Владикавказский математический журнал
Январь–март, 2005, Том 7, Выпуск 1

УДК **517.98**

ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ НА ПРОСТРАНСТВАХ С ПОРЯДКОВОЙ ЕДИНИЦЕЙ

Ш. А. Аюпов, М. А. Бердикулов

В работе изучены условные ожидания и марковские операторы на пространствах с порядковой единицей. Примерами этих пространств являются в коммутативном случае M-пространства и полуполя ограниченных элементов, в некоммутативном случае — эрмитова часть C^*- или W^*-алгебр, в неассоциативном случае — JB- и JBW-алгебры.

Введение

В работе изучены условные ожидания и марковские операторы на пространствах с порядковой единицей. Примерами этих пространств являются в коммутативном случае M-пространства и полуполя ограниченных элементов, в некоммутативном случае — эрмитова часть C^*- или W^*-алгебр, в неассоциативном случае — JB- и JBW-алгебры. Условные ожидания на перечисленных алгебрах изучены многими авторами [1–4], а марковские операторы рассмативались в работах [5–10]. Так как пространства с порядковой единицей являются обобщением этих пространств, и элементы пространства с порядковой единицей истолковываются как пространство случайных величин, то естественно ставится задача: изучить условные ожидания и марковские операторы на пространствах с порядковой единицей.

Пространство с порядковой единицей представляет собой некоторую статистическую модель [11], как пространство аффинных функций на пространстве состояний. В классической модели пространством состояний является симплекс, а в общем случае — пространство состояний — произвольное выпуклое множество в некотором локально выпуклом пространстве.

Будем придерживаться терминологии работ [12, 13].

1. Предварительные сведения

Пусть A — действительное линейное упорядоченное пространство. Через A^+ обозначим множество положительных элементов A. Элемент $\mathbf{e} \in A^+$ называется *порядковой единицей*, если для каждого $a \in A$ существует число $\lambda \in \mathbb{R}^+$ такое, что $-\lambda\mathbf{e} \leqslant a \leqslant \lambda\mathbf{e}$. Если порядок архимедов, то отображение

$$a \to \|a\| = \inf\{\lambda > 0 : -\lambda\mathbf{e} \leqslant a \leqslant \lambda\mathbf{e}\}$$

является нормой в A. В случае, когда A — банахово пространство относительно этой нормы, говорят, что $(A, \mathbf{e})$ — *пространство с порядковой единицей* $\mathbf{e}$.

Пусть V — действительное линейное пространство с порождающим конусом V^+, обладающим базой, т. е.

$$V = V^+ - V^+, \quad V^+ = \bigcup_{\lambda \geqslant 0} \lambda K, \quad \lambda K \cap K = \varnothing \text{ при } \lambda \neq 1.$$

Будем предполагать, что множество $B = \operatorname{conv}(K \cup -K)$ радиально компактно, т. е. $B \cap L$ является замкнутым ограниченным отрезком для любой прямой L, проходящей через нулевой элемент V. В этом случае функционал Минковского

$$\|\rho\| = \inf\{\lambda \geqslant 0 : \ \rho \in \lambda B\}$$

превращает V в нормированное пространство, называемое *пространством с базовой нормой*; будем обозначать его в дальнейшем через (V, K).

Пусть $(A, \mathbf{e})$ — пространство с порядковой единицей, (V, K) — пространство с базовой нормой. Предположим, что эти пространства находятся в отделимой, порядковой и нормированной двойственности. Двойственность между этими пространствами обозначим через $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Известно [12], что сопряженное к (V, K) пространство является пространством с порядковой единицей и, наоборот, сопряженное к $(A, \mathbf{e})$ пространство является пространством с базовой нормой. Поэтому, если не оговорено противное, то обычно в качестве двойственного пространства для A берут пространство $V = A^*$.

В дальнейшем, *проектором* в A будем называть линейное, положительное, $*$-слабо непрерывное отображение $R : A \to A$, удовлетворяющее условию $R^2 = R$.

Проектор R называется *гладким*, если условие

$$\rho \in V^+, \quad \langle a, \rho \rangle = 0 \text{ при } a \in \ker^+ R = A^+ \cap \ker^+ R$$

влечет

$$\langle a, \rho \rangle = 0 \text{ при } a \in \ker R.$$

Проектор Q называется *квазидополнением* проектора R, если

$$\ker^+ R = \operatorname{im}^+ Q, \quad \operatorname{im}^+ R = \ker^+ Q.$$

Проектор R называется *P-проектором*, если он по норме не превосходит 1, гладкий и обладает гладким квазидополнением с нормой, не превосходящей 1.

Заметим, что гладкое квазидополнение к P-проектору R всегда единственно, и в дальнейшем будем обозначать его через R'.

Множество всех P-проекторов в A обозначим через $\mathbb{P}$.

Элементы множества $U = \{u = R\mathbf{e} : \ R \in \mathbb{P}\}$ называются *проективными единицами.*

Точно так же можно определить аналогичные понятия в V, так как по формуле $\langle Ra, \rho \rangle = \langle a, R^* \rho \rangle$ для всех $a \in A$, $\rho \in V$, определяется сопряженное к R отображение на V.

Грань $G \subset K$ называется *выставленной*, если $G = \{\rho \in K : \ \langle a, \rho \rangle = 1\}$ для некоторого $a \in A$; *проективной*, если $a = u = R\mathbf{e}$ для некоторого $R \in \mathbb{P}$.

Множество всех проективных граней K обозначим через $\mathbb{F}$.

Определение 1.1 [13]. Говорят, что $(A, \mathbf{e})$ и (V, K) находятся в *спектральной двойственности*, если выполнены следующие условия:

(i) Каждая выставленная грань K проективна.

(ii) Каждый элемент $a \in A$ допускает единственное разложение $a = a^+ - a^-$ такое, что $a^+, a^- \in A^+$ и $a^+ \perp a^-$.

Здесь $a^+ \perp a^-$ означает, что

$$\{\rho \in K : \langle a^+, \rho \rangle = 1\} \cap \{\rho \in K : \langle a^-, \rho \rangle = 1\} = \varnothing.$$

Если A и V находятся в спектральной двойственности и $A = V^*$, то множества U, $\mathbb{P}$, $\mathbb{F}$ являются попарно изоморфными логиками ([12; следствие 12.5]).

