выше, встречаются и в теории непрерывных банаховых расслоений (НБР). В этом случае они формулируются в терминах свойств слоев НБР и имеют следующий общий вид: если $\mathcal{X}$ — НБР над топологическим пространством Q и $q \in Q$, то локальные свойства слоев $\mathcal{X}(p)$ расслоения $\mathcal{X}$ в точках p, близких к q, тесно связаны с соответствующими свойствами слоя $\mathcal{X}(q)$.

Аналогия между слоями НБР и ультрапроизведениями банаховых пространств особенно ярко выражена в случае просторных расслоений (см. [1, гл. 3]). Например, если $\mathcal{X}$ — просторное НБР над Q и в Q имеется дискретное всюду плотное подмножество I, то каждый слой расслоения $\mathcal{X}$ оказывается изометричным ультрапроизведению пространств $\mathcal{X}(i)$ по некоторому ультрафильтру на I.

Исторически просторные банаховы расслоения возникли как реализационный инструмент изучения решеточно нормированных пространств (см. [1, 3]) и постепенно сформировали вполне самостоятельную область исследований. В рамках этой теории были, в частности, вскрыты определенные связи с нестандартным анализом. Последнее обстоятельство можно рассматривать как еще один источник аналогии между просторными НБР, нестандартными оболочками банаховых пространств и их ультрапроизведениями.

В данной статье мы постарались проследить упомянутые выше взаимосвязи на примере такого классического локального свойства, как конечная представимость. Мы показываем, что слои просторных НБР способны наследовать и усиливать конечную представимость нормированного пространства в «соседних» слоях. Каждый из установленных ниже фактов можно расценивать как аналог (а в некоторых случаях и как обобщение) одного из приведенных в [4] свойств ультрапроизведений банаховых пространств. Так, следствие 3 аналогично предложению [4, 6.1], теоремы 6 и 7 и следствие 8 можно считать аналогами теоремы [4, 6.3], а теорему 12 — адаптацией предложения [4, 6.2].

Все векторные (и, в частности, нормированные) пространства, рассматриваемые в данной работе, предполагаются заданными над полем $\mathbb{R}$ действительных чисел.

Пусть X и Y — нормированные пространства и $\varepsilon > 0$. Линейный оператор $T : X \to Y$ назовем $(1+\varepsilon)$-*представлением* X в Y, если

$$\frac{1}{1+\varepsilon}\,\|x\| \leqslant \|T(x)\| \leqslant (1+\varepsilon)\|x\|$$

для всех $x \in X$. Пространство X называется $(1+\varepsilon)$-*представимым* в Y, если существует $(1+\varepsilon)$-представление X в Y. Говорят, что X *конечно представимо* в Y, если любое конечномерное подпространство X является $(1+\varepsilon)$-представимым в Y для всех $\varepsilon > 0$.

Несложно установить, что отношение конечной представимости транзитивно: если X, Y и Z — нормированные пространства, X конечно представимо в Y, а Y конечно представимо в Z, то X конечно представимо в Z.

Точка топологического пространства называется σ-*изолированной*, если пересечение любого счетного семейства ее окрестностей является ее окрестностью. Отметим, что в рамках предположения об отсутствии измеримых кардиналов (не противоречащего аксиомам ZFC) для экстремально несвязных компактов (ЭНК) понятия изолированной точки и σ-изолированной точки совпадают (см. [1, 1.1.9]).

Большинство используемых нами терминов, обозначений и фактов из теории банаховых расслоений можно найти в [1] (см. также [3, § 2.4]).

1. Предложение. *Если некоторое всюду плотное подпространство нормированного пространства X конечно представимо в нормированном пространстве Y, то X конечно представимо в Y.*

$\lhd$ Пусть X_0 — всюду плотное подпространство X, конечно представимое в Y. Благодаря транзитивности отношения конечной представимости достаточно установить, что X конечно представимо в X_0. Зафиксируем произвольные конечномерное подпространство $F \subset X$ и число $\varepsilon > 0$ и построим $(1+\varepsilon)$-представление F в X_0.

