Владикавказский математический журнал
Январь–март, 2005, Том 7, Выпуск 1

УДК **519.72**

КЛАСС СИСТЕМ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ ХААРА, ПОСТРОЕННЫХ НА БАЗЕ МОДИФИЦИРОВАННЫХ КОМПЛЕКСНЫХ ФУНКЦИЙ РАДЕМАХЕРА

Г. Г. Арунянц, М. Л. Казарян

Вводится и исследуется новый класс ортогональных функций Хаара. Строится алгоритм быстрых ортогональных преобразований и оцениваются вычислительные затраты. Для введенного класса функций рассматривается преобразование Карунена — Лоэва.

Вопросы обработки сигналов-изображений остаются в центре внимания специалистов различных специальностей. Изображения выступают и как результат, и как объект исследований в физике, космонавтике, метеорологии, криминалистике и многих других областях науки и техники. Кроме того, системы обработки изображений в настоящее время используются для решения многих прикладных задач. Одним из наиболее полезных средств цифровой обработки сигналов является аппарат быстрых ортогональных преобразований (БОП). Особенный интерес представляют функции Уолша, Хаара, Радемахера. В опубликованной в 1910 г. работе венгерского математика А. Хаара впервые были определены функции Хаара и исследованы некоторые важные свойства рядов Хаара. Наиболее замечательным из этих свойств является равномерная сходимость ряда Фурье непрерывной функции по системе Хаара к самой функции. В дальнейшем были введены системы функций Радемахера (1922 г.) и Уолша (1923 г.). Система Хаара оказалась полезной при решении некоторых актуальных вопросов общей теории ортогональных рядов. Многие принципиальные результаты в этой области принадлежат советским математикам С. В. Бочкареву, Н. Я. Виленкину, В. А. Талаляну, Ф. Г. Арутюняну, П. Л. Ульянову и др. [4]. Первые практические применения систем Уолша и Хаара относятся к области связи. Благодаря работам Х. Хармута функции Уолша вошли в технику телевидения. Им же, на основе упомянутых систем, построена теория секвентного анализа. Важнейшие приложения функции Хаара нашли в практике обработки изображений для эффективного кодирования и сокращения избыточности, фильтрации. Система функций Хаара не обладает некоторыми положительными свойствами тригонометрических функций, но имеет преимущества, делающие ее применение более выгодным. Например, при сжатии изображений система Хаара выделяется: простотой реализации; быстротой вычисления частичных сумм ряда ($2(N-1)$ операций вместо N^2 операций, где N обычно имеет порядок 10^8–10^{12}); сравнительно небольшой мощностью процессоров, реализующих быстрое преобразование Хаара.

Построим систему функций со следующими параметрами [1, 2]: $N = 2^n$ — количество функций и количество отсчетов каждой функции, где $n = 1, 2, \ldots; r$ — номер системы

© 2005 Арунянц Г. Г., Казарян М.Л.

функций в классе, $r = 0, 1, \ldots, (n-1)$. Для построения системы используются n вспомогательных функций, которые назовем модифицированными функциями Радемахера (МФР)

$$R(k,x) = e^{j\pi 2^{-r}[2^{k+r-n}x + a_k]}, \tag{1}$$

где k — номер МФР ($k = 1, 2, \ldots, n$); x — номер отсчета функции, $x = 0, 1, \ldots, N-1$; a_k — коэффициент сдвига функции, квадратные скобки означают операцию взятия целой части числа. Перечислим некоторые свойства этих функций.

Если переменная пробегает значения $0, 1, \ldots, N-1$, то фаза функции $R(k,x)$ меняется скачками на $\pi 2^{-r}$ через интервал 2^{n-k-r}. Вследствие цикличности фазы, функция $R(k,x)$ является периодической с периодом $T = 2^{n-k+1}$. На интервале определения функции N укладывается 2^{k-1} периодов. Построим систему дискретных ортогональных функций, образованных на базе функций Радемахера, используя преобразования Хаара. Система дискретных модифицированных функций Хаара имеет следующий вид:

$$H(k,x) = \frac{2^{\frac{m_c}{2}}}{\sqrt{N}} R(m_c+1, x)\cdot \operatorname{rect}\left(\frac{x}{N}\cdot 2^{m_c} - (k) \bmod 2^{m_c}\right), \tag{2}$$