В этом случае любой элемент $a \in A$ имеет спектральное разложение: $a = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda du_\lambda$. Здесь $\{u_\lambda\}$ — спектральное семейство проективных единиц для a.

Две проективные единицы $u = R\mathbf{e}$ и $v = Q\mathbf{e}$ называются *совместными*, если R и Q коммутируют: $RQa = QRa$ для всех $a \in A$.

Два элемента $a, b \in A$ называются *совместными*, если их спектральные семейства попарно совместны. Как и в случае йордановых алгебр, совместность a и b обозначим через $a \leftrightarrow b$.

Напомним, что замкнутое по норме подпространство $M \subset A$ называется *абелевым*, если оно замкнуто относительно отображения $a \to a^{(2)} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 du_\lambda$ и любые два элемента в M совместны.

P-проектор R называется *центральным*, если $R + R' = I$. Проективная единица $u = R\mathbf{e}$ называется *центральной*, если R — центральный P-проектор.

Пространство $(A, \mathbf{e})$ с порядковой единицей называется *фактором*, если оно не содержит центральных проективных единиц, кроме 0 и $\mathbf{e}$.

Проективная единица $u = R\mathbf{e}$ называется *абелевой*, если $\operatorname{im} R = R(A)$ — векторная решетка. Пространство A с порядковой единицей *имеет тип I*, если для любого центрального P-проектора R в A подпространство $\operatorname{im} R$ содержит абелеву проективную единицу. Элемент $u \in U$ называется *атомом*, если u — минимальный элемент логики U. Проективная единица u называется *конечной*, если она является супремумом конечного числа атомов.

Минимальное число атомов, супремум которых равен u, называется *размерностью* u. Фактор A назовем *фактором типа* I_n, если размерность единицы $\mathbf{e}$ равна n. Если $\mathbf{e}$ является супремумом только n ортогональных атомов, то назовем A *однородным фактором типа* I_n.

Элемент $\rho \in V$ называют *положительным*, если $\rho(a) \geqslant 0$ для всех $a \in A^+$, в этом случае пишут $\rho \geqslant 0$. Положительный функционал ρ называется *состоянием*, если $\|\rho\| = 1$. Это равносильно равенству $\rho(\mathbf{e}) = 1$. Множество состояний на A обозначим через $S(A)$. Известно, что $S(A)$ — $*$-слабо замкнутое подмножество V.

Определение 1.2. Состояние τ на A называется *следом*, если

$$\tau(a) = \tau(Ra) + \tau(R'a), \quad a \in A, \ R \in \mathbb{P}.$$

2. Условное ожидание на JBW-алгебрах

Определения условного ожидания на W^*-алгебре и на JBW-алгебре одинаковы. Поэтому ограничимся рассмотрением условного ожидания на JBW-алгебре и приведем один вспомогательный результат.

Условные ожидания на JBW-алгебрах определены следующим образом [3].

Пусть A — JBW-алгебра с единицей $\mathbf{1}$, A_1 — ее JBW-подалгебра, содержащая $\mathbf{1}$.

Определение 2.1. Линейное отображение $E : A \to A_1$ называется *условным ожиданием относительно* A_1, если

(i) $E(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$;

(ii) $x \geqslant 0 \Rightarrow E(x) \geqslant 0$;

(iii) $E(ax) = aE(x)$ для любых $x \in A$ и $a \in A_1$.

Известно [3], что если A — JBW-алгебра типа I, то относительно произвольной подалгебры $A_1 \subset A$ существует условное ожидание.

Теорема 2.1. *Пусть $M : A \to A_1$ — линейное отображение со свойствами:*

1) $M(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$;

2) $x \geqslant 0 \Rightarrow M(x) \geqslant 0$;

3) $M(U_p(x)) = U_p(Mx)$ *для любых элемента $x \in A$ и идемпотента $p \in A_1$.*

Тогда M является условным ожиданием относительно A_1.

$\lhd$ Проверим выполнение условий (i)–(iii) определения 2.1. Первые два условия очевидны. Поэтому проверим выполнение условия (iii).

Пусть $M(U_p(x)) = U_p(Mx)$ для любых идемпотента p в JBW-подалгебре A_1 и элемента $x \in A$. Тогда имеем $U_{p'}(Ex) = E(U_{p'}x)$, $x \in A$, где $p' = \mathbf{1} - p \in A_1$.

Известно [14], что имеет место пирсовское разложение

$$x = U_p x + 2U_{p,p'}x + U_{p'}x$$

элемента $x \in A$ относительно идемпотента p. Поэтому имеем

$$Mx = M(U_p x) + M(2U_{p,p'}x) + M(U_{p'}x).$$

С другой стороны, пирсовское разложение элемента Mx есть

$$Mx = U_p(Mx) + 2U_{p,p'}(Mx) + U_{p'}(Mx).$$

Исходя из этого, учитывая условие 3) теоремы, имеем

$$2U_{p,p'}(Mx) = M(2U_{p,p'}x).$$

Так как $U_{p,p'} = 2px - 2p(px)$ по определению [14], то последнее означает, что

$$2p(Mx) - 2p(p(Mx)) = M(2px - 2p(px)).$$

Точно так же условие 3) теоремы означает, что

$$2p(p(Mx)) - pM(x) = M(2p(px) - px).$$

Сложив эти равенства, получим

$$pM(x) = M(px), \quad x \in A, \ \ p \in A_1.$$

Так как линейные оболочки идемпотентов слабо плотны в JBW-подалгебре A_1 и M слабо непрерывно, то заключаем, что

$$aM(x) = M(ax), \quad x \in A, \ \ a \in A_1. \rhd$$

3. Условное ожидание на пространствах с порядковой единицей

Пусть $(A, \mathbf{e})$ — пространство с порядковой единицей, B — его подпространство, являющееся пространством с порядковой единицей, содержащим $\mathbf{e}$. Как было сказано выше, примером пространства с порядковой единицей является JBW-алгебра, поэтому теорема 2.1 подсказывает нам следующее

Определение 3.1. Линейное отображение $E : A \to B$ назовем *условным ожиданием относительно* B, если

1) $E(\mathbf{e}) = \mathbf{e}$;

2) $a \geqslant 0 \Rightarrow E(a) \geqslant 0$;

3) $E(Ra) = R(Ea)$ для всех $R \in \mathbb{P}$ таких, что $Re \in B$ и $a \in A$.