Рассмотрим базис $\{f_1, \dots, f_n\}$ пространства F и введем на F норму $\|\cdot\|_1$, полагая $\|\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i\|_1 = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|$ для всех $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Поскольку на конечномерном пространстве все нормы эквивалентны, существует константа $C > 0$ такая, что $\|f\|_1 \leqslant C\|f\|$ для всех $f \in F$. Подберем элементы $x_1, \dots, x_n \in X_0$ так, чтобы

$$\|f_i - x_i\| \leqslant \frac{\varepsilon}{C(1+\varepsilon)}, \quad i = 1, \dots, n,$$

и определим линейный оператор $T : F \to X_0$ формулой $T\big(\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i\big) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$. Тогда для любого элемента $f = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i \in F$ мы имеем

$$\|f - T(f)\| = \left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i (f_i - x_i) \right\| \leqslant \sum_{i=1}^n |\lambda_i| \, \|f_i - x_i\| \leqslant \frac{\varepsilon}{C(1+\varepsilon)} \sum_{i=1}^n |\lambda_i|$$
$$= \frac{\varepsilon}{C(1+\varepsilon)} \|f\|_1 \leqslant \frac{C\,\varepsilon}{C(1+\varepsilon)}\, \|f\| = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\, \|f\|.$$

Следовательно, для всех $f \in F$ справедливы соотношения

$$\frac{1}{1+\varepsilon}\, \|f\| = \|f\| - \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\, \|f\| \leqslant \|f\| - \|f - T(f)\| \leqslant \|T(f)\|$$
$$\leqslant \|f\| + \|f - T(f)\| \leqslant \|f\| + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\, \|f\| \leqslant (1+\varepsilon)\|f\|,$$

а значит, T является $(1+\varepsilon)$-представлением F в X_0. $\rhd$

2. Лемма. *Пусть* $\mathcal{Y}$ — НБР *над вполне регулярным топологическим пространством* Q, $q \in Q$ *и* $\varepsilon > 0$. *Предположим, что конечномерное нормированное пространство* F *является* $\sqrt{1+\varepsilon}$*-представимым в* $\mathcal{Y}(q)$. *Тогда существуют линейный оператор* $S : F \to C(Q, \mathcal{Y})$ *и окрестность* U *точки* q *такие, что*

$$\frac{1}{1+\varepsilon}\|f\| \leqslant \|S(f)(p)\| \leqslant (1+\varepsilon)\|f\|$$

для всех $f \in F$ *и* $p \in U$.

$\lhd$ Рассмотрим $\sqrt{1+\varepsilon}$-представление $T : F \to \mathcal{Y}(q)$. Согласно [2, следствие 8] существуют линейный оператор $\widetilde{S} : T(F) \to C(Q, \mathcal{Y})$ и окрестность U точки q такие, что $\|g\| \leqslant \|\widetilde{S}(g)(p)\| \leqslant \sqrt{1+\varepsilon}\|g\|$ для всех $g \in T(F)$ и $p \in U$. Тогда для $f \in F$ и $p \in U$ справедливы неравенства

$$\frac{1}{1+\varepsilon}\|f\| \leqslant \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}}\|f\| \leqslant \|T(f)\| \leqslant \|\widetilde{S}\big(T(f)\big)(p)\| \leqslant \sqrt{1+\varepsilon}\|T(f)\| \leqslant (1+\varepsilon)\|f\|,$$

а значит, оператор $S = \widetilde{S} \circ T$ и множество U являются искомыми. $\rhd$

3. Следствие. *Пусть* X *— нормированное пространство,* $\mathcal{Y}$ — НБР *над вполне регулярным топологическим пространством* Q *и* $q \in Q$. *Если* X *конечно представимо в* $\mathcal{Y}(q)$, *то для любого конечномерного подпространства* $F \subset X$ *и любого* $\varepsilon > 0$ *существует окрестность* U_F^ε *точки* q *такая, что* F *является* $(1+\varepsilon)$*-представимым в* $\mathcal{Y}(p)$ *для всех* $p \in U_F^\varepsilon$.