где $n = 1, 2, \ldots$; $r = 0, 1, \ldots, n-1$; $N = 2^n$; $k = 1, 2, \ldots, n$; $x = 0, \ldots, N-1$; m_c — номер старшего ненулевого разряда в двоичном представлении k; $(k) \bmod 2^{m_c}$ — величина k по модулю 2^{m_c}; $\operatorname{rect}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 < x < 1, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$

Приведем в качестве примера матрицу $H(k,x)$ третьего порядка, т. е. $N = 2^3$; $a_k = 0$; $r = 1$;

$$H(k,x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & j & j & -1 & -1 & -j & -j \\ \sqrt{2} & \sqrt{2}j & -\sqrt{2} & -\sqrt{2}j & & & & \\ & & & & \sqrt{2} & \sqrt{2}j & -\sqrt{2} & -\sqrt{2}j \\ 2 & -2 & & & & & & \\ & & 2 & -2 & & & & \\ & & & & 2 & -2 & & \\ & & & & & & 2 & -2 \end{vmatrix}.$$

Рассмотрим основные свойства модифицированной системы Хаара. Для этого дополнительно определим модифицированную систему Радемахера для непрерывного и дискретного случаев

$$R1(k,x) = e^{j\pi 2^{-r}[2^{k+r+1}x + a_{k+1}]}, \tag{3}$$

где $n = 1, 2, \ldots$; $r = 0, 1, \ldots, n-1$; $k = 1, \ldots, n$; $x = 0, \ldots, N-1$; $N = 2^n$.

Дискретная модифицированная система Радемахера имеет вид:

$$R(k,x) = R1\left(k, \frac{x}{2^n}\right). \tag{4}$$

Рассмотрим некоторые свойства функции $R1(k,x)$.

1. $|R1(k,x)| = 1$.

$\lhd$ Действительно,

$$\left|\exp\left(\frac{\pi i}{2^r}\left[2^{k+1+r}\cdot x + a_{k+1}\right]\right)\right| = \left|\cos\left(\frac{\pi}{2^r}\cdot\left[2^{k+1+r}\cdot x + a_{k+1}\right]\right)\right.$$
$$\left. + i\sin\left(\frac{\pi}{2^r}\left[2^{k+1+r}\cdot x + a_{k+1}\right]\right)\right| = 1. \quad \rhd$$

2. Справедливы следующие равенства:

а) $R1\left(k, x+\frac{1}{2^p}\right) = R1(k,x)$, где $p \leqslant k$; **б)** $\sum\limits_{j=0}^{1} \mathrm{R1}\left(k, x+\frac{j}{2^{k+1}}\right) = 0.$

$\triangleleft$ Рассмотрим следующие случаи: а) Пусть $p \leqslant k$.

$$\begin{aligned}
R1\left(k, x+\frac{1}{2^p}\right) &= \exp\left(\frac{\pi i}{2^r}\left[2^{k+1+r}\cdot\left(x+\frac{1}{2^p}\right)+a_{k+1}\right]\right)\\
&= \exp\left(\frac{\pi i}{2^r}\times\left[2^{k+1+r}x+a_{k+1}\right]+\frac{2^{k+1+r}\cdot\pi i}{2^r 2^p}\right)\\
&= \exp\left(\frac{\pi i}{2^r}\left[2^{k+1+r}\cdot x+a_{k+1}\right]\right)\cdot\exp\left(2^{k-p}\times 2\pi i\right) = R1\left(k,x\right).
\end{aligned}$$

б) $\sum\limits_{j=0}^{1} \mathrm{R1}\left(k, x+\frac{j}{2^{k+1}}\right) = 0.$

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{1} R1\left(k, x+\frac{j}{2^{k+1}}\right) = \sum_{j=0}^{1}\exp\left(\frac{\pi i}{2^r}\left[2^{k+1+r}\cdot\left(x+\frac{j}{2^{k+1}}\right)+a_{k+1}\right]\right)\\
&= \sum_{j=0}^{1}\exp\left(\frac{\pi i}{2^r}\left[2^{k+1+r}\cdot x+a_{k+1}\right]+\frac{\pi i}{2^r}\cdot\frac{2^{k+1+r}\cdot j}{2^{k+1}}\right) R1\left(k,x\right)\cdot\sum_{j=0}^{1}\exp\left(\pi i\cdot j\right) = 0. \quad \triangleright
\end{aligned}$$