Пример 1. Пусть $(A, \mathbf{e})$ — пространство с порядковой единицей, ρ — некоторое состояние на A. Для $a \in A$ положим $E(a) = \rho(a)\mathbf{e}$. Тогда E — условное ожидание относительно подпространства $B = \{\lambda\mathbf{e} :\ \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Пример 2. Пусть $Q \in \mathbb{P}$. Положим $E(a) = Qa + Q'a$, $a \in A$. Тогда E — условное ожидание относительно подпространства

$$B = \{a \in A :\ a = Qa + Q'a\} = \operatorname{im} Q + \operatorname{im} Q'.$$

В самом деле, выполнение свойств 1) и 2) из определения 3.1 вытекает из свойств P-проектора Q.

Проверим свойство 3. Пусть $R\mathbf{e} \in B$, т. е. $R\mathbf{e} \in \operatorname{im} Q + \operatorname{im} Q'$. Это означает, что R и Q совместные, т. е. $RQ = QR$ и $RQ' = Q'R$ (см. [12; 5.26]). Следовательно, $RE(a) = E(Ra)$.

Пример 3. Пусть A — JBW-алгебра с единицей $\mathbf{1}$, B — ее JBW-подалгебра, содержащая $\mathbf{1}$, и E — условное ожидание относительно B. Тогда E — условное ожидание в смысле определения 3.1.

Действительно, пусть выполнено условие (iii) в определении 2.1. Если $p \in B$ — некоторый идемпотент, то P-проектор R, соответствующий p, имеет вид $Ra = U_p a$. Тогда

$$E(U_p a) = E(2p(pa) - pa) = 2p(pEa) - pEa = U_p Ea.$$

Из теоремы 2.1 вытекает, что если пространство с порядковой единицей является JBW-алгеброй, то определение 3.1 совпадает с определением 2.1.

Пусть $(A, \mathbf{e})$ — пространство с порядковой единицей, B — его подпространство.

Лемма 3.1. *Если E — условное ожидание относительно B, то* $\|E\| = 1$.

$\lhd$ Пусть $a \in A$ и $\|a\| \leqslant 1$, т. е. $-\mathbf{e} \leqslant a \leqslant \mathbf{e}$. Тогда, в силу положительности E, имеем, что $E(a + \mathbf{e}) \geqslant 0$ и $E(\mathbf{e} - a) \geqslant 0$. Так как E — линейное и $E(\mathbf{e}) = \mathbf{e}$, то последние неравенства означают $-\mathbf{e} \leqslant E(a) \leqslant \mathbf{e}$. Следовательно, $\|E\| \leqslant 1$. Но $E(\mathbf{e}) = \mathbf{e}$. Поэтому $\|E\| = 1$. $\rhd$

Лемма 3.2. *Условное ожидание E относительно B является идемпотентным отображением, т. е. $E(E(a)) = E(a)$ для всех $a \in A$.*

$\lhd$ Если $u \in B$ — некоторая проективная единица, то $u = R\mathbf{e}$ для некоторого P-проектора R и, в силу условий 3) и 1) определения 3.1, имеем $E(u) = E(R\mathbf{e}) = R\mathbf{e} = u$.

Далее, пусть $a = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i$ — простой элемент B. Тогда очевидно, что $u_i \in B$ и $E(a) = \sum_{i=1}^{k} E(\lambda_i u_i) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i = a$. Значит, $E(a) = a$ для простых $a \in B$. Так как произвольный элемент B есть предел по норме сходящихся простых элементов [12] и E непрерывно по норме в силу леммы 3.1, то имеем $E(a) = a$ для любого $a \in B$. Так как $E(a) \in B$ для любого $a \in A$, то имеет место равенство $E(E(a)) = E(a)$. $\rhd$

Определение 3.2. Пусть ρ — некоторое состояние на A. Если $\rho(Ea) = \rho(a)$ для любого $a \in A$, то говорят, что E *сохраняет* ρ.

Очевидно, что в примере 2 условное ожидание E сохраняет след, в примере 1 условное ожидание E сохраняет состояние ρ.

Актуальным является вопрос: при каких условиях существует условное ожидание относительно данного подпространства? В общем случае этот вопрос пока остается открытым.

Здесь задача решается для одного класса пространств с порядковой единицей типа I_2 — обобщенных спин-факторов.

Пусть X — рефлексивное банахово пространство, единичный шар X_1 которого — гладкое, строго выпуклое множество. Тогда собственными гранями единичного шара сопряженного пространства X_1^* являются только множества вида $\{\sigma\}$, где σ — экстремальная точка X_1^* и для каждого $\sigma \in \partial e X_1^*$ существует единственный элемент $x \in \partial e X_1$ такой, что $\sigma(x) = 1$.

Рассмотрим пространства $A = \mathbb{R} + X$ и $V = \mathbb{R} + X^*$. Порядок и норма на A (на V) определяются следующим образом:

$$a = \alpha + x \geqslant 0 \Leftrightarrow \alpha \geqslant \|x\| \quad (\rho = \beta + \xi \geqslant 0 \Leftrightarrow \beta \geqslant \|\xi\|)\,,$$

$$\|a\| = |\alpha| + \|x\|, \quad (\|\rho\| = \max(|\beta|, \|\xi\|)$$

для $a \in A$, $\rho \in V$.

После таких обозначений и определений A становится пространством с порядковой единицей, а V — пространством с базовой нормой, которые находятся в спектральной двойственности относительно формы:

$$\langle a, \rho \rangle = \langle \alpha + x, \beta + \xi \rangle = \alpha\beta + \xi(x),$$

где ξ — ограниченный линейный функционал на X.

Пространства с порядковой единицей такой конструкции назовем *обобщенными спин-факторами* [15, 16].

След τ на обобщенном спин-факторе единственен и определен следующим образом: $\tau(\alpha + x) = \alpha$.

