Владикавказский математический журнал
Январь–март, 2005, Том 7, Выпуск 1

УДК **517.51+517.98**

АБСОЛЮТНО ПРЕДСТАВЛЯЮЩИЕ СИСТЕМЫ ЭКСПОНЕНТ С МНИМЫМИ ПОКАЗАТЕЛЯМИ В ПРОСТРАНСТВАХ УЛЬТРАДЖЕТОВ НОРМАЛЬНОГО ТИПА И ПРОДОЛЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ ПО УИТНИ[1]

Д. А. Абанина

Установлено, что справедливость аналога теоремы Уитни для пространств ультраджетов нормального типа эквивалентна существованию в этих пространствах абсолютно представляющих систем экспонент с мнимыми показателями.

В работах Ю. Ф. Коробейника [1, 2] была обнаружена и исследована взаимосвязь между вопросами продолжения функций по Уитни и наличием в соответствующих пространствах абсолютно представляющих систем (АПС) экспонент с мнимыми показателями. Применяя методы этих работ, мы рассматриваем аналогичный вопрос для пространств ультрадифференцируемых функций (УДФ) нормального типа, которые изучались ранее в [3, 4]. Отличительной чертой нашего исследования является то, что на компакт, с которого ведется продолжение, не налагается никаких ограничений (в [1] требовалось, чтобы компакт совпадал с замыканием своей внутренности, т. е. был толстым). В качестве вспомогательного результата получено представляющее и самостоятельный интерес необходимое условие справедливости аналога теоремы Уитни для пространств ультраджетов нормального типа, формулируемое в терминах весовой функции.

1. Пространства УДФ нормального типа и соответствующие им пространства ультраджетов

В подходе Бёрлинга — Бьорка неквазианалитические классы УДФ нормального типа [3, 4] вводятся с помощью почти полуаддитивной сверху весовой функции.

1.1. Определение (см. [5]). *Весовой функцией* называется непрерывная неубывающая функция $\omega : [0,\infty) \to [0,\infty)$, удовлетворяющая следующим условиям:

а) $\omega(2t) = O(\omega(t))$, $t \to \infty$;

б) $\int\limits_0^\infty \dfrac{\omega(t)}{1+t^2}\,dt < \infty$;

в) $\ln t = o(\omega(t))$, $t \to \infty$;

г) $\varphi_\omega(x) := \omega(e^x)$ выпукла на $[0,\infty)$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 02-01-00372.

1.2. Определение (см. [3, 4]). Весовая функция ω называется *почти полуаддитивной сверху*, если для любого $p > 1$ найдется $C > 0$ такое, что $\omega(x+y) \leqslant p(\omega(x)+\omega(y))+C$ при всех $x, y \geqslant 0$.

Пусть ω — почти полуаддитивная сверху весовая функция. Без ограничения общности можно считать, что $\omega\big|_{[0,1]} = 0$. Как обычно, $\varphi^*_\omega(y) := \sup\{xy - \varphi_\omega(x) \,:\, x \geqslant 0\}$ — сопряженная по Юнгу к φ_ω. Для функции $f \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ и чисел $s \in (0,\infty)$, $l \in \mathbb{N}$ положим

$$|f|_{\omega,s,l} := \sup_{\alpha\in\mathbb{N}_0^N} \sup_{\|x\|\leqslant l} |f^{(\alpha)}(x)| \exp\big(-s\varphi^*_\omega(|\alpha|/s)\big),$$

где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$ — мультииндекс, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_N$ — длина мультииндекса, $f^{(\alpha)} := \dfrac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_N^{\alpha_N}}$, $\|x\| = \max\{|x_j| \,:\, 1 \leqslant j \leqslant N\}$ для $x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N$. Пусть $q \in (0,\infty)$. Определим следующие пространства:

$$\mathcal{E}_{\omega,s,l}(\mathbb{R}^N) := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^N) \,:\, |f|_{\omega,s,l} < \infty\},$$

$$\mathcal{E}^q_{(\omega)}(\mathbb{R}^N) := \bigcap_{l\in\mathbb{N}} \bigcap_{s\in(0,q)} \mathcal{E}_{\omega,s,l}(\mathbb{R}^N) \Big(= \bigcap_{l\in\mathbb{N}, l>\frac{1}{q}} \mathcal{E}_{\omega,q-\frac{1}{l},l}(\mathbb{R}^N)\Big),$$

$$\mathcal{E}^q_{\{\omega\}}(\mathbb{R}^N) := \bigcap_{l\in\mathbb{N}} \bigcup_{s\in(q,\infty)} \mathcal{E}_{\omega,s,l}(\mathbb{R}^N).$$

Пространства $\mathcal{E}^q_{(\omega)}(\mathbb{R}^N)$ и $\mathcal{E}^q_{\{\omega\}}(\mathbb{R}^N)$ называются, соответственно, *пространствами УДФ Бёрлинга и Румье* нормального типа q.

Для непустого компакта K в $\mathbb{R}^N$ обозначим через $\rho_K : f \longmapsto \big(f^{(\alpha)}\big|_K\big)_{\alpha\in\mathbb{N}_0^N}$ отображение сужения, действующее из $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ в пространство $J(K)$ всех джетов на компакте K (т. е. $J(K)$ — пространство последовательностей $g = (g^\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}_0^N}$, непрерывных на компакте K функций). Для $s \in (0,\infty)$ и $f = (f^\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}_0^N} \in J(K)$ полагаем

$$|f|_{\omega,s,K} := \sup_{\alpha\in\mathbb{N}_0^N} \sup_{x\in K} |f^\alpha(x)| \exp\big(-s\varphi^*_\omega(|\alpha|/s)\big)\ ,$$

$$|f|^K_{\omega,s} := \sup_{m\in\mathbb{N}_0} \sup_{|\alpha|\leqslant m} \sup_{\substack{x,y\in K\\ x\neq y}} \frac{|(R^m_x f)^\alpha(y)|(m+1-|\alpha|)!}{(N\|y-x\|)^{m+1-|\alpha|} \exp s\varphi^*_\omega\left(\frac{m+1}{s}\right)}\ ,$$

где

$$(R^m_x f)^\alpha(y) := f^\alpha(y) - \sum_{\substack{|\beta|\leqslant m-|\alpha|\\ \beta\in\mathbb{N}_0^N}} \frac{f^{\alpha+\beta}(x)}{\beta!}(y-x)^\beta \quad (\text{здесь } \beta! = \beta_1! \ldots \beta_N!).$$

Если K одноточечно, то считаем $|f|^K_{\omega,s} = 0$ для любого $f \in J(K)$. Обозначим $\|\cdot\|_{\omega,s,K} := |\cdot|_{\omega,s,K} + |\cdot|^K_{\omega,s}$ и введем пространства

$$\mathcal{E}_{\omega,s}(K) := \{f \in J(K) \,:\, \|f\|_{\omega,s,K} < \infty\}\ ,$$

$$\mathcal{E}^q_{(\omega)}(K) := \bigcap_{s\in(0,q)} \mathcal{E}_{\omega,s}(K), \quad \mathcal{E}^q_{\{\omega\}}(K) := \bigcup_{s\in(q,\infty)} \mathcal{E}_{\omega,s}(K).$$

Пространства $\mathcal{E}^q_{(\omega)}(K)$ и $\mathcal{E}^q_{\{\omega\}}(K)$ называются, соответственно, *пространствами ультраджетов Бёрлинга и Румье нормального типа* $q \in (0,\infty)$. Будем в дальнейшем использовать одно обозначение $\mathcal{E}_*$ для обоих пространств, если это не вызывает недоразумений.