3. Если $k \leqslant k_n < k_{n-1} < \cdots < k_1$, а $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ принимают значения 1 или -1, то

$$\int_0^1 R_1^{\varepsilon_1}(k_1,x)\cdot R_1^{\varepsilon_2}(k_2,x)\cdot\ldots\cdot R_1^{\varepsilon_n}(k_n,x)\,dx = 0.$$

$\triangleleft$ На основании того, что:

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 R1^{\varepsilon_1}(k_1,x)R1^{\varepsilon_2}(k_2,x)\cdots R1^{\varepsilon}(k_n,x)dx\\
&= \sum_{l=0}^{2^{k_n}-1}\sum_{j=0}^{1}\int_{\frac{l}{2^{k_n}+\frac{j}{2^{k_n+1}}}}^{\frac{l}{2^{k_n}}+\frac{j+1}{2^{k_n+1}}} R1(k_1,x)\cdots R1(k_n,x)dx\\
&= \sum_{l=0}^{2^{k_n}-1}\int_{\frac{l}{2^{k_n}}}^{\frac{l}{2^{k_n}}+\frac{1}{2^{k_n+1}}}\sum_{j=0}^{1} R1^{\varepsilon_1}\left(k_1, x+\frac{j}{2^{k_n+1}}\right)\cdots R1^{\varepsilon_1}\left(k_n, x+\frac{j}{2^{k_n+1}}\right)\\
&= \sum_{l=0}^{2^{k_n}-1}\int_{\frac{l}{2^{k_n}}}^{\frac{l}{2^{k_n}}+\frac{1}{2^{k_n+1}}} R1^{\varepsilon_1}(k_1,x)\cdot R_1^{\varepsilon_{n-1}}(k_{n-1},x)\sum_{j=0}^{1} R1^{\varepsilon_n}\left(k_n, x+\frac{j}{2^{k_n}+1}\right).
\end{aligned}$$

Используя предыдущие свойства, получаем, что последняя сумма равна

$$\sum_{l=0}^{2^{k_n}-1}\int_{\frac{1}{2^{k_n}}}^{\frac{1}{2^{k_n}}+\frac{1}{2^{k_n+1}}} R1^{\varepsilon_1}(k_1,x)\cdots R_1^{\varepsilon_{n-1}}(k_{n-1},x)\sum_{j=0}^{1} R1^{\varepsilon_n}\left(k_n, x+\frac{j}{2^{k_n}+1}\right)dx = 0. \quad \triangleright$$

Из свойств 1 и 3 получаем, что $\{R1(k,x)_{k=0}^{\infty}\}$ — ортонормальная система.

Модифицированная система Хаара для непрерывного случая имеет вид:

$$H1(k,x) = 2^{\frac{m_c}{2}} R1(m_c+1,x) \cdot \operatorname{rect}\left(x \cdot 2^{m_c} - (k) \bmod 2^{m_c}\right), \tag{5}$$

где $n = 1, 2, \ldots$; $r = 0, 1, \ldots, n-1$; $k = 1, 2, \ldots, n$; $x = 0, \ldots, N-1$; m_c — номер старшего ненулевого разряда в двоичном представлении k; $(k) \bmod 2^{m_c}$ — величина k по модулю 2^{m_c};

Дискретная модифицированная система Хаара определяется следующим образом:

$$H(k,x) = H1\left(k, \frac{x}{2^n}\right). \tag{6}$$

Введенная система обладает следующими свойствами:

1. Система функций ортонормирована:

$$\int\limits_0^1 H1(k,x)H1(p,x)\,dx = \begin{cases} 0, & p \neq k, \\ 1, & p = k. \end{cases}$$

$\triangleleft$ Пусть $p = k$,

$$\int\limits_0^1 H1^2(k,x)\,dx = 2^{m_c} \int\limits_{\frac{1}{2^{m_c}}(k) \bmod 2^{m_c}}^{\frac{1}{2^{m_c}}((k) \bmod 2^{m_c}+1)} 1 \cdot 1\,dx = 1,$$

так как $R1^2(m_c+1,x) = 1$,

$$\operatorname{rect}(x \cdot 2^{m_c} - (k) \bmod 2^{m_c}) = 1, \text{ если } 0 \leqslant x \cdot 2^{m_c} - (k) \bmod 2^{m_c} < 1,$$

то

$$\frac{1}{2^{m_c}}(k) \bmod 2^{m_c} \leqslant x < \frac{1}{2^{m_c}}((k) \bmod 2^{m_c}+1).$$