Так как единичный шар X — гладкое, строго выпуклое множество, то элементы вида $u = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_0$, где $x_0 \in X$, $\|x_0\| = 1$, являются проективными единицами, а P-проектор R, соответствующий u, имеет вид:

$$Ra = \langle a, \hat{u} \rangle\, u,$$

где $\hat{u}$ — единственное состояние на A со свойством $\langle u, \hat{u} \rangle = 1$.

Пусть $A = \mathbb{R}+X$ — обобщенный спин-фактор, B — его произвольное подпространство. Нетрудно показать, что B имеет вид: $B = \mathbb{R} + X_0$, где X_0 — некоторое подпространство X.

Теорема 3.1. *В A существует сохраняющее след условное ожидание относительно B тогда и только тогда, когда существует проектор T из X в X_0.*

$\lhd$ Необходимость. Пусть в A существует сохраняющее след условное ожидание относительно $B = \mathbb{R} + X_0$. Для произвольного $a = \alpha + x \in A$ элемент Ea в B имеет вид: $Ea = \alpha + Tx$.

В самом деле, пусть $Ea = \alpha + f(x) + Tx$ для некоторого функционала f на X и линейного отображения $T : X \to X_0$. Возьмем $u \in B$ и пусть $u = \mathrm{Re}$. Так как $Eu = u$, то свойство 3 условного ожидания, т. е. равенство $E(Ra) = R(Ea)$ означает, что $\langle a, \hat{u}\rangle\, u = \langle Ea, \hat{u}\rangle\, u$, т. е. $\langle a, \hat{u}\rangle = \langle Ea, \hat{u}\rangle$.

Так как проективная единица u имеет вид $u = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_0$ и ей соответствует состояние $\hat{u} = 1 + \xi_0$ в B^*, $\xi_0 \in X_0^*$, $\|\xi_0\| = 1$, $\langle \xi_0, x_0\rangle = 1$, то имеем:

$$\langle a, \hat{u}\rangle = \langle \alpha + x, 1 + \xi_0\rangle = \alpha + \xi_0(x),$$

$$\langle Ea, \hat{u}\rangle = \langle \alpha + f(x) + Tx, 1 + \xi_0\rangle = \alpha + f(x) + \xi_0(Tx).$$

Из этого заключаем, что $f(x) = 0$ для всех $x \in X$. Значит, $Ea = \alpha + Tx$.

Теперь докажем, что T — проектор из X в X_0. В силу идемпотентности E, имеем

$$\alpha + Tx = Ea + E(Ea) = E(\alpha + Tx) = \alpha + T^2x,$$

т. е. $T^2x = Tx$. Значит T тоже является идемпотентным.

Покажем, что $\|T\| \leqslant 1$. Пусть $a = \alpha + x \geqslant 0$, т. е. $\alpha \geqslant \|x\|$. Тогда $E(a) = \alpha + Tx \geqslant 0$, т. е. $\alpha \geqslant \|Tx\|$. Отсюда $\left\|T\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right\| \leqslant 1$. Так как $\left\|\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right\| \leqslant 1$, то $\|T\| \leqslant 1$ в силу произвольности x и α. Следовательно, T — проектор.

Достаточность. Пусть существует проектор T из X в X_0. Тогда положим $E(\alpha + x) = \alpha + Tx$. Покажем, что E будет условным ожиданием относительно B.

Проверим выполнение условий определения 3.1.

1): Очевидно, так как $\mathbf{e} = 1 + 0$.

2): Пусть $a = \alpha + x \geqslant 0$, т. е. $\alpha \geqslant \|x\|$. Так как $\|T\| \leqslant 1$, то $\|Tx\| \leqslant \|x\|$. Поэтому $\|Tx\| \leqslant \alpha$. Это означает, что $E(\alpha + x) = \alpha + Tx \geqslant 0$.

3): Так как $u = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_0 \in B$ — проективная единица и ей соответствует состояние $\hat{u} = 1 + \xi_0$, $\xi_0 \in X_0^*$, то для любого $a = \alpha + x$

$$E(Ra) = \langle a, \hat{u}\rangle\, u = \langle \alpha + x, 1 + \xi_0\rangle\, u = (\alpha + \xi_0(x))u,$$

$$R(Ea) = \langle Ea, \hat{u}\rangle\, u = \langle \alpha + Tx, 1 + \xi_0\rangle\, u = (\alpha + \xi_0(Tx))u.$$

Так как T — проектор из X в X_0, то T^* — проектор из X_0^* в X. Это означает, что $\xi_0(Tx) = \xi_0(x)$ для всех $x \in X$, $\xi_0 \in X_0^*$. Поэтому имеем $R(Ea) = E(Ra)$.

Сохранение следа отображением E вытекает из определения следа. $\rhd$

Аналогичная теорема в случае, когда A — JBW-алгебра, доказана в [4].

Теорема 3.2. *Пусть $A = \mathbb{R} + X$ — обобщенный спин-фактор, $\rho = 1 + \xi$ — состояние на A и $B = \mathbb{R} + X_0$ — его подпространство. Для того, чтобы существовало сохраняющее ρ условное ожидание относительно B необходимо и достаточно, чтобы существовал проектор T из X в X_0 с условием $T^*\xi = \xi$.*

$\lhd$ Необходимость. Пусть $E : A \to B$ — сохраняющее ρ $(\rho(Ea)) = \rho(a))$ условное ожидание относительно B. По теореме 1 существует проектор T из X на X_0, и условное ожидание E имеет вид $E(\alpha + x) = \alpha + Tx$. Далее,

$$\rho(Ea) = \langle E(\alpha + x), \rho\rangle = \langle \alpha + Tx, 1 + \xi\rangle = \alpha + \xi(Tx),$$

$$\rho(a) = \langle \alpha + x, 1 + \xi\rangle = \alpha + \xi(x).$$

Так как E сохраняет состояние ρ, то $\xi(Tx) = \xi(x)$, $x \in X$, т. е. $\langle T^*\xi, x\rangle = \langle \xi, x\rangle$, $x \in X$. Следовательно, $T^*\xi = \xi$.

