Владикавказский математический журнал
Октябрь–декабрь, 2004, Том 6, Выпуск 4

УДК **517.51**

О ВОССТАНОВЛЕНИИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ПО НЕТОЧНЫМ ИСХОДНЫМ ДАННЫМ[1]

Осипенко К. Ю.

Владимиру Михайловичу Тихомирову
с благодарностью за внимание и дружбу

Исследуется задача оптимального восстановления решения задачи Дирихле для единичного круга, когда информация о граничной функции задана в виде конечного набора ее коэффициентов Фурье, вычисленных с фиксированной погрешностью в средне квадратичной или равномерной метрике.

Большинство конкретных результатов, касающихся задач оптимального восстановления, получено для восстановления линейных функционалов — это, например, задачи оптимального восстановления значений функций, их производных или интегралов от них (общую постановку задач оптимального восстановления и соответствующие результаты для конкретных задач можно найти в [1–5] и цитируемой там литературе). Оптимальное восстановление операторов изучено значительно меньше. Отметим в связи с этим работы [6–9]. В данной работе используется метод, предложенный в работе [7]. Этот метод уже применялся к оптимальному восстановлению решения уравнения с частными производными (см. [10]), а именно, к задаче оптимального восстановления решения уравнения теплопроводности по неточной информации о начальной температуре. Подобным образом могут исследоваться многие краевые задачи математической физики. В данной работе мы рассматриваем одну из таких задач — задачу Дирихле.

Рассмотрим задачу Дирихле в единичном круге $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2<1\}$

$$\begin{aligned} &\Delta u = 0, \\ &u(\cos t, \sin t) = f(t). \end{aligned} \tag{1}$$

Хорошо известно, что решение этой задачи дается равенством

$$u(\rho\cos t,\rho\sin t)=\frac{a_0(f)}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\rho^k(a_k(f)\cos kt+b_k(f)\sin kt),$$

где $a_k(f)$ и $b_k(f)$ — коэффициенты Фурье функции f. Нас будет интересовать вопрос как наилучшим образом восстановить решение задачи (1), если вычислено лишь конечное число коэффициентов Фурье $a_0(f), a_1(f),\ldots,a_N(f), b_1(f),\ldots,b_N(f)$ и вычисления проведены с некоторой погрешностью.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты № 02-01-00386 и № 02-01-39012; программы государственной поддержки ведущих научных школ Российской Федерации, грант НШ-304.2003.1 и программы «Университеты России», УР.04.03.067.

Для корректной постановки этой задачи необходимо иметь априорную информацию о том, какой может быть исходная функция f. Положим

$$\mathscr{W}_2^r = \left\{ f : f^{(r-1)} \text{ — абс. непр. на } \mathbb{T},\ \|f^{(r)}\|_{L_2(\mathbb{T})} < \infty \right\},$$

где $\mathbb{T}$ — отрезок $[-\pi, \pi]$ с идентифицированными концами, а

$$\|g\|_{L_2(\mathbb{T})} = \left(\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} |g(t)|^2\, dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Мы будем предполагать, что

$$f \in W_2^r = \{ f \in \mathscr{W}_2^r : \|f^{(r)}\|_{L_2(\mathbb{T})} \leqslant 1 \}.$$

Уточним, что понимается под погрешностью вычисления коэффициентов Фурье. Мы считаем, что для любой функции $f \in W_2^r$ нам известен вектор $a = (a_0, a_1, \ldots, a_N, b_1, \ldots, b_N)$ такой, что

$$\|a^N(f) - a\|_{l_p^{2N+1}} \leqslant \delta,$$

где $a^N(f) = (a_0(f), a_1(f), \ldots, a_N(f), b_1(f), \ldots, b_N(f))$, а

$$\|c\|_{l_p^{2N+1}} = \begin{cases} \left(\displaystyle\sum_{k=-N}^{N} |c_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}, & 1 \leqslant p < \infty, \\ \displaystyle\max_{|k| \leqslant N} |c_k|, & p = \infty, \end{cases} \qquad c = (c_{-N}, \ldots, c_N).$$