В случае просторного расслоения $\mathcal{Y}$ следствие 3 поддается обращению. Более того, справедливо следующее утверждение.

4. Теорема. *Пусть* X *— нормированное пространство,* $\mathcal{Y}$ *— просторное* НБР *над* ЭНК Q *и* $q \in Q$. *Предположим, что для любого конечномерного подпространства* $F \subset X$ *и любого* $\varepsilon > 0$ *в каждой окрестности точки* q *найдется такая точка* p, *что* F *является* $(1+\varepsilon)$*-представимым в* $\mathcal{Y}(p)$. *Тогда* X *конечно представимо в* $\mathcal{Y}(q)$.

$\lhd$ Зафиксируем конечномерное подпространство $F \subset X$ и число $\varepsilon > 0$ и покажем, что F является $(1+\varepsilon)$-представимым в $\mathcal{Y}(q)$.

Обозначим через $\mathcal{U}$ множество всех окрестностей точки q и каждому элементу $U \in \mathcal{U}$ сопоставим точку $p_U \in U$ такую, что F является $\sqrt{1+\varepsilon}$-представимым в $\mathcal{Y}(p_U)$. С учетом леммы 2 для любой окрестности $U \in \mathcal{U}$ существуют линейный оператор $S_U : F \to C(Q, \mathcal{Y})$ и открыто-замкнутая окрестность V_U точки p_U такие, что

$$\frac{1}{1+\varepsilon}\|f\| \leqslant \|S_U(f)(p)\| \leqslant (1+\varepsilon)\|f\|$$

для всех $f \in F$ и $p \in V_U$. Согласно принципу исчерпывания (применительно к полной булевой алгебре открыто-замкнутых подмножеств Q) имеется семейство $(D_U)_{U\in\mathcal{U}}$ попарно непересекающихся открыто-замкнутых подмножеств $D_U \subset V_U$ такое, что $\operatorname{cl}\bigcup_{U\in\mathcal{U}} D_U = \operatorname{cl}\bigcup_{U\in\mathcal{U}} V_U$. Положим $D = \bigcup_{U\in\mathcal{U}} D_U$. Как легко видеть, $q \in \operatorname{cl} D$.

Определим линейный оператор $S : F \to C(Q, \mathcal{Y})$, для каждого элемента $f \in F$ полагая $S(f) \equiv S_U(f)$ на D_U, $S(f) \equiv 0$ на $Q \setminus \operatorname{cl} D$ и продолжая полученное сечение на весь компакт Q с сохранением непрерывности (см. [1, 3.1.1(1)]). Тогда для любого элемента $f \in F$ и любой точки $p \in D$ имеют место неравенства

$$\frac{1}{1+\varepsilon}\|f\| \leqslant \|S(f)(p)\| \leqslant (1+\varepsilon)\|f\|.$$

Благодаря включению $q \in \operatorname{cl} D$ эти неравенства сохраняют силу для $\|S(f)(q)\|$. Следовательно, оператор $T : F \to \mathcal{Y}(q)$, определенный формулой $T(f) = S(f)(q)$, является $(1+\varepsilon)$-представлением F в $\mathcal{Y}(q)$. $\rhd$

5. Следствие. *Пусть X — нормированное пространство и $\mathcal{Y}$ — просторное* НБР *над* ЭНК *Q. Предположим, что для любого конечномерного подпространства $F \subset X$ и любого $\varepsilon > 0$ существует такая точка $q_F^\varepsilon \in Q$, что F является $(1+\varepsilon)$-представимым в $\mathcal{Y}(q_F^\varepsilon)$. Тогда X конечно представимо в некотором слое расслоения $\mathcal{Y}$.*