Достаточность вытекает из теоремы 3.1. $\rhd$

Следствие 3.1. *Пусть $A = \mathbb{R} + X$ — обобщенный спин-фактор, ρ — состояние на A и $B = R(A) + R'(A)$ для некоторого P-проектора R. Условное ожидание относительно B сохраняет ρ тогда и только тогда, когда $\rho = \hat{u}$, где $u = \mathrm{Re}$.*

Известно [17], что если в банаховом пространстве существует проектор на произвольное подпространство, то оно является гильбертовым пространством.

Следствие 3.2. *Пусть $A = \mathbb{R} + X$ — обобщенный спин-фактор. Условное ожидание относительно произвольного подпространства A существует тогда и только тогда, когда X — гильбертово пространство.*

Теорема 3.3. *Пусть A — однородный фактор типа I_n и B — его абелево подпространство, содержащее $\mathbf{e}$. Тогда существует условное ожидание относительно B.*

$\lhd$ Пусть $\{u_i\}_{i=1}^n$ — максимальное семейство попарно ортогональных атомов в B таких, что $\mathbf{e} = \sum\limits_{i=1}^n u_i$. Тогда $B = \left\{ \sum\limits_{i=1}^n \alpha_i u_i,\ \alpha_i \in \mathbb{R} \right\}$. Пусть $\{Q_i\}_{i=1}^n$ — семейство P-проекторов, соответствующее $\{u_i\}_{i=1}^n$. Положим

$$Ea = \sum_{i=1}^n Q_i a.$$

Тогда E — условное ожидание относительно B.

В самом деле, выполнение условий 1) и 2) определения 3.1 очевидно. Пусть R — некоторый P-проектор такой, что $R\mathbf{e} \in B$. Тогда $u = R\mathbf{e}$ — проективная единица в B и она имеет вид $u = \sum_{i=1}^k u_i$, в силу однородности A, где $\{u_i\}_{i=1}^k \subset \{u_i\}_{i=1}^n$. Из [18] вытекает, что $R = \sum_{i=1}^k Q_i$. Поэтому проверить выполнение свойства $E(Ra) = R(Ea)$ для всех $R \in \mathbb{P}$ и $a \in A$ не составляет труда. $\rhd$

4. Марковские операторы на пространствах с порядковой единицей

Пусть $(A, \mathbf{e})$ — пространство с порядковой единицей.

Определение 4.1. Линейный оператор $T : A \to A$ называется *марковским*, если
1) T — положительный, т. е. $Ta \geqslant 0$ для $a \geqslant 0$;
2) $T\mathbf{e} = \mathbf{e}$;
3) $Ta_n \nearrow Ta$ при $a_n \nearrow a,\ a_n, a \in A,\quad n \in \mathbb{N}$.

Пример 1. Пусть (A, e) — произвольное пространство с порядковой единицей, а R — некоторый P-проектор на A. Тогда отображение $T = R + R'$ является марковским оператором, где R' — квазидополнение R.

Пример 2. Пусть $A = \mathbb{R} + X$ — обобщенный спин-фактор, где X — банахово пространство. Произвольный ограниченный линейный положительный оператор $T : A \to A$ со свойством $T\mathbf{e} = \mathbf{e}$ имеет вид $T(\alpha + x) = \alpha + Sx$, где S — линейный ограниченный оператор, отображающий X в себя. В этом случае T является марковским тогда и только тогда, когда $\|S\| \leqslant 1$.

Пример 3. Условное ожидание на A относительно подпространства B является примером марковского оператора.

Любой марковский оператор T порождает сопряженный оператор из A^* в A^*, определенный равенством $(\rho T)(a) = \rho(Ta)$, где $\rho \in A^*$, $a \in A$. Очевидно, если $\rho \in V^+$ (или $S(A)$), то $\rho T \in V^+$ (соответственно, $S(A)$).

Будем говорить, что на пространстве с порядковой единицей A задан *марковский процесс*, если на A определено семейство $\{T_{st}\}_{0<s<t<+\propto}$ марковских операторов, обладающее обобщенным полугрупповым свойством (уравнение Колмогорова — Чепмена)

$$T_{rt} = T_{rs}T_{st}, \quad r \leqslant s \leqslant t, \tag{1}$$

причем $T_{ss} = I$, где I — тождественный оператор.

Если $T_{s+r,t+r} = T_{st}$ для любых $s, t \quad (s \leqslant t)$ и $r \geqslant 0$, то процесс назовем *однородным.* В этом случае T_{st} зависит только от разности $t - s$ и достаточно ограничиться одним параметром: $T_r \quad (r = t - s)$. Тогда уравнение (1) имеет вид

$$T_sT_t = T_{s+t}. \tag{2}$$

В примере 2 будет задан марковский процесс, когда задана полугруппа ограниченных операторов в банаховом пространстве X.

Определение 4.2. Марковский процесс $\{T_{st}\}$ назовем *регулярным*, если существует $\rho_0 \in S(A)$ такое, что для любых $\mu \in S(A), s > 0$ справедливо соотношение

$$\lim_{t\to+\infty} \mu T_{st}(a) = \rho_0(a) \tag{3}$$

для любого $a \in A$.

Пусть каждому $t \in \mathbb{R}$, $t \geqslant 0$, поставлен в соответствие нормальный положительный функционал $\varphi_t \in V^+$ на A. При каждом фиксированном $a \in A$ величина $\varphi_t(a)$ является числовой функцией числового аргумента t, причем, если $a \geqslant 0$, то $\varphi_t(a)$ неотрицательная функция.

Рассмотрим следующее условие, являющееся обобщением условия (A_0) из [8] и условия (A) из [6]:

$(\mathbf{A_1})$ Существует семейство функционалов $\varphi_t \neq 0$ такое, что для любых $s > 0$ и $\mu \in S(A)$ найдется $t_0 > s$ такое, что

$$\mu T_{st} \geqslant \varphi_s \quad \text{для всех } \ t \geqslant t_0,$$

где $\mu_1 \geqslant \mu_2$ $(\mu_1, \mu_2 \in V^+)$ означает, что $\mu_1(u) \geqslant \mu_2(u)$ для любой проективной единицы $u \in U$.

Теорема 4.1. *Пусть марковский процесс $\{T_{st}\}$ удовлетворяет условию (A_1). Если числовая функция $\varphi_t(\mathbf{e})$ ограничена снизу некоторым числом $c > 0$, то процесс $\{T_{st}\}$ регулярен. Более того, сходимость к предельному состоянию ν_0 равномерна, т. е.*

$$\lim_{t\to\infty} \|\mu T_{st} - \nu_0\|^* = 0$$

для любых $s \geqslant 0$ и $\mu \in S(A)$.