В качестве методов восстановления будем рассматривать произвольные операторы $\varphi\colon \mathbb{R}^{2N+1} \to L_2(D)$, где

$$\|u\|_{L_2(D)} = \left(\frac{1}{\pi} \iint_D |u(x,y)|^2\, dxdy \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Погрешностью восстановления для данного метода φ назовем величину

$$e_{N,p}(W_2^r, \delta, \varphi) = \sup_{f \in W_2^r} \sup_{\substack{a \in \mathbb{R}^{2N+1} \\ \|a^N(f) - a\|_{l_p^{2N+1}} \leqslant \delta}} \|u - \varphi(a)\|_{L_2(D)}.$$

Погрешностью оптимального восстановления называется величина

$$E_{N,p}(W_2^r, \delta) = \inf_{\varphi\colon \mathbb{R}^{2N+1} \to L_2(D)} e_{N,p}(W_2^r, \delta, \varphi).$$

Метод, на котором достигается нижняя грань называется оптимальным.

Начнем со случая $p = 2$.

Теорема 1. *При всех* $\delta > 0$

$$E_{N,2}(W_2^r, \delta) = \sqrt{\frac{\delta^2}{4} + \frac{1}{2(N+2)(N+1)^{2r}}}\,,$$

а метод

$$\widehat{\varphi}(a)(\rho\cos t,\rho\sin t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{N}\rho^k\left(1+\frac{2k^{2r}}{(N+2)(N+1)^{2r}}\right)^{-1}(a_k\cos kt+b_k\sin kt) \qquad (2)$$

является оптимальным.

$\lhd$ Из общих результатов о задачах восстановления (см., например, лемму 1 из работы [7]) вытекает следующая оценка снизу

$$E_{N,2}(W_2^r,\delta)\geqslant \sup_{\substack{f\in W_2^r\\ \|a^N(f)\|_{l_2^{2N+1}}\leqslant\delta}}\|u\|_{L_2(D)}. \qquad (3)$$

Экстремальная задача, стоящая в правой части неравенства (3), может быть переписана в виде (для удобства мы переходим к квадрату ее значения)

$$\begin{gathered}\frac{a_0^2(f)}{4}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k^2(f)+b_k^2(f)}{k+1}\to\max,\\ a_0^2(f)+\sum_{k=1}^{N}(a_k^2(f)+b_k^2(f))\leqslant\delta^2,\\ \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2(f)+b_k^2(f))k^{2r}\leqslant 1.\end{gathered} \qquad (4)$$

Положим $u_0=a_0^2(f),\ u_k=a_k^2(f)+b_k^2(f)$. Тогда задача (4) примет вид

$$\frac{u_0}{4}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{u_k}{k+1}\to\max,\qquad \sum_{k=0}^{N}u_k\leqslant\delta^2,\qquad \sum_{k=1}^{\infty}u_kk^{2r}\leqslant 1,\qquad u_k\geqslant 0. \qquad (5)$$

Для решения этой задачи рассмотрим ее функцию Лагранжа

$$\mathscr{L}(\{u_k\}_0^\infty,\lambda_1,\lambda_2)=\left(-\frac{1}{4}+\lambda_1\right)u_0+\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2k+2}+\lambda_1\chi_k+\lambda_2k^{2r}\right)u_k,$$

где

$$\chi_k=\begin{cases}1, & 1\leqslant k\leqslant N,\\ 0, & k>N.\end{cases}$$

Нетрудно проверить, что если существует допустимая в (5) последовательность $\{\widehat{u}_k\}_0^\infty$ и такие $\widehat{\lambda}_1,\widehat{\lambda}_2\geqslant 0$, что

$$\min_{u_k\geqslant 0}\mathscr{L}(\{u_k\}_0^\infty,\widehat{\lambda}_1,\widehat{\lambda}_2)=\mathscr{L}(\{\widehat{u}_k\}_0^\infty,\widehat{\lambda}_1,\widehat{\lambda}_2) \qquad (6)$$