Пусть $p \neq k$, $p > k$;

$$\int\limits_0^1 H1(k,x)H1(p,x)\,dx = \int\limits_0^1 2^{\frac{m_c}{2}} R1_{m_c+1}(x) \cdot \operatorname{rect}(x2^{m_c} - (k) \bmod 2^{m_c})$$

$$\times 2^{\frac{m_c}{2}} R1_{m_l+1}(x) \cdot \operatorname{rect}\left(x2^{m_c} - (p) \bmod 2^{m_c}\right) dx = 0. \quad \triangleright$$

2. Функции $H(k,x)$ принимают только $n_{\text{ф}} = r$ значений: учитывая вид функции $R1(k,x)$, а также вид функции $H(l,x)$, можно сделать следующий вывод: функции $H1(k,x)$ принимают следующие $n_{\text{ф}} = r$ значений

$$2^{\frac{m_c}{2}} \exp\left(\pi i \cdot 2^{-r}\right) \cdot \operatorname{rect}(2^{n-r-1} - (l) \bmod 2^{m_c}).$$

3. Функции $H(l,x)$ при $l = 0$, $a_l = 0$ совпадают с МФР.

$$\begin{aligned} H(0,x) &= 2^0 \cdot \exp\left(\pi i 2^{-r}\left[2^{1+r-n} \cdot x + 0\right]\right) \cdot \operatorname{rect}\left(x2^0 - (0) \bmod \left(2^0\right)\right) \\ &= \exp\left(\pi i 2^{-r}\left[2^{1+r-n} x\right]\right) = R(1,x). \end{aligned}$$

4. В общем случае система немультипликативна, так как результат поэлементного произведения двух строк матрицы не всегда является элементом строки той же матрицы.

5. При $n_ф = 0, a_k = 0$, где $k = 1, 2, \ldots, n$, система функций совпадает с системой функций Хаара, так как $R(k,x)$ при $r = 0$ является действительной и совпадает с $R1(k,x)$.

6. Матрица $H(l,x)$ несимметрична, так как $H(p,x) \neq H(x,p)$.

Исследуем введенную систему модифицированных функций Хаара на близость к системе ДЭФ (дискретных экспоненциальных функций [2]). Рассмотрим следующую функцию:

$$\rho_{pq} = \frac{1}{N}\left|\sum_{x=0}^{N-1} H(p,x)\overline{\mathrm{def}(q,x)}\right|, \quad \rho_{pq} \leqslant 1. \tag{7}$$

Здесь $q = 0, \ldots, N-1$ — номер функции ДЭФ, $\mathrm{def}(q,x)$ — это произвольная функция ДЭФ. Возьмем в качестве показателя близости $H(p,x)$ к системе функций ДЭФ величину $\rho_{p\max}$ — максимальное по q значение ρ_{pq}. $\rho_{p\max}$ это модуль нормированного скалярного произведения вектора функции $H(p,x)$ и вектора ближайшей функции ДЭФ, а $\rho^2_{p\max}$ — это доля энергии функции $H(p,x)$, содержащаяся в максимальном спектральном компоненте ее дискретного спектра. В качестве показателей близости системы $H(p,x)$ к системе функций ДЭФ примем $\rho_{ск}$ — среднеквадратическое значение $\rho_{p\max}$, а также $\rho_{\min}$ — минимальное по p значение $\rho_{p\max}$. Чем больше значение показателей $\rho_{ск}$, $\rho_{\min}$, тем точнее можно разделять преобразуемые дискретные сигналы на узкополосные составляющие и, следовательно, тем лучше частотно-избирательные свойства системы функций $H(p,x)$.

Приведем расчеты для двух вариантов системы при $a_k = 0$; $a_k = 0.5$.

Рассмотрим различные значения N, $n_ф$ и соответствующие им значения $\rho_{ск}$, $\rho_{\min}$. Результаты приведены в таблице 1.