Лемма 4.1. *В условиях теоремы 4.1 для любых $\mu, \nu \in S(A)$ и $s > 0$ справедливо соотношение*

$$\lim_{t\to\infty} \|\mu T_{st} - \nu T_{st}\|^* = 0.$$

Пусть теперь марковский процесс однороден, т. е. задан однопараметрической полугруппой марковских операторов $\{T_t\}_{t>0}$ на A. Тогда в условии (A_1) семейство функционалов заменяется одним функционалом; (A_0): существует ненулевое $\mu_0 \in V^+$ такое, что для любого $\mu \in S(A)$ найдется t_0 такое, что

$$\mu T_t \geqslant \mu_0 \quad \text{при } \ t \geqslant t_0.$$

Определение 4.3. Нормальное состояние $\nu \in S(A)$ называется *стационарным распределением* для процесса $\{T_t\}$, если $\nu T_t = \nu$ для любого $t \geqslant 0$.

Теорема 4.2. *Пусть однородный марковский процесс $\{T_t\}$ удовлетворяет условию (A_0). Тогда существует единственное стационарное распределение $\nu_0 \in S(A)$ такое, что для любого $\mu \in S(A)$ справедливо соотношение*

$$\lim_{t\to\infty} \|\mu T_t - \nu_0\|^* = 0. \tag{4}$$

$\lhd$ Существование нормального состояния ν_0, удовлетворяющего условию (4), вытекает из теоремы 4.1. Необходимо лишь установить инвариантность ν_0 относительно полугруппы $\{T_t\}$. Для любого $a \in A$ и $s > 0$ имеем в силу (4)

$$\nu_0 T_s(a) = \lim_{t\to\infty} (\mu T_t)(T_s(a)) = \lim_{t\to\infty} \mu T_{s+t}(a) = \nu_0(a),$$

т. е. $\nu_0 T_s(a) = \nu_0(a)$ для любого $a \in A$ или $\nu_0 T_s = \nu_0$. Покажем, что других стационарных распределений нет. Если $\nu_1 \in S(A)$ — инвариантное состояние, то $\nu_1 T_t = \nu_1$ для любого $t \geqslant 0$ и, значит, в силу (4)

$$\nu_1(a) = \lim_{t\to\infty} \nu_1(T_t(a)) = \nu_0(a) \quad \text{для всех } a \in A. \rhd$$

5. Об одной эргодической теореме

Пусть $(A, \mathbf{e})$ — пространство с порядковой единицей.

Лемма 5.1. *Если $\{T_n\}$ — возрастающая последовательность операторов на A и $\sup \|T_n\| = K < \infty$, то существует линейный оператор T такой, что для любого $a \in A$*

$$Ta = \lim_{n\to\infty} T_n a,$$

при этом $\|T\| \leqslant K$.

$\lhd$ Для $m > n$ оператор $T_m - T_n$ положителен, следовательно, для любого $a \in A^+$ и линейного положительного функционала φ имеем

$$\varphi(T_m a - T_n a) = \varphi(T_m a) - \varphi(T_n a) \geqslant 0.$$

Для фиксированного a и φ числовая последовательность $\{\varphi(T_n a)\}$ возрастает и $|\varphi(T_n a)| \leqslant \|\varphi\| \cdot \|T_n a\| \leqslant K \|\varphi\| \cdot \|a\|$. Отсюда заключаем, что существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(T_n a)$.

Далее, пусть a и φ — произвольны. Так как $a = a_+ - a_-$, то

$$\begin{aligned}\varphi(T_m a - T_n a) &= \varphi_+(T_m a_+ - T_n a_+) - \varphi_-(T_m a_+ - T_n a_+) \\ &\quad - \varphi_+(T_m a_- - T_n a_-) + \varphi_-(T_m a_- - T_n a_-).\end{aligned}$$

Из сказанного выше следует, что $|\varphi(T_m a - T_n a)| \to 0$, $m, n \to \infty$.

Известно, что $\|T_m a - T_n a\| = \sup\limits_{\|\varphi\|\leqslant 1} |\varphi(T_m a - T_n a)|$. Следовательно, последовательность $\{T_n a\}$ фундаментальна по норме. Так как A полно, то существует $Ta = \lim\limits_{n\to\infty} T_n a$. Определенный таким образом оператор T аддитивен и однороден. Так как $\|T_n a\| \leqslant \|T_n\| \cdot \|a\| \leqslant$

$K\|a\|$, то в пределе имеем $\|Ta\| \leqslant K\|a\|$, т. е. T — ограниченный линейный оператор и $\|T\| \leqslant K$. $\triangleright$

Определение 5.1. Элемент $\varphi \in V$ назовем *единицей* в V, если $\varphi \geqslant 0$ и множество $\bigcup\{g \in V : -n\varphi \leqslant g \leqslant n\varphi\}$ плотно по норме в пространстве V.

Теорема 5.1. *Пусть $T : V \to V$ — положительное, линейное отображение такое, что $\|T\| \leqslant 1$ и $T\varphi \leqslant \varphi$, где φ — единица в V. Тогда для любого $f \in V$ существует $\hat{f} \in V$ такое, что*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} T^k f \to \hat{f} \quad \text{при } n \to \infty \text{ по норме } V.$$

$\triangleleft$ Рассмотрим выпуклое множество

$$S_n = \{g \in V : -n\varphi \leqslant g \leqslant n\varphi\}.$$

Для любого ортогонального семейства $\{u_k\}$ проективных единиц $\varphi(u_k) \to 0$ при $k \to \infty$ в силу нормальности φ. Так как для любого $g \in S_n$ верно $|g(u_k)| \leqslant n\varphi(u_k)$, то $\lim\limits_{k\to\infty} g(u_k) = 0$ равномерно по всем $g \in S_n$.

Кроме того, $\|g\| \leqslant n\|\varphi\|$ для всех $g \in S_n$. По теореме 3 в [19] множество S_n слабо относительно компактно. Очевидно, что оно и слабо замкнуто. Тогда S_n — слабо компактное подмножество V.