Используя соотношение

$$\sum_{\beta\in\mathbb{N}_0^N,\,|\beta|=k}\frac{1}{\beta!}=\frac{N^k}{k!},\quad k\in\mathbb{N}_0,$$

нетрудно проверить, что ρ_K действует из $\mathcal{E}_*^q(\mathbb{R}^N)$ в $\mathcal{E}_*^q(K)$. Кроме того, оно же позволяет доказать, что если $g\in C^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\Pi_l=\{x\in\mathbb{R}^N:\ \|x\|\leqslant l\}$, $l\in\mathbb{N}$, $G=\big(g^{(\alpha)}\big|_{\Pi_l}\big)_{\alpha\in\mathbb{N}_0^N}$, то $|G|_{\omega,s}^{\Pi_l}\leqslant|G|_{\omega,s,\Pi_l}$ для всех $s>0$.

Говорят, что для $\mathcal{E}_*^q(K)$ справедлив аналог теоремы Уитни о продолжении, если оператор $\rho_K\ :\mathcal{E}_*^q(\mathbb{R}^N)\to\mathcal{E}_*^q(K)$ сюръективен.

В дальнейшем нам понадобятся следующие понятия, введенные в [6] (см. также [7]).

1.3. Определение. Последовательность $X=\{x_k\}_{k=1}^\infty$ элементов локально выпуклого пространства H называется *абсолютно представляющей системой* (АПС) в H, если любой элемент $x\in H$ допускает представление вида $x=\sum_{k=1}^\infty c_kx_k$, и ряд $\sum_{k=1}^\infty c_kx_k$ сходится абсолютно в H.

1.4. Определение. Пусть $H=\operatorname{lim\,ind}H_n$ — внутренний индуктивный предел локально выпуклых пространств H_n. Последовательность $X=\{x_k\}_{k=1}^\infty$ элементов пространства H называется *индуктивно абсолютно представляющей системой* (ИАПС), если любой элемент $x\in H$ допускает представление вида $x=\sum_{k=1}^\infty c_kx_k$ такое, что $c_kx_k\in H_n$ при всех $k\in\mathbb{N}$ и некотором $n=n(x)\in\mathbb{N}$, причем ряд $\sum_{k=1}^\infty c_kx_k$ сходится абсолютно в H_n.

Ясно, что ИАПС в $H=\operatorname{lim\,ind}H_n$ будет также и АПС в H.

Пусть топология в $\mathcal{E}_{\omega,s}(K)$ задается нормой $\|\cdot\|_{\omega,s,K}$. При этом, как известно, данное пространство будет банаховым. Далее, наделим $\mathcal{E}_{(\omega)}^q(K)$ и $\mathcal{E}_{\{\omega\}}^q(K)$ топологиями

$$\operatorname*{proj}_{s\in(0,q)}\mathcal{E}_{\omega,s}(K)=\operatorname*{proj}_{n\in\mathbb{N},n>\frac1q}\mathcal{E}_{\omega,q-\frac1n}(K)\quad\text{и}\quad\operatorname*{ind}_{s\in(q,\infty)}\mathcal{E}_{\omega,s}(K)=\operatorname*{ind}_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{E}_{\omega,q+\frac1n}(K)$$

соответственно.

Для фиксированного $\mu\in\mathbb{R}^N$ рассмотрим джет $\lambda_\mu:=\big(i^{|\alpha|}\mu^\alpha\exp i\langle\mu,\cdot\rangle\big|_K\big)_{\alpha\in\mathbb{N}_0^N}$, порожденный экспонентой $\exp i\langle\mu,x\rangle$, $x\in\mathbb{R}^N$, с мнимым показателем (здесь $\mu^\alpha=\mu_1^{\alpha_1}\dots\mu_N^{\alpha_N}$, $\langle\mu,x\rangle=\sum_{j=1}^N\mu_jx_j$). Нетрудно проверить, что $\lambda_\mu\in\mathcal{E}_*^q(K)$ для любого $\mu\in\mathbb{R}^N$. Действительно, возьмем $l\in\mathbb{N}$ такое, что $K\subset\Pi_l=\{x\in\mathbb{R}^N:\ \|x\|\leqslant l\}$. Тогда для всех $s>0$

$$\begin{aligned}\|\lambda_\mu\|_{\omega,s,K}&\leqslant\|\lambda_\mu\|_{\omega,s,\Pi_l}\leqslant2|\lambda_\mu|_{\omega,s,\Pi_l}=2\sup_{\alpha\in\mathbb{N}_0^N}|\mu^\alpha|\exp\big(-s\varphi_\omega^*(|\alpha|/s)\big)\\&\leqslant2\exp\big[s\sup_{y\geqslant0}\big(y\ln\|\mu\|-\varphi_\omega^*(y)\big)\big]=\begin{cases}2\exp s\varphi_\omega^{**}(\ln\|\mu\|), & \text{если } \|\mu\|\geqslant1,\\2, & \text{если } \|\mu\|<1\end{cases}\\&=2\exp s\omega(\|\mu\|).\end{aligned}\tag{1}$$

Итак, все джеты, порожденные экспонентами с мнимыми показателями, принадлежат пространству $\mathcal{E}_*^q(K)$. Выпишем теперь систему таких джетов специального вида. Пусть

$$K\subset T_{a,b}:=\{x\in\mathbb{R}^N\ :\ a<x<b\}=\{x\in\mathbb{R}^N:\ a_j<x_j<b_j,\ 1\leqslant j\leqslant N\}$$

$(a,b\in\mathbb{R}^N,\ a_j<b_j,\ 1\leqslant j\leqslant N)$ и пусть

$$\Lambda_{a,b}:=\Big\{\lambda_{\frac{2\pi\beta}{b-a}}\Big\}_{\beta\in\mathbb{N}_0^N},\quad\frac{2\pi\beta}{b-a}=\left(\frac{2\pi\beta_1}{b_1-a_1},\dots,\frac{2\pi\beta_N}{b_N-a_N}\right).\tag{$*$}$$

В соответствии с введенным выше обозначением, для любого $\beta \in \mathbb{N}_0^N$

$$\lambda_{\frac{2\pi\beta}{b-a}} = \left((2\pi i)^{|\alpha|} \Big(\frac{\beta}{b-a}\Big)^{\alpha} \exp 2\pi i \Big\langle \beta, \frac{\cdot}{b-a} \Big\rangle \Big|_K \right)_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N}.$$

Основным результатом работы является

1.5. Теорема. *Пусть ω — почти полуаддитивная сверху весовая функция, K — непустой компакт в $\mathbb{R}^N$, $q \in (0, \infty)$. Следующие утверждения эквивалентны:*

(i) *для $\mathcal{E}^q_{(\omega)}(K)$ (соответственно $\mathcal{E}^q_{\{\omega\}}(K)$) справедлив аналог теоремы Уитни о продолжении;*

(ii) *в $\mathcal{E}^q_{(\omega)}(K)$ (соответственно в $\mathcal{E}^q_{\{\omega\}}(K)$) существует АПС (соответственно ИАПС) из джетов, порождаемых экспонентами с мнимыми показателями;*

(iii) *если $K \subset T_{a,b} := \{x \in \mathbb{R}^N : a < x < b\}$, то система джетов из $(*)$ представляет собой АПС (соответственно ИАПС) в $\mathcal{E}^q_{(\omega)}(K)$ (соответственно в $\mathcal{E}^q_{\{\omega\}}(K)$).*

Заметим, что, как будет видно из доказательства этого результата, если для какого-либо джета $f = (f^\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N}$ из $\mathcal{E}^q_*(K)$ можно эффективно построить функцию F из $\mathcal{E}^q_*(\mathbb{R}^N)$ такую, что $\rho_K(F) = f$, то и коэффициенты хотя бы одного разложения f по системе $(*)$ определяются эффективно. Верно и обратное утверждение.