и

$$\widehat{\lambda}_1\left(\sum_{k=0}^{N}\widehat{u}_k-\delta^2\right)+\widehat{\lambda}_2\left(\sum_{k=1}^{\infty}\widehat{u}_kk^{2r}-1\right)=0, \qquad (7)$$

то $\{\widehat{u}_k\}_0^\infty$ — решение задачи (5).

Положим

$$\widehat{u}_0=\delta^2,\quad \widehat{u}_{N+1}=\frac{1}{(N+1)^{2r}},\quad \widehat{u}_k=0,\ k\ne 0,N+1,$$

$$\widehat{\lambda}_1=\frac{1}{4},\quad \widehat{\lambda}_2=\frac{1}{2(N+2)(N+1)^{2r}}.$$

Легко проверить, что для так определенных $\{\widehat{u}_k\}_0^\infty$ и $\widehat{\lambda}_1,\widehat{\lambda}_2$ выполнены равенства (6) и (7). Следовательно, решение задачи (5) есть величина

$$\frac{\delta^2}{4}+\frac{1}{2(N+2)(N+1)^{2r}}.$$

Отметим, что из тех же соображений вытекает, что $\{\widehat{u}_k\}_0^\infty$ — решение задачи

$$\frac{u_0}{4}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^\infty\frac{u_k}{k+1}\to\max,$$

$$\widehat{\lambda}_1\sum_{k=0}^N u_k+\widehat{\lambda}_2\sum_{k=1}^\infty u_kk^{2r}\leqslant\widehat{\lambda}_1\delta^2+\widehat{\lambda}_2,\quad u_k\geqslant 0.$$

Займемся теперь построением оптимального метода восстановления. При фиксированном $a=(a_0,a_1,\dots,a_N,b_1,\dots,b_N)\in\mathbb{R}^{2N+1}$ рассмотрим следующую экстремальную задачу

$$\widehat{\lambda}_1\|a^N(f)-a\|^2_{l_2^{2N+1}}+\widehat{\lambda}_2\|f^{(r)}\|^2_{L_2(\mathbb{T})}\to\min,\quad f\in\mathscr{W}_2^r. \tag{8}$$

Нетрудно убедиться, что решением этой задачи является функция

$$\widehat{f}(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^N\frac{\widehat{\lambda}_1}{\widehat{\lambda}_1+\widehat{\lambda}_2k^{2r}}(a_k\cos kt+b_k\sin kt).$$

Из того, что $\widehat{f}$ — решение задачи (8), вытекает справедливость при всех $f\in\mathscr{W}_2^r$ равенства (которое может быть проверено и непосредственно)

$$\widehat{\lambda}_1\|a^N(f)-a^N(\widehat{f})\|^2_{l_2^{2N+1}}+\widehat{\lambda}_2\|f^{(r)}-\widehat{f}^{(r)}\|^2_{L_2(\mathbb{T})}+\widehat{\lambda}_1\|a^N(\widehat{f})-a\|^2_{l_2^{2N+1}}$$
$$+\widehat{\lambda}_2\|\widehat{f}^{(r)}\|^2_{L_2(\mathbb{T})}=\widehat{\lambda}_1\|a^N(f)-a\|^2_{l_2^{2N+1}}+\widehat{\lambda}_2\|f^{(r)}\|^2_{L_2(\mathbb{T})}.$$