$\lhd$ Обозначим через $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$ множества положительных чисел и конечномерных подпространств X соответственно и снабдим произведение $\mathcal{E}\times\mathcal{F}$ порядком, полагая $(\varepsilon, F) \leqslant (\delta, G)$ в том и только том случае, если $\varepsilon \geqslant \delta$ и $F \subset G$. Благодаря компактности Q сеть $(q_F^\varepsilon)_{(\varepsilon,F)\in\mathcal{E}\times\mathcal{F}}$ имеет предельную точку $q \in Q$. Тогда для любой пары $(\varepsilon, F) \in \mathcal{E}\times\mathcal{F}$ и любой окрестности U точки q найдется такая пара $(\delta, G) \geqslant (\varepsilon, F)$, что $q_G^\delta \in U$, в частности, F является $(1+\varepsilon)$-представимым в $\mathcal{Y}(q_G^\delta)$. Следовательно, по теореме 4 пространство X конечно представимо в $\mathcal{Y}(q)$. $\rhd$

В дальнейшем нам пригодится следующий факт, с очевидностью вытекающий из [2, предложение 13] и предложения 1.

6. Теорема. *Пусть X — сепарабельное нормированное пространство и $\mathcal{Y}$ — просторное* НБР *над* ЭНК *Q. Если точка $q \in Q$ не является σ-изолированной и X конечно представимо в слое $\mathcal{Y}(q)$, то X изометрично вкладывается в $\mathcal{Y}(q)$.*

7. Теорема. *Пусть X — сепарабельное нормированное пространство и $\mathcal{Y}$ — просторное* НБР *над* ЭНК *Q. Предположим, что для любого конечномерного подпространства $F \subset X$ и любого $\varepsilon > 0$ существует бесконечное подмножество $Q_F^\varepsilon \subset Q$ такое, что F является $(1+\varepsilon)$-представимым в $\mathcal{Y}(q)$ для всех $q \in Q_F^\varepsilon$. Тогда X изометрично вкладывается в некоторый слой расслоения $\mathcal{Y}$.*

$\lhd$ Пусть $\{f_i : i \in \mathbb{N}\}$ — всюду плотное подмножество X. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ обозначим через F_n линейную оболочку $\operatorname{lin}\{f_1, \ldots, f_n\}$ множества $\{f_1, \ldots, f_n\}$. Поскольку множества $Q_{F_n}^{1/n}$ бесконечны, в каждом из них можно выбрать по элементу $q_n \in Q_{F_n}^{1/n}$ так, чтобы члены последовательности $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ были попарно различны. Благодаря компактности Q множество $\{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ имеет предельную точку $q \in Q$. Таким образом, последовательность $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и точка q удовлетворяют следующим условиям:

(а) для любого $n \in \mathbb{N}$ пространство F_n является $(1+1/n)$-представимым в $\mathcal{Y}(q_n)$;

(б) любая окрестность q содержит бесконечное множество точек q_n.

Положим $F_\infty = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Ясно, что F_∞ — всюду плотное подпространство X. Как легко видеть, для любого конечномерного подпространства $F \subset F_\infty$, любого числа $\varepsilon > 0$ и любой окрестности U точки q найдется такой номер $n \in \mathbb{N}$, что $F \subset F_n$, $1/n < \varepsilon$ и $q_n \in U$; в частности, благодаря условию (а) пространство F является $(1+\varepsilon)$-представимым в $\mathcal{Y}(q_n)$. По теореме 4 пространство F_∞ конечно представимо в $\mathcal{Y}(q)$, откуда согласно предложению 1 в $\mathcal{Y}(q)$ конечно представимо и пространство X. Кроме того, из условия (б) следует, что точка q не является σ-изолированной. Следовательно, в силу теоремы 6 пространство X изометрично вкладывается в $\mathcal{Y}(q)$. $\rhd$

8. Следствие. *Если сепарабельное нормированное пространство X конечно представимо в бесконечном числе слоев просторного* НБР $\mathcal{Y}$, *то X изометрично вкладывается в некоторый слой $\mathcal{Y}$.*