2. Вспомогательные результаты

Установим сначала необходимое условие сюръективности оператора ρ_k.

2.1. Теорема. *Пусть ω — почти полуаддитивная сверху весовая функция, K — непустой компакт в $\mathbb{R}^N$, $q \in (0, \infty)$. Если оператор $\rho_K : \mathcal{E}^q_*(\mathbb{R}^N) \to \mathcal{E}^q_*(K)$ сюръективен, то $\lim\limits_{t\to\infty} \omega(2t)/\omega(t) = 1$, т. е. ω — медленно меняющаяся функция.*

По поводу медленно меняющихся функций см. [8], а по поводу медленно меняющихся весовых функций — [3, 4].

Доказательство этого утверждения базируется на построении специального семейства полиномов и ассоциированного с ним семейства линейных непрерывных функционалов на рассматриваемых пространствах. Отметим, что поскольку $\mathcal{E}^q_\omega(\mathbb{R}^N) = \mathcal{E}^1_{q\omega}(\mathbb{R}^N)$ и $\mathcal{E}^q_\omega(K) = \mathcal{E}^1_{q\omega}(K)$, то нам достаточно изучить случай $q = 1$. Будем рассматривать $\mathcal{E}_{\omega,s,l}(\mathbb{R}^N)$ как полунормированное пространство с преднормой $|\cdot|_{\omega,s,l}$. Возьмем числовые последовательности $\{q_n\}_{n=1}^\infty$ и $\{r_n\}_{n=1}^\infty$ такие, что $0 < q_n \uparrow 1$, $\infty > r_n \downarrow 1$ и наделим пространства $\mathcal{E}^1_{(\omega)}(\mathbb{R}^N)$ и $\mathcal{E}^1_{\{\omega\}}(\mathbb{R}^N)$ топологиями $\operatorname*{proj}\limits_n \mathcal{E}_{\omega,q_n,n}(\mathbb{R}^N)$ и $\operatorname*{proj}\limits_l \operatorname*{ind}\limits_n \mathcal{E}_{\omega,r_n,l}(\mathbb{R}^N)$ соответственно. Тогда $\mathcal{E}^1_{(\omega)}(\mathbb{R}^N)$ является пространством Фреше, а $\mathcal{E}^1_{\{\omega\}}(\mathbb{R}^N)$, как отмечено в [4, с. 203], — так называемым $\mathcal{PUF}$-пространством (по поводу этого понятия см. [9, Приложение 1, с. 231]).

Для весовой функции ω определим ее гармоническое продолжение в верхнюю и нижнюю полуплоскости как

$$P_\omega(x+iy) = \begin{cases} \frac{|y|}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega(|t|)}{(t-x)^2+y^2}\, dt, & \text{если } y \neq 0, \\ \omega(|x|), & \text{если } y = 0. \end{cases}$$

Приведем теперь формулировку нужной нам леммы 6.3 из [4].

2.2. Лемма. *Пусть ω — почти полуаддитивная сверху весовая функция. Существует семейство полиномов $\{g_{R,\gamma}(\zeta)\ :\ R \in [1,\infty),\ \gamma \in (0,1)\}$ одного переменного $\zeta \in \mathbb{C}$, удовлетворяющее условиям:*

(1) $(\forall R \in [1,\infty))\,(\forall \gamma \in (0,1))\ \ g_{R,\gamma}(iR) \geqslant \exp \gamma P_\omega(iR)$;

(2) $(\forall \gamma \in (0,1))\,(\exists \gamma_1 \in (\gamma,1))\,(\exists C > 0)$ *такие, что*

$$(\forall R \in [1,\infty))\,(\forall \zeta \in \mathbb{C}) \quad |g_{R,\gamma}(\zeta)| \leqslant C \exp\big(C|\operatorname{Im}\zeta| + \gamma_1 \omega(|\zeta|)\big).$$

Прежде, чем перейти к доказательству предложения 2.1, напомним еще [4, с. 204], [10, теорема 3], что преобразование Фурье — Лапласа функционалов $\varphi \mapsto \hat{\varphi}(z) := \langle \varphi_x, \exp(-i\langle x,z\rangle)\rangle$ устанавливает топологический изоморфизм между $\big(\mathcal{E}^1_*(\mathbb{R}^N)\big)'_\beta$ и $A_*(\mathbb{C}^N)$, где

$$A_{(\omega)}(\mathbb{C}^N) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_{\omega,q_n,n}(\mathbb{C}^N), \quad A_{\{\omega\}}(\mathbb{C}^N) = \bigcup_{l\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_{\omega,r_n,l}(\mathbb{C}^N),$$

а

$$A_{\omega,h,l}(\mathbb{C}^N) = \left\{ g \in H(\mathbb{C}^N) :\ \|g\|_{h\omega,l} = \sup_{z\in\mathbb{C}^N} \frac{|g(z)|}{\exp\big(l\|\operatorname{Im} z\| + h\omega(\|z\|)\big)} < \infty \right\}.$$

При этом топология в $A_{\omega,h,l}(\mathbb{C}^N)$ задается нормой $\|\cdot\|_{h\omega,l}$, а $A_{(\omega)}(\mathbb{C}^N)$ и $A_{\{\omega\}}(\mathbb{C}^N)$ наделяются топологиями $\operatorname*{ind}_n A_{\omega,q_n,n}(\mathbb{C}^N)$ и $\operatorname*{ind}_l \operatorname*{proj}_n A_{\omega,r_n,l}(\mathbb{C}^N)$ соответственно. Понятно, что выполняются равенства

$$A_{(\omega)}(\mathbb{C}^N) = \bigcup_{l\in\mathbb{N}} \bigcup_{s\in(0,1)} A_{\omega,s,l}(\mathbb{C}^N), \quad A_{\{\omega\}}(\mathbb{C}^N) = \bigcup_{l\in\mathbb{N}} \bigcap_{s\in(1,\infty)} A_{\omega,s,l}(\mathbb{C}^N).$$

$\lhd$ Доказательство теоремы 2.1. Без ограничения общности можно считать, что $0 \in K \subset \{x \in \mathbb{R}^N\ :\ x_1 \geqslant 0\}$.

1) Заметим, что так как отображение ρ_K сюръективно, то оно открыто. Для пространств Бёрлинга это следует из теоремы Банаха об открытом отображении, а для пространств Румье — из теоремы Райкова [9, Приложение 1, теорема 3].