Если $f\in W_2^r$ и $\|a^N(f)-a\|_{l_2^{2N+1}}\leqslant\delta$, то из этого равенства, положив $g=f-\widehat{f}$, получаем

$$\widehat{\lambda}_1\|a^N(g)\|^2_{l_2^{2N+1}}+\widehat{\lambda}_2\|g^{(r)}\|^2_{L_2(\mathbb{T})}\leqslant\widehat{\lambda}_1\|a^N(f)-a\|^2_{l_2^{2N+1}}+\widehat{\lambda}_2\|f^{(r)}\|^2_{L_2(\mathbb{T})}\leqslant\widehat{\lambda}_1\delta^2+\widehat{\lambda}_2.$$

Оценим погрешность метода (2). Имеем

$$\|u-\widehat{\varphi}(a)\|^2_{L_2(D)}=\frac{a_0^2(g)}{4}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^\infty\frac{a_k^2(g)+b_k^2(g)}{k+1}$$
$$\leqslant\sup\left\{\frac{u_0}{4}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^\infty\frac{u_k}{k+1}:\ \widehat{\lambda}_1\sum_{k=0}^N u_k+\widehat{\lambda}_2\sum_{k=1}^\infty u_kk^{2r}\leqslant\widehat{\lambda}_1\delta^2+\widehat{\lambda}_2,\quad u_k\geqslant 0\right\}.$$

Так как значение последней задачи совпадает со значением задачи (5), то полученная оценка сверху для погрешности оптимального восстановления совпадает с оценкой снизу и метод (2) является оптимальным. Подставляя в него выражения для $\widehat{\lambda}_1$ и $\widehat{\lambda}_2$, получаем утверждение теоремы. $\rhd$

Рассмотрим теперь случай $p = \infty$.

Теорема 2. *Положим*

$$m = \max\Big\{ n \in \mathbb{Z}_+ : \delta^2 \sum_{|k|\leqslant n} k^{2r} < 1,\ 0 \leqslant n \leqslant N \Big\}.$$

Тогда

$$E_{N,\infty}(W_2^r, \delta) = \sqrt{\frac{\delta^2}{4} + \delta^2 \sum_{k=1}^{m} \frac{\alpha_k}{k+1} + \frac{1}{2(m+1)(m+1)^{2r}}}\,,$$

где

$$\alpha_k = 1 - \frac{k+1}{m+2}\left(\frac{k}{m+1}\right)^{2r}, \quad k = 1, \ldots, m,$$

а метод

$$\widehat{\varphi}(a)(\rho\cos t, \rho\sin t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \rho^k (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \tag{9}$$

является оптимальным.

$\lhd$ Аналогично неравенству (3) имеем

$$E_{N,\infty}(W_2^r, \delta) \geqslant \sup_{\substack{f \in W_2^r \\ \|a^N(f)\|_{l_\infty^{2N+1}} \leqslant \delta}} \|u\|_{L_2(D)}.$$

Экстремальная задача, стоящая в правой части этого неравенства может быть переписана в виде (здесь для удобства мы также переходим к квадрату ее значения)

$$\frac{u_0}{4} + \frac{1}{2}\sum_{|k|\geqslant 1} \frac{u_k}{|k|+1} \to \max, \quad 0 \leqslant u_k \leqslant \delta^2,\ k = -N, \ldots, N, \quad \sum_{|k|\geqslant 1} u_k k^{2r} \leqslant 1, \tag{10}$$

где $u_k = a_k^2(f)$ $(k = 0, 1, \ldots)$ и $u_{-k} = b_k^2(f)$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Рассмотрим функцию Лагранжа этой задачи

$$\mathscr{L}(\{u_k\}_0^\infty, \lambda) = \left(-\frac{1}{4} + \lambda_0\right) u_0 + \sum_{|k|\geqslant 1} \left(-\frac{1}{2(|k|+1)} + \lambda_{N+1} k^{2r}\right) u_k + \sum_{|k|=1}^{N} \lambda_k u_k,$$