Таблица 1

$n_ф$	Вариант системы	показатель	N=4	N=8	N=16
0	I	$\rho_{\min}$	0.707	0.5	0.177
	I	$\rho_{ск}$	0.3558	0.3205	0.2454
	II	$\rho_{\min}$	0.0238	0.5	0.177
	II	$\rho_{ск}$	0.3558	0.3355	0.2417
1	I	$\rho_{\min}$	0.707	0.5	0.177
	I	$\rho_{ск}$	0.4464	0.4392	0.3768
	II	$\rho_{\min}$	0.707	0.5	0.177
	II	$\rho_{ск}$	0.4464	0.4392	0.3768
2	I	$\rho_{\min}$		0.5	0.177
	I	$\rho_{ск}$		0.4392	0.3768
	II	$\rho_{\min}$		0.5	0.177
	II	$\rho_{ск}$		0.4392	0.3768
3	I	$\rho_{\min}$			0.177
	I	$\rho_{ск}$			0.3768
	II	$\rho_{\min}$			0
	II	$\rho_{ск}$			0.3768

Избирательные свойства обоих вариантов системы ухудшаются с увеличением N и с уменьшением $n_ф$. При $n_ф \neq 0$ оба варианта системы равноценны. При $n_ф = 0$ вариант обладает лучшими частотно-избирательными свойствами.

Построим для введенной системы функций алгоритм быстрого преобразования. Целесообразность БОП при обработке сигналов в целом обосновывается тем, что БОП обладают рядом желательных свойств для обработки сигналов-изображений (независимостью обработки строк и столбцов при двумерной обработке, линейностью операций над данными, инвариантностью к сдвигу и др.). За последние несколько десятилетий опубликованы обзорные статьи и монографии по синтезу ортогональных преобразований, анализу отдельных свойств БОП, по отдельным вопросам приложения БОП в обработке сигналов по реализации алгоритмов БОП [1, 2].

Для практического применения введенного ДПФ важно наличие способа его быстрого вычисления — алгоритма быстрого преобразования. Основным критерием алгоритма при его реализации на ЭВМ является число арифметических операций. Основная идея быстрого вычисления ДОП состоит в разложении матрицы преобразования в произведение слабозаполненных матриц. Это, так называемая, факторизация матриц, из-за чего достигается уменьшение числа арифметических операций необходимых для вычисления ДОП. Начиная с 1965 г., с опубликования Кули и Тьюки [1] алгоритма БПФ, были получены многочисленные алгоритмы как быстрого преобразования Фурье, так и других ортогональных преобразований. Объектом нашего изучения будет введенный класс ортогональных преобразований Хаара. Рассмотрим прямое и обратное преобразования в системе $H(p, x)$, определяемые выражениями:

$$Y = HZ, \quad Z = \frac{1}{N}\overline{H}Y, \tag{8}$$

где Y — вектор-столбец отсчетов $Y(x)$ преобразуемого сигнала, Z — вектор-столбец спектральных коэффициентов $Z(p)$ сигнала в системе $H(p, x)$.

Быстрое прямое преобразование вычисляется итерационно:

$$Y_0 = Y, \quad Y_m = H_m Y_{m-1} \quad \text{при} \;\; m = 1, 2, \ldots, n,$$

где Y_m — вектор-столбец промежуточных коэффициентов $Y_m(x)$ прямого преобразования; m — номер итерации. Быстрое обратное преобразование вычисляется аналогично:

$$Z_0 = Z, \quad Y_m = \frac{1}{N}Z_n, \quad Z_m = \overline{H}_m Z_{m-1} \quad \text{при} \;\; m = 1, \ldots, n,$$

где Z_m — вектор-столбец промежуточных коэффициентов $Z_m(p)$. Здесь H_m слабозаполненная матрица, причем $H = \prod\limits_{i=0}^{n-1} \sum\limits_{i=0}^{n-1} H_i$. Рассмотрим процесс факторизации. Пусть дана матрица Хаара порядка $n = 3$

$$\mathrm{HAR}_{2^3} = \left|\begin{array}{cccccccc}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
\hdashline
1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
\hdashline
\sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} & & & & \\
\cdashline{1-4}
 & & & & \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\
\cdashline{5-8}
2 & -2 & & & & & & \\
 & & 2 & -2 & & & & \\
 & & & & 2 & -2 & & \\
 & & & & & & 2 & -2
\end{array}\right|. \tag{9}$$

Матрицы Хаара могут быть представлены в виде суммы кронекеровских произведений. Действительно, матрицы Хаара n-го порядка могут быть разбиты на $(n+1)$ подматрицу кронекеровского типа в соответствии с номером старшего, равного единице разряда, номера строки, как показано в (9) штриховыми линиями. Определим следующие элементы функции:

$$V_2^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad V_2^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad U_2^0 = [1 \;\; 1]; \quad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