2) Предположим, рассуждая от противного, что ω не является медленно меняющейся функцией. Тогда, по лемме 2.7 из [4], найдутся $p_0 > 1$ и последовательность $\{R_m\}_{m=1}^\infty$, $1 \leqslant R_m \uparrow \infty$, для которых

$$P_\omega(iR_m) \geqslant p_0 \omega(R_m), \quad m \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Пусть $\{g_{R,\gamma}(\zeta)\ :\ R \in [1,\infty),\ \gamma \in (0,1)\}$ — семейство полиномов, построенное с помощью леммы 2.2. Возьмем $\gamma_0 \in (0,1)$ так, чтобы $\gamma_0 p_0 > 1$, и положим $Q_m := g_{R_m,\gamma_0}(\zeta) = \sum\limits_{k=0}^{n_m} a_{m,k}\zeta^k$, $\zeta \in \mathbb{C}$, $m \in \mathbb{N}$.

3) Введем в рассмотрение линейные функционалы

$$\mu_m(f) := \sum_{k=0}^{n_m} (-i)^k a_{m,k} f^{(k,0,\ldots,0)}(0), \quad f = (f^\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}_0^N} \in J(K).$$

Для произвольных $s > 0$ и $f \in \mathcal{E}_{\omega,s}(K)$ имеем:

$$|\mu_m(f)| \leqslant \sum_{k=0}^{n_m} |a_{m,k}| |f|_{\omega,s,K} \exp s\varphi^*_\omega\left(\frac{k}{s}\right) \leqslant \|f\|_{\omega,s,K} \exp s\varphi^*_\omega\left(\frac{n_m}{s}\right) \sum_{k=0}^{n_m} |a_{m,k}|.$$

Из этого, как нетрудно видеть, следует, что все μ_m непрерывны на $\mathcal{E}^1_*(K)$.

4) Пусть f_m — джет, порожденный функцией $\exp(-R_m x_1)$. Взяв замкнутый параллелепипед $\Pi : K \subset \Pi \subset \{x \in \mathbb{R}^N : x_1 \geqslant 0\}$ и проводя оценки, аналогичные (1), получаем

$$0 < \|f_m\|_{\omega,s,K} \leqslant 2|f_m|_{\omega,s,\Pi} = 2\exp s\omega(R_m), \quad s > 0,\ m \in \mathbb{N}.$$

С другой стороны, учитывая оценку (1) леммы 2.2 и неравенство (2), имеем:

$$\mu_m(f_m) = \sum_{k=0}^{n_m} (-i)^k a_{m,k}(-R_m)^k = Q_m(iR_m) = g_{R_m,\gamma_0}(iR_m)$$
$$\geqslant \exp \gamma_0 P_\omega(iR_m) \geqslant \exp p_0\gamma_0\omega(R_m), \quad m \in \mathbb{N}.$$

Следовательно,

$$\frac{\mu_m(f_m)}{\|f_m\|_{\omega,s,K}} \geqslant \frac{1}{2}\exp\big[(p_0\gamma_0 - s)\omega(R_m)\big], \quad m \in \mathbb{N}.$$

Значит, $\dfrac{\mu_m(f_m)}{\|f_m\|_{\omega,s,K}} \to \infty$ при $m \to \infty$, если $s < p_0\gamma_0$. Учитывая неравенство $p_0\gamma_0 > 1$, заключаем, что множество $\{\mu_m : m \in \mathbb{N}\}$ не является равностепенно непрерывным в $\big(\mathcal{E}^1_*(K)\big)'$.

5) Теперь рассмотрим множество $\{\widehat{\rho'_K\mu_m} : m \in \mathbb{N}\}$, где ρ'_K — сопряженный оператор к ρ_K, а $\widehat{\rho'_K\mu_m}$ — преобразование Фурье — Лапласа функционала $\rho'_K\mu_m$. Оператор ρ'_k действует из $\big(\mathcal{E}^1_*(K)\big)'$ в $\big(\mathcal{E}^1_*(\mathbb{R}^N)\big)'$ по правилу

$$\langle \rho'_K\mu, f\rangle = \langle \mu, \rho_K f\rangle, \quad \mu \in \big(\mathcal{E}^1_*(K)\big)', \quad f \in \mathcal{E}^1_*(\mathbb{R}^N).$$

Поэтому для всех $f \in \mathcal{E}^1_*(\mathbb{R}^N)$ и $m \in \mathbb{N}$ имеем

$$(\rho'_K\mu_m)(f) = \mu_m\Big(\big(f^{(\alpha)}|_K\big)_{\alpha\in\mathbb{N}_0^N}\Big) = \sum_{k=0}^{n_m} (-i)^k a_{m,k}\frac{\partial^k f}{\partial x_1^k}(0).$$

Отсюда следует, что

$$\widehat{\rho'_K\mu_m}(z) = [\rho'_K\mu_m](\exp(-i\langle x, z\rangle)) = \sum_{k=0}^{n_m} (-i)^k a_{m,k}(-iz_1)^k$$
$$= Q_m(-z_1) = g_{R_m,\gamma_0}(-z_1), \quad z \in \mathbb{C}^N.$$

Используя условие (2) леммы 2.2, находим $\gamma_1 \in (\gamma_0, 1)$ и $C > 0$ такие, что для всех $z \in \mathbb{C}^N$ и $m \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$|\widehat{\rho'_K\mu_m}(z)| \leqslant C\exp\big(C|\mathrm{Im}\, z_1| + \gamma_1\omega(|z_1|)\big) \leqslant \exp\big(C\|\mathrm{Im}\, z\| + \gamma_1\omega(\|z\|)\big).$$

Значит, для всех $s > \gamma_1$ и для произвольных $z \in \mathbb{C}^N$ и $m \in \mathbb{N}$ справедлива оценка

$$\frac{|\widehat{\rho'_K\mu_m}(z)|}{\exp\big(([C]+1)\|\mathrm{Im}\, z\| + s\omega(\|z\|)\big)} \leqslant C\exp(\gamma_1 - s)\omega(\|z\|) \leqslant C.$$

Это означает, что множество $\{\widehat{\rho'_K\mu_m} : m \in \mathbb{N}\}$ содержится и ограничено в $A_{\omega,s,[C]+1}(\mathbb{C}^N)$ для всех $s > \gamma_1$. Поскольку $\gamma_1 < 1$, отсюда следует, что $\{\widehat{\rho'_K\mu_m} : m \in \mathbb{N}\}$ — ограниченное множество в $A_*(\mathbb{C}^N)$.