9. Замечание. Из доказательства теоремы 7 видно, что в случае бесконечномерного сепарабельного пространства X условие бесконечности множеств Q_F^ε может быть ослаблено. Например, достаточно потребовать, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ мощность $|Q_F^\varepsilon|$ множества Q_F^ε была не меньше размерности $\dim F$ конечномерного подпространства $F \subset X$. Более того, достаточными являются соотношения $\left|Q_F^{1/\dim F}\right| \geqslant \dim F$. Можно также ограничиться требованием $\left|Q_{F_n}^{\varepsilon_n}\right| \to \infty$ для некоторой последовательности $\varepsilon_n \to 0$ и возрастающей последовательности конечномерных подпространств $F_n \subset X$ со всюду плотным в X объединением.

10. Замечание. Требование сепарабельности пространства X в теореме 7 и следствии 8 не может быть опущено. Действительно, пусть $\mathcal{Y}$ — просторное НБР над бесконечным ЭНК с бесконечномерными гильбертовыми слоями (в качестве такого расслоения можно взять просторную оболочку постоянного НБР со слоем ℓ^2, см. [1, 3.1.7]), а X — гильбертово пространство, размерность которого превышает размерность любого слоя $\mathcal{Y}$. Тогда X конечно представимо во всех слоях $\mathcal{Y}$, но не вкладывается ни в один из них.

11. Как показывает пример, приведенный в замечании 10, изометричная вложимость каждого конечномерного подпространства нормированного пространства X в некоторый слой просторного НБР $\mathcal{Y}$ в общем случае не обеспечивает изометричную вложимость всего пространства X в какой-либо из слоев $\mathcal{Y}$. Поскольку в приведенном примере пространство X не является сепарабельным, возникает вопрос, изменится ли ситуация, если дополнительно потребовать сепарабельность X.

Пример. Существуют сепарабельные банаховы пространства X и Y такие, что всякое конечномерное подпространство X изометрично вкладывается в Y, но все пространство X не вкладывается изометрично в Y.

Сразу отметим, что факт существования пространств X и Y, обладающих указанными выше свойствами, не следует расценивать как новый результат. Конкретный пример таких пространств мы приводим ради полноты картины.

Обозначим через Q одноточечную компактификацию $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ натурального ряда и рассмотрим НБР $\mathcal{H}$ над Q с гильбертовыми слоями $\mathcal{H}(n) = \big(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2\big)$ в точках $n \in \mathbb{N}$, нулевым слоем $\mathcal{H}(\infty)$ и непрерывной структурой

$$Y = \{y \in S(Q,\mathcal{H}) : \|y(n)\| \to 0 \text{ при } n \to \infty\}.$$

Из очевидных равенств $Y = C(Q,\mathcal{H}) = C^b(Q,\mathcal{H})$ следует, что Y является банаховым пространством относительно равномерной нормы (см. [1, 2.3.6]). Сепарабельность Y также не вызывает сомнений. В качестве X возьмем пространство ℓ^2.

Как легко видеть, всякое конечномерное подпространство X изометрично вкладывается в Y. Предположим вопреки доказываемому, что X изометрично вкладывается в Y. Тогда Y содержит бесконечномерное подпространство Y_0, в котором выполнен закон параллелограмма: $\|y+z\|^2+\|y-z\|^2 = 2\big(\|y\|^2+\|z\|^2\big)$ для всех $y,z \in Y_0$. Пусть $y \in Y_0$ и $m \in \mathbb{N}$ таковы, что $\|y\|=1$ и $\|y(n)\| \leqslant 1/3$ при $n > m$. Поскольку пространство $\big\{z\big|_{\{1,\dots,m\}} : z \in Y_0\big\}$ имеет конечную размерность $d \leqslant 1+\dots+m$, найдется такой элемент $z \in Y_0$, что $\|z\|=1$ и $\|z(n)\|=0$ при $n \leqslant m$ $\big($в качестве z можно взять нормировку зануляющейся на $\{1,\dots,m\}$ нетривиальной линейной комбинации $d+1$ линейно независимых элементов $Y_0\big)$. Тогда для всех $n \in \mathbb{N}$ справедливы неравенства $\|y(n)+z(n)\| \leqslant 4/3$, $\|y(n)-z(n)\| \leqslant 4/3$. Следовательно,

$$\|y+z\|^2+\|y-z\|^2 \leqslant 32/9 < 4 = 2\big(\|y\|^2+\|z\|^2\big),$$

что противоречит закону параллелограмма.