С помощью кронекеровских произведений этих элементарных функций матрица обобщенного преобразования Хаара может быть записана следующим образом [3]:

$$H\left(p,x\right) = \sum_{i=0}^{n} \left(2^{\frac{i-1}{2}}\right)^{\bar{\sigma}_i} \cdot \left(V_2^{(0)}\right)^{[n-i]} \otimes \left[e^{j\pi 2^{-r}\left[2^{i+r-n}\cdot x+a_i\right]} \cdot V_2^1 \otimes (I_2)^{[i-1]} \otimes U_2^0\right]^{\overline{\delta}_i} \otimes \left(U_2^0\right)^{[n-i]},$$

где $\overline{\delta}_i = \begin{cases} 0, & i=0, \\ 1, & i \neq 0. \end{cases}$

Представим $H(p,x)$ в виде произведения слабозаполненных матриц. Обозначим $D_{2^n}^{H(p,x)} = 1 \oplus \mathop{\overset{\nabla}{\Delta}}\limits_{i=0}^{n-1} \cdot 2^{\frac{i}{2}} \cdot I_{2^i}$, где $\oplus$ — знак прямой суммы, $\mathop{\overset{\nabla}{\Delta}}\limits_{i=0}^{n-1}$ — знак прямой суммы n матриц. Тогда

$$H(p,x) = D_{2^n}^{H(p,x)} \sum_{i=0}^{n} \left(V_2^{(0)}\right)^{[n-i]} \otimes \left[e^{j\pi 2^{-r}[2^{i+r-n}\cdot x+a_i]} \cdot V_2^1 \otimes (I_2)^{[i-1]\otimes U_2^0}\right]^{\overline{\delta}_i} \otimes \left(U_2^0\right)^{[n-i]};$$

$$H(p,x) = D_{2^n}^{H(p,x)} \cdot \overline{H(p,x)}.$$

Обозначим $b_i = e^{j\pi 2^{-r}\left[2^{i+r-n}x+a_i\right]}$. Выделим слагаемое с номером $i=n$:

$$\overline{H(2^n,x)} = V_2^0 \otimes \left[\sum_{i=0}^{n-1} \left(V_2^0\right)^{[n-1-i]} \otimes \left(b_i \cdot V_2^1 \otimes (I_2)^{[i-1]} \otimes U_2^0\right)^{\overline{\delta_i}} \otimes \left(U_2^0\right)^{[n-1-i]}\right]$$

$$\otimes U_2^0 + b_n \cdot V_2^1 \otimes (I_2)^{[n-1]} \otimes U_2^0 = \left[\frac{\overline{H(2^{n-1},x)} \otimes U_2^0}{b_n \cdot (I_2)^{[n-1]} \otimes U_2^0}\right].$$

Так как $I_2^{[n-1]} = I_{2^{n-1}}$, то справедлива следующая теорема:

Теорема 1. *Если* $M = M_{r,s}^{(1)} \otimes M_{q,p}^{(2)}$, *то* $M = \left(M_{r,s}^{(1)} \otimes I_q\right)\left(I_s \otimes M_{q,p}^{(2)}\right)$. *Поэтому*

$$\overline{H(2^n,x)} = \left[\frac{H(2^{n-1},x)(I_{2^{n-1}} \otimes U_2^0)}{b_n I_{2^{n-1}}\left(I_{2^{n-1}} \otimes U_2^0\right)}\right] = \left[\frac{H(2^{n-1},x)(I_{2^{n-1}} \otimes U_2^0)}{I_{2^{n-1}}(b_n I_{2^{n-1}} \otimes U_2^0)}\right].$$

Воспользуемся следующей теоремой из [3]:

Теорема 2. *Известно, что, если* $M = \left[\frac{M_{r,s}^{(1)} M_{s,q}^{(2)}}{M_{u,v}^{(3)} M_{v,q}^{(4)}}\right]$, *то* $M = \left[M_{r,s}^{(1)} \oplus M_{u,v}^{(3)}\right] \cdot \begin{bmatrix} M_{s,q}^{(2)} \\ M_{v,q}^{(4)} \end{bmatrix}$.