Пусть $T : V \to V$ — положительный линейный оператор такой, что $\|T\| \leqslant 1$ и $T\varphi \leqslant \varphi$. Тогда $T(S_n) \subset S_n$. Положим

$$T_m = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} T^k.$$

Для любого $f \in S_n$ последовательность $\{T_m f\}$ лежит в S_n. Так как S_n слабо компактно, то по теореме Эберлейна — Шмульяна [20] S_n слабо секвенциально компактно. Поэтому из последовательности $\{T_m f\}$ можно выбрать слабо сходящуюся последовательность $T_{m_k} f \to \hat{f} \in V$. Так как $\|T\| \leqslant 1$, то выполнены все условия теоремы Иосиды [20; гл. VIII, § 3, теорема 2]. Из нее следует, что $T_m f \to \hat{f}$ по норме V. Таким образом, утверждение теоремы доказано для любого $f \in S_n$, а значит, для всех $f \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} S_n$.

Пусть $f \in V$ — произвольно. По условию теоремы, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} S_n$ плотно в V. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существуют $f_1 \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} S_n$ и $f_2 \in V$ такие, что $f = f_1 + f_2$ и $\|f_2\| \leqslant \varepsilon/3$. Рассмотрим последовательность $\{T_m f\} = \{T_m f_1 + T_m f_2\}$. Так как $f \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} S_n$, то последовательность $\{T_m f_1\}$ сходится в V и поэтому фундаментальна, т. е. $\|T_n f_1 - T_m f_1\| \leqslant \varepsilon/3$ при достаточно больших m, n.

Далее, для всех m

$$\|T_m f_2\| = \left\|\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} T^k f_2\right\| \leqslant \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} \|T^k f_2\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Значит, при достаточно больших m, n

$$\|T_m f - T_n f\| \leqslant \|T_m f_1 - T_n f_1\| + \|T_m f_2\| + \|T_n f_2\| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

В силу произвольности ε, это означает фундаментальность последовательности $\{T_m f\}$. Так как V полно, то существует $\hat{f}$ такое, что $T_m f_1 \to \hat{f}$. $\triangleright$

6. Вероятностные пространства на пространствах с порядковой единицей

Введем понятие вероятностного пространства на пространствах с порядковой единицей. В частном случае, когда рассматриваемое пространство является йордановой алгеброй, оно совпадает с понятием вероятностного пространства на йордановой алгебре.

Вероятностное пространство на пространстве с порядковой единицей — это пара (A, ρ), где A — пространство с порядковой единицей, ρ — точное нормальное состояние на A. При этом элементы A истолковываются как ограниченные случайные величины, ρ — как математическое ожидание случайных величин, логика проективных единиц U_A — как множество событий.

Классическое вероятностное пространство (Ω, F, P), где Ω — пространство всех элементарных событий, F — σ-алгебра событий, P — вероятность, может быть рассмотрено как пример вероятностного пространства на пространствах с порядковой единицей (абелев случай). Именно в качестве пространства с порядковой единицей A выступает пространство $L^\infty(\Omega, F, P)$ ограниченных случайных величин, а в качестве ρ — математическое ожидание случайных величин, построенных по вероятности (интеграл по мере P). Из [12] вытекает, что всякое вероятностное пространство на абелевых пространствах с порядковой единицей может быть отождествлено с классическим вероятностным.

Рассмотрим случай, когда состояние ρ на A является следом (см. § 1).

Пусть (A, τ)-вероятностное пространство на пространствах с порядковой единицей, причем τ — след. Рассмотрим множества вида

$$N(\varepsilon, \delta) = \big\{a \in A: \, (\exists\, u \in U)\; u = Re,\; \tau(e - u) < \delta,\; \|Ra\| < \varepsilon\big\}.$$

Совокупность множеств $\{N(\varepsilon, \delta), \varepsilon > 0, \delta > 0\}$ образует базис окрестностей нуля для некоторой топологии.

Определение 6.1. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset A$, $x \in A$. Будем говорить, что последовательность $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ сходится *по вероятности* к x, если для любых $\varepsilon, \delta > 0$ существует $n_0 = n(\varepsilon, \delta)$ такое, что $x_n - x \in N(\varepsilon, \delta)$ при $n \geqslant n_0$.

Определение 6.2. Будем считать, что $x_n \to x$ *почти наверное*, если

$$(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, u \in U) \quad u = Re,\; \tau(e - u) < \delta,\; \|R(x_n - x)\| \to 0,\; n \to \infty.$$

Функция распределения случайной величины $a \in A$ определяется как

$$F_a(\lambda) = \tau(u_\lambda),$$

где $\{u_\lambda\}$ — спектральное семейство проективных единиц для a.

Для вероятностных пространств на пространствах с порядковой единицей можно также ввести аналоги условных математических ожиданий (§ 3), мартингалов, марковских операторов (§ 4) и доказать различные варианты теорем о сходимости мартингалов, эргодических теорем и аналогов других теорем теории вероятностей.

На примере вероятностного пространства на обобщенном спин-факторе (см. § 3) разберем некоторые из этих понятий.

Пусть $A = \mathbb{R} + X$ — обобщенный спин-фактор. Всякий элемент $a = \alpha + x$ можно однозначно представить в виде линейной комбинации двух проективных единиц:

$$a = \alpha + x = (\alpha + \|x\|)u_a + (\alpha - \|x\|)u'_a,$$

где

$$u_a = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{x}{\|x\|}, \quad u'_a = e - u_a.$$

Поэтому спектральным семейством для a является семейство

$$u_\lambda = \begin{cases} 0 & \text{при } \lambda \leqslant \alpha - \|x\|; \\ e - u_a & \text{при } \alpha - \|x\| < \lambda \leqslant \alpha + \|x\|; \\ e & \text{при } \lambda > \alpha + \|x\|. \end{cases}$$

В частности, функцией распределения для a является

$$F_a(\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{при } \lambda \leqslant \alpha - \|x\|; \\ \frac{1}{2} & \text{при } \alpha - \|x\| < \lambda \leqslant \alpha + \|x\|; \\ 1 & \text{при } \lambda > \alpha + \|x\|. \end{cases}$$

Отсюда видно, что две случайные величины $a = \alpha + x$ и $b = \beta + y$ одинаково распределены тогда и только тогда, когда $\alpha = \beta$, $\|x\| = \|y\|$.