Построенные выше пространства X и Y очевидным образом дают отрицательный ответ на вопрос, затронутый в начале данного раздела (в качестве $\mathcal{Y}$ достаточно взять НБР над одноточечным компактом со слоем Y).

12. Множество $\mathcal{F}$ конечномерных подпространств нормированного пространства X назовем *аппроксимирующим*, если оно обладает следующими свойствами:

(1) для любых $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ найдется пространство $F \in \mathcal{F}$ такое, что $F_1, F_2 \subset F$;

(2) объединение $\mathcal{F}$ всюду плотно в X.

Тривиальным примером аппроксимирующего множества для нормированного пространства является совокупность всех его конечномерных подпространств.

В дальнейшем, говоря о сетях, индексированных аппроксимирующим множеством $\mathcal{F}$, мы подразумеваем, что $\mathcal{F}$ упорядочено отношением включения.

Семейство $(q_i)_{i\in I}$ точек топологического пространства Q назовем *дискретным*, если существует семейство $(U_i)_{i\in I}$ попарно непересекающихся открытых подмножеств Q такое, что $q_i \in U_i$ для всех $i \in I$.

Теорема. *Пусть X — бесконечномерное нормированное пространство и $\mathcal{Y}$ — просторное* НБР *над* ЭНК Q. *Предположим, что существуют аппроксимирующее множество $\mathcal{F}$ конечномерных подпространств X, дискретное семейство $(q_F)_{F\in\mathcal{F}}$ точек компакта Q и сходящаяся к нулю сеть $(\varepsilon_F)_{F\in\mathcal{F}}$ положительных чисел такие, что каждое пространство $F \in \mathcal{F}$ является $(1+\varepsilon_F)$-представимым в $\mathcal{Y}(q_F)$. Тогда пространство X изометрично вкладывается в некоторый слой $\mathcal{Y}$.*

$\lhd$ В силу компактности Q сеть $(q_F)_{F\in\mathcal{F}}$ имеет подсеть $(q_{F_\alpha})_{\alpha\in\mathrm{A}}$, сходящуюся к некоторой точке $q \in Q$. Мы покажем, что X изометрично вкладывается в $\mathcal{Y}(q)$. Благодаря полноте $\mathcal{Y}(q)$ для этого достаточно установить, что в $\mathcal{Y}(q)$ изометрично вкладывается всюду плотное подпространство $\cup\mathcal{F} \subset X$.

Рассмотрим семейство $(U_F)_{F\in\mathcal{F}}$ попарно непересекающихся открытых подмножеств Q такое, что $q_F \in U_F$ для всех $F \in \mathcal{F}$. Для каждого $F \in \mathcal{F}$ определим число $\delta_F > 0$ равенством $1+\delta_F = (1+\varepsilon_F)^2$. С учетом леммы 2 для каждого пространства $F \in \mathcal{F}$ существуют линейный оператор $S_F : F \to C(Q,\mathcal{Y})$ и открытая окрестность $V_F \subset U_F$ точки q_F такие, что

$$\frac{1}{1+\delta_F}\|f\| \leqslant \|S_F(f)(p)\| \leqslant (1+\delta_F)\|f\|$$

для всех $f \in F$ и $p \in V_F$.