Применив ее к предыдущей формуле, получим:

$$\overline{H(2^n,x)} = \left[\overline{H(2^{n-1},x)} \oplus I_{2^{n-1}}\right] \cdot \begin{bmatrix} I_{2^{n-1}} \otimes U_2^0 \\ b_n \cdot I_{2^{n-1}} \otimes U_2^0 \end{bmatrix}.$$

Эта формула является рекуррентным выражением обобщенных матриц Хаара. Выразим $\overline{H(2^{n-1},x)}$ через $\overline{H(2^{n-2},x)}$:

$$\begin{aligned}\overline{H(2^n,x)} &= \left[\left[\overline{H(2^{n-2},x)} \oplus I_{2^{n-2}}\right] \cdot \left[\frac{I_{2^{n-2}} \otimes U_2^0}{b_{n-1} I_{2^{n-2}} \otimes U_2^0}\right] \oplus I_{2^{n-1}}\right] \cdot \left[\frac{I_{2^{n-1}} \otimes U_2^0}{b_n I_{2^{n-1}} \otimes U_2^0}\right] \\ &= \left[\left[\overline{H(2^{n-2},x)} \oplus I_{2^{n-2}}\right] \left[\frac{I_{2^{n-2}} \otimes U_2^0}{b_{n-1} I_{2^{n-2}} \otimes U_2^0}\right] \oplus I_{2^{n-1}} I_{2^{n-1}}\right] \left[\frac{I_{2^{n-1}} \otimes U_2^0}{b_n I_{2^{n-1}} \otimes U_2^0}\right];\end{aligned}$$

$$\overline{H(2^n,x)} = \left[\left[\overline{H(2^{n-2},x)} \oplus I_{2^{n-2}} \oplus I_{2^{n-1}}\right] \cdot \left[\frac{I_{2^{n-2}} \otimes U_2^0}{b_{n-1} I_{2^{n-2}} \otimes U_2^0}\right] \oplus I_{2^{n-1}}\right] \cdot \left[\frac{I_{2^{n-1}} \otimes U_2^0}{b_n I_{2^{n-1}} \otimes U_2^0}\right].$$

Выше было использовано свойство прямой суммы матриц:

$$A_1 A_2 \dots A_n \oplus B_1 B_2 \dots B_n = (A_1 \oplus B_1)(A_2 \oplus B_2) \dots (A_n \oplus B_n).$$

Следовательно,

$$I_{2^{n-2}} \oplus I_{2^{n-1}} = I_{2^{n-2}+2^{n-1}} = I_{3 \cdot 2^{n-2}},$$

$$\overline{H(2^n,x)} = \left[\overline{H(2^{n-2},x} \oplus I_{3\cdot 2^{n-2}}\right] \cdot \left[\left[\frac{I_{2^{n-2}} \otimes U_2^0}{b_{n-1} I_{2^{n-2}} \otimes U_2^0}\right] \oplus I_{2^{n-1}}\right] \cdot \left[\frac{I_{2^{n-1}} \otimes U_2^0}{b_n I_{2^{n-1}} \otimes U_2^0}\right].$$

Продолжая этот процесс, окончательно получим

$$H(p,x) = D_{2^n}^{H(p,x)} \prod_{i=0}^{n-1} \left[\left[\frac{I_{2^i} \otimes U_2^0}{b_{i+1} I_{2^i} \otimes U_2^0}\right] \oplus I_{2^n - 2^{i+1}}\right].$$

Таким образом, обобщенная матрица Хаара представлена в виде произведения n слабозаполненных матриц. В каждой i-ой матрице такого произведения 2^{i+1} строк с только двумя отличными от нуля элементами и $2^n - 2^{i+1}$ строк с только одним не равным 0 элементом. Поэтому умножение матрицы-столбца на такую матрицу требует 2^{i+1} операций сложения и вычитания. Общее число операций сложения-вычитания:

$$N_{\text{сл.}} = \sum_{i=0}^{n-1} 2^{i+1} = 2 \cdot (2^n - 1).$$

Умножение на $D_{2^n}^{H(p,x)}$ требует 2^n операций умножения. Для наглядности алгоритма быстрого преобразования представим его в виде графа на рис. 1, где $n = 3$.