6) Как было отмечено выше, преобразование Фурье — Лапласа является топологическим изоморфизмом $\big(\mathcal{E}^1_*(\mathbb{R}^N)\big)'_\beta$ на $A_*(\mathbb{C}^N)$. Поэтому, учитывая пункт 5, заключаем, что множество $\{\rho'_K\mu_m \,:\, m\in\mathbb{N}\}$ ограничено в $\big(\mathcal{E}^1_*(\mathbb{R}^N)\big)'_\beta$. А значит, оно и слабо ограничено в $\big(\mathcal{E}^1_*(\mathbb{R}^N)\big)'$. Далее, $\mathcal{E}^1_{(\omega)}(\mathbb{R}^N)$ бочечно как пространство Фреше, а $\mathcal{E}^1_{\{\omega\}}(\mathbb{R}^N)$ бочечно как индуктивный предел банаховых (а следовательно, бочечных) пространств. Применяя [9, следствие 1 на с. 100], получаем, что множество $\{\rho'_K\mu_m \,:\, m\in\mathbb{N}\}$ равностепенно непрерывно. Так как ρ_K открыто (см. пункт 1), то из [11, следствие 8.6.11] вытекает, что ρ'_K инъективно и множество $(\rho'_k)^{-1}\big(\{\rho'_K\mu_m \,:\, m\in\mathbb{N}\}\big)=\{\mu_m \,:\, m\in\mathbb{N}\}$ равностепенно непрерывно в $\big(\mathcal{E}^1_*(K)\big)'$. Но это противоречит пункту 4. Таким образом, теорема доказана. $\rhd$

Два следующих вспомогательных результата посвящены построению срезающей функции и умножению в пространстве $\mathcal{E}^q_*(\mathbb{R}^N)$.

2.3. Предложение. *Пусть ω — весовая функция, K — непустой компакт в $\mathbb{R}^N$, $\varepsilon>0$, $K_\varepsilon := K+\{x\in\mathbb{R}^N \,:\, \|x\|\leqslant\varepsilon\}$. Тогда можно конструктивно построить функцию $\varphi\in C^\infty(\mathbb{R}^N)$, удовлетворяющую условиям:*

(1) $\varphi\big|_{K_\varepsilon}=1$,

(2) $\operatorname{supp}\varphi\subset K_{3\varepsilon}$,

(3) $\int\limits_{\mathbb{R}^N}|\widehat{\varphi}(t)|\exp s\omega(\|t\|)\,dt<\infty$ *для всех* $s>0$.

Здесь $\widehat{\varphi}(t)=\int\limits_{\mathbb{R}^N}\varphi(x)\exp(-i\langle t,x\rangle)dx$ *— преобразование Фурье функции* φ.

$\lhd$ Как известно [5, лемма 1.6], можно конструктивно построить весовую функцию σ такую, что $\omega(t)=o(\sigma(t))$ при $t\to\infty$. Далее, с помощью [5, лемма 2.3] строим (опять же конструктивно) функцию $g\in C^\infty(\mathbb{R})$ такую, что $g\neq 0$, $\operatorname{supp} g\subset[0,\infty)$ и $|\widehat{g}(x)|\leqslant \exp(-\sigma(|x|))$ для любого $x\in\mathbb{R}$. Без ограничения общности можно считать, что $0\in\operatorname{supp} g$. Положим $\psi := (\operatorname{Re} g)^2+(\operatorname{Im} g)^2$. Тогда $\psi\in C^\infty(\mathbb{R})$, $\psi\geqslant 0$, $\psi\neq 0$, $\operatorname{supp}\psi\subset[0,\infty)$ и

$$|\widehat{\psi}(x)|=\frac{1}{2\pi}\big|\widehat{g}*\widehat{\overline{g}}\big|=\frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty}\widehat{g}(t)\widehat{\overline{g}}(x-t)\,dt\right|=\frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty}\widehat{g}(t)\overline{\widehat{g}}(t-x)\,dt\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\big(-\sigma(|t|)-\sigma(|x-t|)\big)\,dt$$

$$\leqslant\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{1}{2}\sigma(|t|)\right)\exp\left(-\frac{1}{2}(\sigma(|t|)+\sigma(|x-t|))\right)\,dt.$$

Используя условие 1.1 (a) для функции σ, найдем $M>1$ так, чтобы $\sigma(2t)\leqslant M(\sigma(t)+1)$ для каждого $t\geqslant 0$. Тогда $\sigma(|t|)+\sigma(|x-t|)\geqslant\dfrac{1}{M}\sigma(|t|+|x-t|)-1\geqslant\dfrac{1}{M}\sigma(|x|)-1$ для всех $x,t\in\mathbb{R}$. Значит,

$$|\widehat{\psi}(x)|\leqslant C\exp\left(-\frac{1}{2M}\,\sigma(|x|)\right),\quad x\in\mathbb{R},$$

где $C:=\dfrac{\sqrt{e}}{\pi}\int\limits_0^\infty\exp\left(-\dfrac{1}{2}\,\sigma(t)\right)dt<\infty$ (в силу 1.1 (в), примененного к σ).

Определим теперь функцию $\gamma(x) := \psi(1+x)\psi(1-x)$, $x \in \mathbb{R}$. Понятно, что $\gamma \geqslant 0$, $\gamma \neq 0$, $\gamma \in C^\infty(\mathbb{R})$ и $\operatorname{supp}\gamma \subset [-1,1]$. Далее,

$$|\widehat{\gamma}(x)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{it}\widehat{\psi}(t)e^{-i(x-t)}\widehat{\psi}(-(x-t))dt\right| \leqslant \frac{C^2}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{1}{2M}\sigma(|t|)-\frac{1}{2M}\sigma(|x-t|)\right)dt$$

$$\leqslant \frac{C^2}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{1}{4M}\sigma(|t|)\right)\exp\left(-\frac{1}{4M}\big(\sigma(|t|)+\sigma(|x-t|)\big)\right)dt \leqslant C_1\exp\left(-\frac{1}{4M^2}\sigma(|x|)\right),$$

где

$$C_1 := \frac{C^2\exp\frac{1}{4M}}{\pi}\int\limits_0^\infty \exp\left(-\frac{1}{4M}\sigma(t)\right)dt.$$

Для произвольного $x = (x_1,\ldots,x_N) \in \mathbb{R}^N$ положим

$$\eta(x_1,\ldots,x_N) := \frac{1}{\varepsilon^N A^N}\gamma\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right)\ldots\gamma\left(\frac{x_N}{\varepsilon}\right), \quad A = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\gamma(x)dx > 0.$$

Очевидно, что $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\eta \geqslant 0$, $\eta \neq 0$, $\int\limits_{\mathbb{R}^N}\eta(x)\,dx = 1$ и $\operatorname{supp}\eta \subset [-\varepsilon,\varepsilon]^N$. Кроме того,

$$|\widehat{\eta}(x)| = \frac{1}{A^N}\prod_{j=1}^N|\widehat{\gamma}(\varepsilon x_j)| \leqslant \frac{C_1^N}{A^N}\exp\left(-\frac{1}{4M^2}\sigma(\varepsilon\|x\|)\right), \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{3}$$

Наконец, пусть

$$\varphi(x) := (\eta * \chi)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^N}\chi(x-t)\eta(t)\,dt, \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

где

$$\chi(t) = \begin{cases} 1, & t \in K_{2\varepsilon}, \\ 0, & t \notin K_{2\varepsilon} \end{cases}$$

— характеристическая функция компакта $K_{2\varepsilon}$. Тогда, как известно, $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\operatorname{supp}\varphi \subset K_{3\varepsilon}$, $\varphi\big|_{K_\varepsilon} = 1$ и $\widehat{\varphi} = \widehat{\eta}\cdot\widehat{\chi}$. Используя (3) и оценку $|\widehat{\chi}(x)| \leqslant m(K_{2\varepsilon})$ $(\forall x \in \mathbb{R}^N)$, получаем для произвольного $s > 0$:

$$\int_{\mathbb{R}^N}|\widehat{\varphi}(t)|\exp s\omega(\|t\|)\,dt \leqslant \frac{C_1^N}{A^N}m(K_{2\varepsilon})\int_{\mathbb{R}^N}\exp\left(-\frac{1}{4M^2}\sigma(\varepsilon\|t\|)+s\omega(\|t\|)\right)dt.$$

Учитывая условия 1.1 (а, в) для функции σ и то, что $\omega(y) = o(\sigma(y))$ при $y \to \infty$, из этого легко получить, что $\int\limits_{\mathbb{R}^N}|\widehat{\varphi}(t)|\exp s\omega(\|t\|)\,dt < \infty$. ▷

Замечание. Построенная в предыдущем предложении функция φ принадлежит $\mathcal{E}_*^q(\mathbb{R}^N)$, $q \in (0,\infty)$.