$\lambda = (\lambda_{-N}, \ldots, \lambda_N, \lambda_{N+1})$. Для решения задачи (10) достаточно найти допустимую в (10) последовательность $\{\widehat{u}_k\}_0^\infty$ и такой вектор $\widehat{\lambda}$ с неотрицательными компонентами, что

$$\min_{u_k \geqslant 0} \mathscr{L}(\{u_k\}_0^\infty, \widehat{\lambda}) = \mathscr{L}(\{\widehat{u}_k\}_0^\infty, \widehat{\lambda}) \tag{11}$$

и

$$\sum_{k=-N}^{N} \widehat{\lambda}_k (\widehat{u}_k - \delta^2) + \widehat{\lambda}_{N+1}\left(\sum_{|k|\geqslant 1} \widehat{u}_k k^{2r} - 1\right) = 0. \tag{12}$$

При этом $\{\widehat{u}_k\}_0^\infty$ — решение задачи (10).

Положим

$$\widehat{\lambda}_0=\frac{1}{4},\quad \widehat{\lambda}_{N+1}=\frac{1}{2(m+2)(m+1)^{2r}},$$

$$\widehat{\lambda}_k=\begin{cases}\dfrac{1}{2(|k|+1)}-\widehat{\lambda}_{N+1}k^{2r}, & 1\leqslant |k|\leqslant m,\\ 0, & m+1\leqslant |k|\leqslant N.\end{cases}$$

Последовательность $\{\widehat{u}_k\}_0^\infty$ определим равенством

$$\widehat{u}_k=\begin{cases}\delta^2, & |k|\leqslant m,\\ \dfrac{1-\delta^2\sum_{|k|=1}^m k^{2r}}{2(m+1)^{2r}}, & |k|=m+1,\\ 0, & |k|>m+1.\end{cases}$$

Из определения m следует, что $\{\widehat{u}_k\}_0^\infty$ — допустима. Кроме того, при всех $u_k\geqslant 0$

$$\mathscr{L}(\{u_k\}_0^\infty,\widehat{\lambda})=\sum_{|k|\geqslant m+2}\left(-\frac{1}{2(|k|+1)}+\widehat{\lambda}_{N+1}k^{2r}\right)u_k\geqslant 0=\mathscr{L}(\{\widehat{u}_k\}_0^\infty,\widehat{\lambda}).$$

Тем самым условие (11) выполнено. Легко убедиться, что условие (12) тоже выполнено. Следовательно, $\{\widehat{u}_k\}_0^\infty$ — решение задачи (10). Отсюда

$$E_{N,\infty}(W_2^r,\delta)\geqslant\sqrt{\frac{u_0}{4}+\frac{1}{2}\sum_{|k|\geqslant 1}\frac{\widehat{u}_k}{|k|+1}}=\sqrt{\frac{\delta^2}{4}+\delta^2\sum_{k=1}^m\frac{\alpha_k}{k+1}+\frac{1}{2(m+1)(m+1)^{2r}}}.$$

Отметим, что из тех же соображений, которые были использованы выше, вытекает, что $\{\widehat{u}_k\}_0^\infty$ — решение задачи

$$\frac{u_0}{4}+\frac{1}{2}\sum_{|k|\geqslant 1}\frac{u_k}{|k|+1}\to\max,$$

$$\sum_{k=-N}^N\widehat{\lambda}_k u_k+\widehat{\lambda}_{N+1}\sum_{|k|\geqslant 1}u_k k^{2r}\leqslant\delta^2\sum_{k=-N}^N\widehat{\lambda}_k+\widehat{\lambda}_{N+1},\quad u_k\geqslant 0.$$

Займемся теперь построением оптимального метода восстановления. При фиксированном $a=(a_0,a_1,\dots,a_N,b_1,\dots,b_N)\in\mathbb{R}^{2N+1}$ рассмотрим следующую экстремальную задачу

$$\widehat{\lambda}_0|a_0(f)-a_0|^2+\sum_{k=1}^N(\widehat{\lambda}_k|a_k(f)-a_k|^2+\widehat{\lambda}_{-k}|b_k(f)-b_k|^2)$$
$$+\widehat{\lambda}_{N+1}\|f^{(r)}\|^2_{L_2(\mathbb{T})}\to\min,\qquad f\in\mathscr{W}_2^r.\qquad(13)$$