Обратное преобразование обобщенной функции Хаара можно представить как произведение матрицы Хаара на матрицу-столбец: $H(p,x)^{-1} = (\overline{H(p,x)})^T$; так как $(M_1 M_2 \dots M_n)^T = M_n^T M_{n-1}^T \dots M_2^T M_1^T$, а $(A_1 \oplus A_2 \oplus \dots \oplus A_n)^T = A_1^T \oplus A_2^T \oplus \dots \oplus A_n^T$, то

$$H(p,x)^{-1} = D_{2^n}^{H(p,x)} \prod_{i=0}^{n-1} \left[\left[\frac{I_2^{n-1-i} \otimes U_2^0}{b_{n-i-2} I_{2^{n-1-i}} \otimes U_2^0}\right] \oplus I_{2^n - 2^{n-i-1}}\right].$$

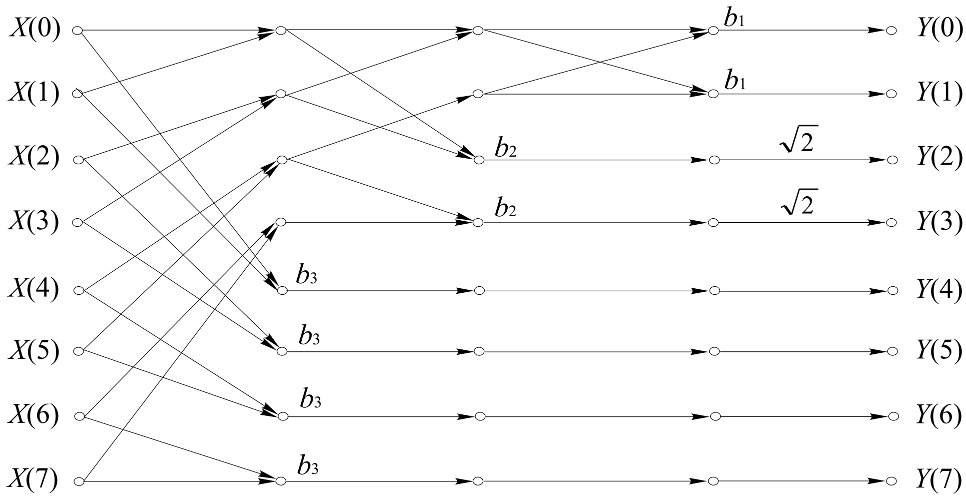

Рис. 1.

Как известно, среди всех линейных ортогональных преобразований оптимальным в смысле наименьшего значения среднеквадратической ошибки является преобразование по собственным векторам ковариационной матрицы данных и ПКЛ (преобразования Карунена — Лоэва). ПКЛ — единственное унитарное преобразование, в котором достигается полная декорреляция обрабатываемого сигнала. В связи с этим возникает вопрос определения процесса, для которого заданное преобразование (в данном случае преобразование введенных модифицированных функций Хаара) является преобразованием Карунена — Лоэва. Пусть f_N — случайный сигнал с ковариационной матрицей $K_N : K_N = \frac{1}{N} R_N R_N^T$; $R_N = \sqrt{N} H_N \Lambda_N^{1/2} M_N$, где M_N — матрица Уолша — Адамара порядка N, т. е. $m_{t,j} = (-1)^{\sum\limits_{l=0}^{p-1} k_l j_l}$, $t = 1, \dots, N$, $(t_0, \dots, t_{p-1})$ и $(j_0, \dots, j_{p-1})$ — двоичные представления чисел $t-1$ и $j-1$ соответственно. Тогда справедливы равенства

$$K_N H_N = H_N \Lambda_N, \qquad \Lambda_N = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N).$$

Литература

1. *Ахмед Н., Рао К. Р.* Ортогональные преобразования при обработке цифровых сигналов.—М.: Связь, 1980.—248 с.
2. *Дагман Э. П., Кухарев Г. А.* Быстрые дискретные ортогональные преобразования.—Новосибирск: Наука, 1983.—232 с.
3. *Ярославский Л. П.* Цифровая обработка сигналов в оптике и голографии. Введение в цифровую оптику—М.: Радио и связь, 1987.—312 с.
4. *Голубов Б. И.* Ряды по системе Хаара // Итоги науки и техники. Мат. анализ.—М.: 1971.—С. 109–146.

Статья поступила 23 июля 2002 г.

Арунянц Геннадий Георгиевич, д. т. н., профессор
г. Владикавказ, Владикавказский научный центр РАН
E-mail: `suro99@mail.ru`

Казарян Мариетта Левоновна, к. ф.-м. н.
г. Владикавказ, Северо-Осетинский госуниверситет
E-mail: `mariettak@alanianet.ru`