Действительно, для φ справедлива формула обращения Фурье, дифференцируя которую, имеем

$$\varphi^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^N}\int_{\mathbb{R}^N}\widehat{\varphi}(t)(it)^\alpha e^{i\langle t,x\rangle}\,dt, \quad x \in \mathbb{R}^N,\ \alpha \in \mathbb{N}_0^N.$$

Значит, для всех $x \in \mathbb{R}^N$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$ и $s > 0$

$$|\varphi^{(\alpha)}(x)| \leqslant \frac{1}{(2\pi)^N} \int\limits_{\mathbb{R}^N} |\widehat{\varphi}(t)| \exp s\omega(\|t\|)\, dt \cdot \exp s\varphi^*_\omega\left(\frac{|\alpha|}{s}\right),$$

откуда следует нужное.

2.4. Предложение. *Пусть ω — медленно меняющаяся весовая функция, $q \in (0,\infty)$. Тогда $\mathcal{E}^q_*(\mathbb{R}^N)$ — алгебра относительно обычной операции умножения функций.*

$\lhd$ Пусть $f \in \mathcal{E}_{\omega,s_1,l}(\mathbb{R}^N), g \in \mathcal{E}_{\omega,s_2,l}(\mathbb{R}^N)$, $0 < s_1, s_2 < \infty$, $l \in \mathbb{N}$. Положим $s := \min\{s_1, s_2\}$ и возьмем $s' \in (0, s)$.

Как известно, функция $\dfrac{\varphi^*_\omega(y)}{y}$ не убывает на $(0,\infty)$. Кроме того, φ^*_ω выпукла на $[0,\infty)$ и $\varphi^*_\omega(0) = 0$, откуда следует, что φ^*_ω полуаддитивна снизу на $[0,\infty)$. Поэтому для всех α и β из $\mathbb{N}_0^N$ таких, что $\beta \leqslant \alpha$ справедлива оценка

$$s_1\varphi^*_\omega\left(\frac{|\beta|}{s_1}\right) + s_2\varphi^*_\omega\left(\frac{|\alpha|-|\beta|}{s_2}\right) \leqslant s\varphi^*_\omega\left(\frac{|\beta|}{s}\right) + s\varphi^*_\omega\left(\frac{|\alpha|-|\beta|}{s}\right) \leqslant s\varphi^*_\omega\left(\frac{|\alpha|}{s}\right).$$

Значит, для любого $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$ и всех $x \in \mathbb{R}^N$ с $\|x\| \leqslant l$ имеем

$$\left|(fg)^{(\alpha)}(x)\right| = \left|\sum_{0\leqslant\beta\leqslant\alpha} C^\beta_\alpha f^{(\beta)}(x) g^{(\alpha-\beta)}(x)\right| \leqslant |f|_{\omega,s_1,l}|g|_{\omega,s_2,l} \exp\left(s\varphi^*_\omega\left(\frac{|\alpha|}{s}\right) + |\alpha|\ln 2\right).$$

Далее,

$$s\varphi^*_\omega\left(\frac{|\alpha|}{s}\right) + |\alpha|\ln 2 = \sup_{\xi\geqslant 0}\big(\xi|\alpha| - s\varphi_\omega(\xi) + |\alpha|\ln 2\big)$$

$$\leqslant \sup_{\xi\geqslant 0}\big((\xi+\ln 2)|\alpha| - s'\varphi_\omega(\xi+\ln 2)\big) + \sup_{\xi\geqslant 0}\big(s'\varphi_\omega(\xi+\ln 2) - s\varphi_\omega(\xi)\big)$$

$$\leqslant s'\varphi^*_\omega\left(\frac{|\alpha|}{s'}\right) + \sup_{t\geqslant 1}\big(s'\omega(2t) - s\omega(t)\big).$$

Так как ω медленно меняется, то найдется $C = C(s,s') > 0$ такое, что $\omega(2t) \leqslant \dfrac{s}{s'}\omega(t) + C$ для всех $t \geqslant 0$. Тогда для всех $x \in \mathbb{R}^N$ с $\|x\| \leqslant l$ и произвольного $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$ получаем

$$|(fg)^{(\alpha)}(x)| \leqslant e^{s'C}|f|_{\omega,s_1,l}|g|_{\omega,s_2,l} \exp s'\varphi^*_\omega\left(\frac{|\alpha|}{s'}\right),$$

откуда уже непосредственно следует нужное. $\rhd$

Перейдем теперь к рассмотрению пространств периодических УДФ нормального типа.

Пусть $a, b \in \mathbb{R}^N$, $a < b$ (т. е. $a_j < b_j$, $1 \leqslant j \leqslant N$), $T_{a,b} := \{x \in \mathbb{R}^N : a < x < b\}$, $\overline{T}_{a,b} := \{x \in \mathbb{R}^N : a \leqslant x \leqslant b\}$. Для функции $f \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ и $s > 0$ положим

$$|f|_{\omega,s,ab} := \sup_{\alpha\in\mathbb{N}_0^N} \sup_{x\in\overline{T}_{a,b}} |f^{(\alpha)}(x)| \exp\big(-s\varphi^*_\omega(|\alpha|/s)\big).$$

Введем следующие пространства периодических УДФ:

$$\mathcal{E}_{\omega,s,ab}(\mathbb{R}^N) := \Big\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^N) \,:\, |f|_{\omega,s,ab} < \infty,$$
$$f(x + \langle k, b-a\rangle) = f(x),\ \forall x \in \mathbb{R}^N,\, \forall k \in \mathbb{Z}^N \Big\},$$

$$\mathcal{E}^q_{(\omega),ab}(\mathbb{R}^N) := \bigcap_{s\in(0,q)} \mathcal{E}_{\omega,s,ab}(\mathbb{R}^N), \quad \mathcal{E}^q_{\{\omega\},ab}(\mathbb{R}^N) := \bigcup_{s\in(q,\infty)} \mathcal{E}_{\omega,s,ab}(\mathbb{R}^N).$$

Пусть топология в $\mathcal{E}_{\omega,s,ab}(\mathbb{R}^N)$ задается нормой $|\cdot|_{\omega,s,ab}$. Наделим пространства $\mathcal{E}^q_{(\omega),ab}(\mathbb{R}^N)$ и $\mathcal{E}^q_{\{\omega\},ab}(\mathbb{R}^N)$ топологиями $\operatorname*{proj}_{s\in(0,q)} \mathcal{E}_{\omega,s,ab}(\mathbb{R}^N)$ и $\operatorname*{ind}_{s\in(q,\infty)} \mathcal{E}_{\omega,s,ab}(\mathbb{R}^N)$ соответственно.