Нетрудно убедиться, что решением этой задачи является функция

$$\widehat{f}(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^m\frac{\widehat{\lambda}_k}{\widehat{\lambda}_k+\widehat{\lambda}_{N+1}k^{2r}}(a_k\cos kt+b_k\sin kt).$$

Из того, что $\widehat{f}$ — решение задачи (13), вытекает справедливость при всех $f \in \mathscr{W}_2^r$ равенства (оно может быть проверено и непосредственно)

$$\begin{gathered}\widehat{\lambda}_0|a_0(f)-a_0(\widehat{f})|^2+\sum_{k=1}^{N}(\widehat{\lambda}_k|a_k(f)-a_k(\widehat{f})|^2+\widehat{\lambda}_{-k}|b_k(f)-b_k(\widehat{f})|^2)\\ +\widehat{\lambda}_{N+1}\|f^{(r)}-\widehat{f}^{(r)}\|^2_{L_2(\mathbb{T})}+\widehat{\lambda}_0|a_0(\widehat{f})-a_0|^2\\ +\sum_{k=1}^{N}(\widehat{\lambda}_k|a_k(\widehat{f})-a_k|^2+\widehat{\lambda}_{-k}|b_k(\widehat{f})-b_k|^2)+\widehat{\lambda}_{N+1}\|\widehat{f}^{(r)}\|^2_{L_2(\mathbb{T})}\\ =\widehat{\lambda}_0|a_0(f)-a_0|^2+\sum_{k=1}^{N}(\widehat{\lambda}_k|a_k(f)-a_k|^2+\widehat{\lambda}_{-k}|b_k(f)-b_k|^2)+\widehat{\lambda}_{N+1}\|f^{(r)}\|_{L_2(\mathbb{T})}.\end{gathered} \tag{14}$$

Если $f \in W_2^r$ и $|a_k(f)-a_k| \leqslant \delta$, $k=0,1,\ldots,N$, $|b_k(f)-b_k| \leqslant \delta$, $k=1,\ldots,N$, то из равенства (14), положив $g=f-\widehat{f}$, получаем

$$\widehat{\lambda}_0|a_0(g)|^2+\sum_{k=1}^{N}(\widehat{\lambda}_k|a_k(g)|^2+\widehat{\lambda}_{-k}|b_k(g)|^2)+\widehat{\lambda}_{N+1}\|g^{(r)}\|^2_{L_2(\mathbb{T})} \leqslant \widehat{\lambda}_0|a_0(f)-a_0|^2$$
$$+\sum_{k=1}^{N}(\widehat{\lambda}_k|a_k(f)-a_k|^2+\widehat{\lambda}_{-k}|b_k(f)-b_k|^2)+\widehat{\lambda}_{N+1}\|f^{(r)}\|_{L_2(\mathbb{T})} \leqslant \delta^2\sum_{k=-N}^{N}\widehat{\lambda}_k+\widehat{\lambda}_{N+1}.$$

Оценим погрешность метода (9). Имеем

$$\|u-\widehat{\varphi}(a)\|^2_{L_2(D)}=\frac{a_0^2(g)}{4}+\frac{1}{2}\sum_{|k|\geqslant 1}\frac{a_k^2(g)+b_k^2(g)}{|k|+1} \leqslant \sup\Big\{\frac{u_0}{4}+\frac{1}{2}\sum_{|k|\geqslant 1}\frac{u_k}{|k|+1}:$$
$$\sum_{k=-N}^{N}\widehat{\lambda}_k u_k+\widehat{\lambda}_{N+1}\sum_{|k|\geqslant 1}^{\infty}u_k k^{2r} \leqslant \delta^2\sum_{k=-N}^{N}\widehat{\lambda}_k+\widehat{\lambda}_{N+1},\ u_k \geqslant 0\Big\}.$$