Нетрудно заметить, что в вероятностном пространстве на обобщенном спин-факторе (A, τ) сходимости по вероятности, и почти наверное и по норме совпадают и означают, что $\alpha_n \to \alpha$, $x_n \to x$, где $a_n = \alpha_n + x_n$, $a = \alpha + x \in A$ (через $x_n \to x$ обозначена сходимость в банаховом пространстве X). В то же время, сходимость по распределению означает, что $\alpha_n \to \alpha$, $\|x_n\| \to \|x\|$.

Можно показать, что для двух проективных единиц $u = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_0$ и $v = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}y_0$ условие $u \leftrightarrow v$ равносильно $x_0 = y_0$.

По определению $a \leftrightarrow b \Leftrightarrow u_a \leftrightarrow u_b$. Так как $u_a = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{x}{\|x\|}$ и $u_b = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{y}{\|y\|}$, то $\frac{x}{\|x\|} = \frac{y}{\|y\|}$. Это означает, что $x = \lambda y$, т. е. элементы банахова пространства X пропорциональны. Итак, совместность в обобщенном спин-факторе элементов $a = \alpha + x$ и $b = \beta + y$ означает пропорциональность элементов x и y. В частности, всякое максимальное абелево подпространство A имеет вид: $A_0 = \mathbb{R}\mathbf{e} + \mathbb{R}x_0$, где x_0 — некоторый единичный элемент в X.

Так как абелево пространство можно превратить в алгебру, то нетрудно заметить, что A_0 — порядково и алгебраически изоморфно $\mathbb{R}^2$ при соответствии

$$\alpha + \lambda x_0 \to (\alpha + \lambda, \alpha - \lambda) \in \mathbb{R}^2.$$

Поэтому модуль элемента $a = \alpha + x$ можно вычислить по формуле:

$$|a| = \frac{1}{2}\left(|(\alpha + \|x\|)| + |(\alpha - \|x\|)|\right) + \frac{1}{2}\left(|(\alpha + \|x\|)| + |(\alpha - \|x\|)|\right)\frac{x}{\|x\|}.$$

В частности, $|0 + x| = \|x\|\mathbf{e}$.

Литература

1. *Umegaki H.* Conditional expectation in an operator algebra II // Tohoku Math. J.—1956.—V. 8.—P. 86–100.
2. *Takesaki M.* Conditional expectations in von Neumann algebras // J. Funct. Anal.—1972.—V. 9.—P. 306–321.
3. *Аюпов Ш. А.* Условные математические ожидания и мартингалы на йордановых алгебрах // Докл. АН УзССР.—1981.—№ 10.—С. 3–5.
4. *Аюпов Ш. А., Бердикулов М. А., Азизов Э. Ю.* Условные ожидания на спин факторах // Узб. мат. журн.—1991.—№ 3.—С. 3–9.
5. *Сарымсаков Т. А., Зимаков Н. П.* Эргодический принцип для марковских полугрупп в упорядоченных нормированных пространствах с базой // Докл. АН СССР.—1986.—Т. 289, № 3.—С. 554–558.
6. *Сарымсаков Т. А.* Полуполя и теория вероятностей.—Ташкент: ФАН, 1981.—89 с.
7. *Сарымсаков Т. А.* Некоммутативные вероятностные пространства на O^*-алгебрах // Докл. АН СССР.—1978.—Т. 241, № 2.—С. 297–300.
8. *Сарымсаков Т. А., Аюпов Ш. А.* Регулярность цепей Маркова на O^*-алгебрах // Докл. АН УзССР.—1979.—№ 4.—С. 3–5.
9. *Аюпов Ш. А.* Эргодические теоремы для цепей Маркова на O^*-алгебрах // Докл. АН УзССР.—1978.—№ 7.—С. 11–13.
10. *Аюпов Ш. А.* Независимость и марковские процессы в вероятностных пространствах на йордановых алгебрах // В сб.: Предельные теоремы для случайных процессов и смежные вопросы.—Ташкент: ФАН.—1982.—С. 28–41.
11. *Холево А. С.* Вероятностные и статистические аспекты квантовой теории.—М.: Наука, 1980.—320 с.
12. *Alfsen E. M., Shultz F. W.* Non commutative spectral theory for affine function spaces on convex sets // Mem. Amer. Math. Soc., 172. Providence R.I.: AMS.—1976.—P. 122.
13. *Alfsen E. M., Shultz F. W.* State spases of Jordan algebras // Acta Math.—1978.—V. 140, № 3/4.—P. 155–190.
14. *Жевлаков К. А., Слинько А. М., Шестаков И. П., Ширшов А. И.* Кольца, близкие к ассоциативным.—М.: Наука, 1978.—432 с.
15. *Бердикулов М. А., Одилов С.* Обобщенные спин-факторы // Узб. мат. журн.—1995.—№ 1.—С. 12–17.
16. *Бердикулов М. А.* Пространства с порядковой единицей однородного типа I // Изв. АН УзССР. Серия физ-мат. наук.—1990.—№ 4.—С. 13–18.
17. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ.—М.: Наука, 1977.—752 с.
18. *Тихонов О. Е.* Спектральная теория для пространств с базовой нормой // В сб.: Конструктивная теория функций и функциональный анализ.—Казань: изд-во Казанского университета.—1992.—Вып. 8.—С. 76–91.
19. *Бердикулов М. А., Жураев И. М.* Нормальные положительные функционалы на пространствах с порядковой единицей // Узб. мат. журн.—1996.—№ 4.—С. 22–28.
20. *Иосида К.* Функциональный анализ.—М.: Мир, 1967.

Статья поступила 18 апреля 2004 г.

Аюпов Шавкат Абдуллаевич, д. ф.-м. н.
г. Ташкент, Институт математики Академии наук Узбекистана
E-mail: `mathinst@uzsci.net`

Бердикулов Мусирмонкул Абдиллаевич, к. ф.-м. н.
г. Ташкент, Ташкентский институт инженеров
железнодорожного транспорта
E-mail: `musulmonqul@mail.ru`