Продолжим каждый из операторов $S_F : F \to C(Q,\mathcal{Y})$ до (нелинейной) функции $S_F : \cup\mathcal{F} \to C(Q,\mathcal{Y})$, полагая $S_F(f) = 0$ при $f \notin F$. Положим $V = \bigcup_{F\in\mathcal{F}} V_F$ и определим функцию $S : \cup\mathcal{F} \to C(V,\mathcal{Y})$, полагая $S(f) \equiv S_F(f)$ на V_F для всех $f \in \cup\mathcal{F}$ и $F \in \mathcal{F}$. Не нарушая общности, можно считать, что все числа ε_F (а значит, и δ_F) ограничены общей константой. Тогда для каждого элемента $f \in \cup\mathcal{F}$ непрерывное сечение $S(f)$ над V является ограниченным, а значит, благодаря просторности расслоения $\mathcal{Y}$ продолжается до непрерывного сечения, определенного на всем компакте Q (достаточно продолжить $S(f)$ нулем на $Q \backslash \mathrm{cl}\, V$ и воспользоваться [1, 3.1.1(1)]). В частности, для любого элемента $f \in \cup\mathcal{F}$ существует предел

$$T(f) := \lim_{\alpha \in \mathrm{A}} S_{F_\alpha}(f)(q_{F_\alpha}) = \lim_{\alpha \in \mathrm{A}} S(f)(q_{F_\alpha}) \in \mathcal{Y}(q).$$

Покажем, что определенная таким образом функция $T : \cup\mathcal{F} \to \mathcal{Y}(q)$ является линейным изометрическим вложением.

Пусть $f, g \in \cup\mathcal{F}$ и $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Рассмотрим индекс $\beta \in \mathrm{A}$, для которого $f, g \in F_\beta$. Линейность на F_β каждой из функций S_{F_α}, где $F_\beta \subset F_\alpha$, позволяет заключить, что

$$T(\lambda f + \mu g) = \lim_{\alpha \in \mathrm{A}} S_{F_\alpha}(\lambda f + \mu g)(q_{F_\alpha}) = \lim_{\alpha \in \mathrm{A}} \big(\lambda S_{F_\alpha}(f)(q_{F_\alpha}) + \mu S_{F_\alpha}(g)(q_{F_\alpha})\big) = \lambda T(f) + \mu T(g).$$

Аналогичным образом устанавливается изометричность оператора T. Действительно, пусть $f \in \cup\mathcal{F}$. Рассмотрим индекс $\beta \in \mathrm{A}$, для которого $f \in F_\beta$. Тогда в случае $F_\beta \subset F_\alpha$ имеют место неравенства

$$\frac{1}{1 + \delta_{F_\alpha}} \|f\| \leqslant \|S_{F_\alpha}(f)(q_{F_\alpha})\| \leqslant (1 + \delta_{F_\alpha}) \|f\|,$$

откуда в силу очевидного соотношения $\lim\limits_{\alpha \in \mathrm{A}} \delta_{F_\alpha} = 0$ следует, что

$$\|T(f)\| = \lim_{\alpha \in \mathrm{A}} \|S_{F_\alpha}(f)(q_{F_\alpha})\| = \|f\|. \ \triangleright$$

Литература

1. *Гутман А. Е.* Банаховы расслоения в теории решеточно нормированных пространств // Тр. Ин-та математики СО РАН.—Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН.—1995.—Т. 29.—С. 63–211.
2. *Коптев А. В.* Критерий рефлексивности слоев банахова расслоения // Сиб. мат. журн.—1995.—Т. 36, № 4.—С. 851–857.
3. *Кусраев А. Г.* Мажорируемые операторы.—М.: Наука, 2003.—619 с.
4. *Heinrich S.* Ultraproducts in Banach space theory // J. Reine Angew. Math.—1980.—Bd. 313.—S. 72–104.

Статья поступила 2 февраля 2005 г.

Гутман Александр Ефимович, д. ф.-м. н.
г. Новосибирск, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
E-mail: gutman@math.nsc.ru

Коптев Александр Викторович, к. ф.-м. н.
г. Новосибирск, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
E-mail: koptev@math.nsc.ru

Попов Алексей Игоревич
г. Новосибирск, Новосибирский государственный университет