2.5. Предложение. *Система экспонент*

$$\Big\{ \exp 2\pi i \Big\langle \beta, \frac{\cdot}{b-a} \Big\rangle \Big\}_{\beta\in\mathbb{N}_0^N} \tag{4}$$

образует абсолютный (соответственно абсолютно индуктивный) базис пространства $\mathcal{E}^q_{(\omega),ab}(\mathbb{R}^N)$ *(соответственно* $\mathcal{E}^q_{\{\omega\},ab}(\mathbb{R}^N)$*).*

◁ Фиксируем произвольную функцию $g \in \mathcal{E}^q_{*,ab}(\mathbb{R}^N)$. Тогда она разлагается в $\mathbb{R}^N$ в ряд Фурье

$$g(x) = \sum_{\beta\in\mathbb{N}_0^N} c_\beta \exp 2\pi i \Big\langle \beta, \frac{x}{b-a} \Big\rangle,$$

причем этот ряд можно почленно дифференцировать любое число раз и ряды из производных сходятся равномерно в $\mathbb{R}^N$ (или, что то же самое, в $\overline{T}_{a,b}$). Коэффициенты c_β вычисляются по формулам:

$$\prod_{j=1}^N (b_j - a_j) c_\beta = \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_N}^{b_N} g(x) \exp\left(-2\pi i \Big\langle \beta, \frac{x}{b-a} \Big\rangle \right) dx_1 \dots dx_N. \tag{5}$$

Оценим сверху $|c_\beta|$ для $\beta \neq 0$. Условимся формально считать $\frac{b_j-a_j}{0} = 0$ и введем N-мерный вектор $\frac{b-a}{\beta} = \left(\frac{b_1-a_1}{\beta_1}, \dots, \frac{b_N-a_N}{\beta_N} \right)$. Для определенности будем предполагать, что $\left\| \frac{b-a}{\beta} \right\| := \max\limits_{1\leqslant j\leqslant N} \left| \frac{b_j-a_j}{\beta_j} \right| = \frac{b_1-a_1}{\beta_1}$. Так как $g \in \mathcal{E}^q_{*,ab}(\mathbb{R}^N)$, то для всех x_j таких, что $a_j \leqslant x_j \leqslant b_j$, $j = 2, \dots, N$, и всех $k \in \mathbb{N}_0$

$$\frac{\partial^k g}{\partial x_1^k}(x) \exp\left(-2\pi i \Big\langle \beta, \frac{x}{b-a} \Big\rangle \right) \Big|_{x_1=a_1}^{b_1} = 0.$$

Тогда из (5) с помощью интегрирования по частям для произвольного $k \in \mathbb{N}_0^N$ получаем

$$\prod_{j=1}^N (b_j - a_j)|c_\beta| = \left| \frac{1}{(2\pi)^k} \left(\frac{b_1 - a_1}{\beta_1} \right)^k \int_{T_{a,b}} \frac{\partial^k g}{\partial x_1^k}(x) \exp\left(-2\pi i \Big\langle \beta, \frac{x}{b-a} \Big\rangle \right) dx \right|$$

$$\leqslant \frac{1}{(2\pi)^k} \left\| \frac{b-a}{\beta} \right\|^k |g|_{\omega,s,ab} \exp s\varphi^*_\omega \left(\frac{k}{s} \right) \prod_{j=1}^N (b_j - a_j).$$

Следовательно, для всех $\beta \in \mathbb{N}_0^N$ с $\|\beta\| \geqslant \dfrac{\|b-a\|}{2\pi}$ имеем

$$|c_\beta| \leqslant |g|_{\omega,s,ab} \exp \inf_{k\in\mathbb{N}_0} \left(-k \ln 2\pi \left\| \frac{\beta}{b-a} \right\| + s\varphi_\omega^* \left(\frac{k}{s} \right) \right)$$

$$= |g|_{\omega,s,ab} \exp \left[-s \sup_{k\in\mathbb{N}_0} \left(\frac{k}{s} \ln 2\pi \left\| \frac{\beta}{b-a} \right\| - \varphi_\omega^* \left(\frac{k}{s} \right) \right) \right]$$

$$\leqslant |g|_{\omega,s,ab} \exp \left[-s \sup_{y\geqslant 0} \left(\frac{y}{s} \ln 2\pi \left\| \frac{\beta}{b-a} \right\| - \varphi_\omega^* \left(\frac{y}{s} \right) \right) + \ln 2\pi \left\| \frac{\beta}{b-a} \right\| \right]$$

$$= |g|_{\omega,s,ab} \exp \left[-s\omega \left(2\pi \left\| \frac{\beta}{b-a} \right\| \right) + \ln 2\pi \left\| \frac{\beta}{b-a} \right\| \right],$$

где $s > 0$ произвольно.

Далее, нетрудно проверить, что для всех $s' > 0$ и $\beta \in \mathbb{N}_0^N$ справедлива оценка

$$\left| \exp 2\pi i \Big\langle \beta, \frac{\cdot}{b-a} \Big\rangle \right|_{\omega,s',ab} \leqslant \exp s'\omega \left(2\pi \left\| \frac{\beta}{b-a} \right\| \right).$$

Возьмем $s' : 0 < s' < s < \infty$ и из условия 1.1 (в) найдем $C = C(s,s') > 0$ такое, что $s\omega(t) - s'\omega(t) - \ln t \geqslant (N+2)\ln t - C$ при всех $t \geqslant 0$. Тогда для всех $\beta \in \mathbb{N}_0^N$ с $\|\beta\| > \|b-a\|/(2\pi)$ выполняется неравенство

$$|c_\beta| \left| \exp 2\pi i \Big\langle \beta, \frac{\cdot}{b-a} \Big\rangle \right|_{\omega,s',ab} \leqslant e^C \left(\frac{\|b-a\|}{2\pi} \right)^{N+2} |g|_{\omega,s,ab} \frac{1}{\|\beta\|^{N+2}}.$$

Окончательно имеем

$$\sum_{\beta\in\mathbb{N}_0^N} |c_\beta| \left| \exp 2\pi i \Big\langle \beta, \frac{\cdot}{b-a} \Big\rangle \right|_{\omega,s',ab} \leqslant C_1 |g|_{\omega,s,ab},$$

где

$$C_1 := \sum_{\|\beta\| \leqslant \frac{\|b-a\|}{2\pi}} |c_\beta| \left| \exp 2\pi i \Big\langle \beta, \frac{\cdot}{b-a} \Big\rangle \right|_{\omega,s',ab} + e^C \left(\frac{\|b-a\|}{2\pi} \right)^{N+2} \sum_{\substack{\beta\in\mathbb{N}_0^N \\ \beta\neq 0}} \frac{1}{\|\beta\|^{N+2}} < \infty$$

зависит только от g, s и s'. Из этого, как нетрудно видеть, следует, что (4) является АПС в $\mathcal{E}^q_{(\omega),ab}(\mathbb{R}^N)$ (соответственно ИАПС в $\mathcal{E}^q_{\{\omega\},ab}(\mathbb{R}^N)$). Единственность разложения функции g по системе (4) вытекает из равенств (5), что завершает доказательство предложения. $\triangleright$