Так как значение последней задачи совпадает со значением задачи (10), то полученная оценка сверху для погрешности оптимального восстановления совпадает с оценкой снизу и метод (9) является оптимальным. Подставляя в него выражения для $\widehat{\lambda}_{-N},\ldots,\widehat{\lambda}_N,\widehat{\lambda}_{N+1}$, получаем утверждение теоремы. $\rhd$

Пусть фиксирована погрешность $\delta > 0$ вычисления коэффициентов Фурье граничной функции f в задаче Дирихле. Положим

$$N_\delta=\max\Big\{n \in \mathbb{Z}_+:\ \delta^2\sum_{|k|\leqslant n}k^{2r}<1\Big\}.$$

Из теоремы 2 вытекает, что для максимально точного восстановления решения задачи Дирихле по приближенным значениям коэффициентов Фурье функции f требуется знание $2N_\delta+1$ первых коэффициентов Фурье. Вычисление следующих коэффициентов Фурье (при условии, что они вычисляются с той же погрешностью) не приводит к уменьшению погрешности оптимального восстановления.

Аналогичный эффект насыщения наблюдается в задачах оптимального восстановления производных по неточным коэффициентам Фурье (см. [7]) и при оптимальном восстановлении решения уравнения теплопроводности по неточной информации о начальной температуре (см. [10]).

Литература

1. *Micchelli C. A., Rivlin T. J.* A survey of optimal recovery // In: Optimal Estimation in Approximation Theory / Eds. C. A. Micchelli and T. J. Rivlin.— New York: Plenum Press, 1977.—P. 1–54.
2. *Трауб Дж., Вожьняковский Х.* Общая теория оптимальных алгоритмов.—М: Мир, 1983.—382 с.
3. *Micchelli C. A., Rivlin T. J.* Lectures on Optimal Recovery.—Berlin: Springer–Verlag, 1985.—P. 21–93. (Lecture Notes in Math.; V. 1129.)
4. *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Об оптимальном восстановлении функционалов по неточным данным // Мат. заметки.—1991.—Т. 50, № 6.—С. 85–93.
5. *Osipenko K. Yu.* Optimal Recovery of Analytic Functions.—Huntington, New York: Nova Science Publ., 2000.—220 p.
6. *Melkman A. A., Micchelli C. A.* Optimal estimation of linear operators in Hilbert spaces from inaccurate data // SIAM J. Numer. Anal.—1979.—V. 16, № 1.—P. 87–105.
7. *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Оптимальное восстановление функций и их производных по коэффициентам Фурье, заданным с погрешностью // Матем. сб.—2002.—Т. 193, № 3.—С. 79–100.
8. *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Оптимальное восстановление функций и их производных по приближенной информации о спектре и неравенства для производных // Функ. анал. и его прил.—2003.—Т. 37, № 3.—С. 51–64.
9. *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Оптимальное восстановление производных на соболевских классах // Владикавк. мат. журн.—2003.—Т. 5, № 1.—С. 39–47.
10. *Magaril-Il'yaev G. G., Osipenko K. Yu., Tikhomirov V. M.* On optimal recovery of heat equation solutions // In: Approximation Theory: A volume dedicated to B. Bojanov / Eds. D. K. Dimitrov, G. Nikolov, and R. Uluchev.—Sofia: Marin Drinov Academic Publishing House, 2004.—P. 163–175.

Статья поступила 25 октября 2004 г.

Осипенко Константин Юрьевич, д. ф.-м. н.
г. Москва, «МАТИ» — Российский государственный
технологический университет им. К. Э. Циолковского
E-mail: `konst@osipenko.mccme.ru`