3. Доказательство основной теоремы

При доказательстве будем придерживаться схемы (iii) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (i) $\Rightarrow$ (iii). Импликация (iii) $\Rightarrow$ (ii) очевидна.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Пусть система

$$\Psi = \{\psi_k\}_{k=1}^\infty, \quad \psi_k = \left(i^{|\alpha|} \mu_k^\alpha \exp i\langle \mu_k, \cdot \rangle \big|_K \right)_{\alpha\in\mathbb{N}_0^N}, \quad \mu_k \in \mathbb{R}^N,$$

является АПС в $\mathcal{E}^q_{(\omega)}(K)$ (соответственно ИАПС в $\mathcal{E}^q_{\{\omega\}}(K)$). Возьмем произвольный джет $f = (f^\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}_0^N}$ из $\mathcal{E}^q_{(\omega)}(K)$ (соответственно $\mathcal{E}^q_{\{\omega\}}(K)$). Тогда $f = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k\psi_k$, причем ряд справа сходится абсолютно в $\mathcal{E}^q_{(\omega)}(K)$ (соответственно в некотором $\mathcal{E}_{\omega,s}(K)$, $s > q$), т. е. $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|\cdot\|\psi_k\|_{\omega,s,K} < \infty$ при всех $s \in (0,q)$ (соответственно при некотором $s > q$). Из этого следует, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k| \sup_{\alpha\in\mathbb{N}_0^N} |\mu_k^\alpha| \exp\big(-s\varphi_\omega^*(|\alpha|/s)\big) < \infty \tag{6}$$

при всех $s \in (0,q)$ (соответственно при некотором $s > q$). Значит, ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k i^{|\alpha|}\mu_k^\alpha \exp i\langle\mu_k, x\rangle, \quad \alpha \in \mathbb{N}_0^N,$$

сходятся равномерно и абсолютно в $\mathbb{R}^N$. Поэтому функция $g(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k \exp i\langle\mu_k, x\rangle$ бесконечно дифференцируема в $\mathbb{R}^N$ и

$$g^{(\alpha)}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k i^{|\alpha|}\mu_k^\alpha \exp i\langle\mu_k, x\rangle, \quad x \in \mathbb{R}^N,\ \alpha \in \mathbb{N}_0^N.$$

Тогда, в силу (6), $|g|_{\omega,s,l} < \infty$ при всех $s \in (0,q)$ (соответственно при некотором $s > q$) и всех $l \in \mathbb{N}$. Это означает, что $g \in \mathcal{E}^q_{(\omega)}(\mathbb{R}^N)$ (соответственно $g \in \mathcal{E}^q_{\{\omega\}}(\mathbb{R}^N)$). При этом, очевидно, $\rho_K(g) = f$. Таким образом, оператор ρ_K сюръективен.

(i) $\Rightarrow$ (iii): Пусть оператор ρ_K отображает $\mathcal{E}^q_*(\mathbb{R}^N)$ на $\mathcal{E}^q_*(K)$. Тогда, в силу теоремы 2.1, ω — медленно меняющаяся весовая функция.

Заметим, что, как нетрудно проверить, оператор ρ_K действует из $\mathcal{E}^q_{*,ab}(\mathbb{R}^N)$ в $\mathcal{E}^q_*(K)$ непрерывно. Поэтому, если мы еще докажем, что ρ_K отображает $\mathcal{E}^q_{*,ab}(\mathbb{R}^N)$ на $\mathcal{E}^q_*(K)$, то выполнение (ii) будет следовать из предложения 2.5 и того известного факта [7, с. 76–77], что всякий эпиморфизм переводит абсолютный (абсолютно индуктивный) базис в АПС (ИАПС).

Возьмем $\varepsilon > 0$ так, чтобы $K_{3\varepsilon} \subset T_{a,b}$. Пусть φ — функция, построенная с помощью предложения 2.3 для данного $\varepsilon > 0$ и рассматриваемой весовой функции ω. Зафиксируем произвольный джет f из $\mathcal{E}^q_*(K)$. Так как по предположению ρ_K действует сюръективно из $\mathcal{E}^q_*(\mathbb{R}^N)$ на $\mathcal{E}^q_*(K)$, то найдется $F \in \mathcal{E}^q_*(\mathbb{R}^N)$ такая, что $\rho_K(F) = f$. В силу предложения 2.4, $F\varphi \in \mathcal{E}^q_*(\mathbb{R}^N)$. Возьмем сужение функции $F\varphi$ на $\overline{T}_{a,b}$ и продолжим его по периоду на все $\mathbb{R}^N$. В результате получим функцию $\widetilde{F} \in \mathcal{E}^q_{*,ab}(\mathbb{R}^N)$. При этом, $\widetilde{F}(x) = F(x)$ для всех $x \in K_\varepsilon$. Следовательно, $\rho_K(\widetilde{F}) = \rho_K(F) = f$. Тем самым импликация (i) $\Rightarrow$ (iii), а вместе с ней и основная теорема, доказана. $\triangleright$

Автор выражает благодарность профессору Ю. Ф. Коробейнику за постановку задачи и помощь в подготовке статьи.

Литература

1. *Коробейник Ю. Ф.* Абсолютно представляющие системы экспонент с мнимыми показателями в пространствах бесконечно дифференцируемых функций и продолжимость по Борелю — Уитни // В сб.: Актуальные проблемы математического анализа.—Ростов-на-Дону: Изд-во ГинГо.—2000.—С. 8–22.

2. *Korobeinik Yu. F.* On absolutely representing systems in spaces of infinitely differentiable functions // Stud. Math.—2000.—V. 139, № 2.—P. 175–188.
3. *Абанина Д. А.* Об аналогах теоремы Бореля для пространств ультрадифференцируемых функций нормального типа // Изв. вузов. Математика.—2003.—№ 8.—С. 63–66.
4. *Abanina D. A.* On Borel's theorem for spaces of ultradifferentiable functions of mean type // Result. Math.—2003.—V. 44, № 3/4.—P. 195–213.
5. *Braun R. W., Meise R., Taylor B. A.* Ultradifferentiable functions and Fourier analysis // Result. Math.—1990.—V. 17.—P. 206–237.
6. *Коробейник Ю. Ф.* Об одной двойственной задаче. I. Общие результаты. Приложения к пространствам Фреше // Мат. сб.—1975.—Т. 97, № 2.—С. 193–229.
7. *Коробейник Ю. Ф.* Представляющие системы // Успехи мат. наук.—1981.—Т. 36, № 1.—С. 73–126.
8. *Сенета Е.*Правильно меняющиеся функции.—М.: Наука, 1985.—141 с.
9. *Робертсон А. П., Робертсон В. Дж.* Топологические векторные пространства.—М.: Мир, 1967.—257 с.
10. *Абанин А. В., Тищенко Е. С.* Пространства ультрадифференцируемых функций и обобщение теоремы Пэли — Винера — Шварца // Изв. вузов. Сев.-Кав. регион. Естеств. науки.—1997, № 2.—С. 5–8.
11. *Эдвардс Р.* Функциональный анализ.—М.: Наука, 1969.—1071 с.

Статья поступила 5 мая 2004 г.

Абанина Дарья Александровна
г.Ростов, Ростовский государственный университет
E-mail: abanina@math.rsu.ru