Владикавказский математический журнал
Октябрь–декабрь, 2004, Том 6, Выпуск 4

УДК **517.5**

ОБОБЩЕННАЯ ТЕОРЕМА ОБ ОБРАТНОЙ ФУНКЦИИ И ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ[1]

Г. Г. Магарил-Ильяев

Дорогому Владимиру Михайловичу
с благодарностью за дружбу

Используя метод Ньютона, доказывается некоторый вариант теоремы об обратной функции для функций, определенных на конусе. В качестве следствия выводится теорема о необходимых условия экстремума в задаче с ограничениями типа равенств, неравенств и включений.

Основная мотивировка получения необходимых условиях экстремума в конечномерной задаче с ограничениями типа равенств и неравенств для функций, определенных на выпуклом конусе, связана с необходимыми условиями экстремума в задаче оптимального управления, доказательство которых сводится именно к такой задаче (см. [1]). Ее бесконечномерный аналог доказан (при схожих предположениях) в работе [2], как следствие других, более общих утверждений. Приводимое здесь доказательство непосредственно и вполне элементарно: оно использует лишь классический метод Ньютона последовательных приближений и стандартную теорему отделимости для выпуклых множеств. Отметим, что доказанное утверждение приспособлено для получения необходимых условий экстремума в задаче оптимального управления в классе кусочно-непрерывных управлений. Для измеримых управлений требуется аналогичный результат, но при несколько более слабых предположениях. Он доказан, используя теорему Брауэра о неподвижной точке, в работе [3].

Для формулировки результатов и их доказательств необходимы некоторые определения. Мы будем иметь дело с функциями многих переменных, т. е. с функциями, определенными на подмножествах пространства $\mathbb{R}^n$, которое рассматриваем как совокупность вектор-столбцов $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Ради экономии места будем писать так: $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$, где T означает транспонирование. Наряду с пространством $\mathbb{R}^n$ будем также рассматривать пространство $(\mathbb{R}^n)'$, элементы которого суть вектор-строки (т. е. те же наборы из n действительных чисел, но расположенные в строку). Пусть $a = (a_1, \ldots, a_n) \in (\mathbb{R}^n)'$ и $x = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$. Обозначим $a \cdot x = \sum_{i=1}^n a_i x_i$, т. е. — это матричное произведение

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №02-01-39012 и №02-01-00386), программ государственной поддержки ведущих научных школ Российской Федерации (НШ-304.2003.1) и «Университеты России» (УР.04.03.067), а также при поддержке U.S. CRDF-R.F. Ministry of Education Award VZ-0100-0.

вектор-строки a на вектор-столбец x. Для каждого $a \in (\mathbb{R}^n)'$ отображение $x \to a \cdot x$, очевидно, есть линейная функция (функционал) на $\mathbb{R}^n$.

Пусть $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$. Величина $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ (или короче, $|x| = \sqrt{x^T \cdot x}$) — это длина (или модуль, или евклидова норма) вектора x. Пусть $\widehat{x} \in \mathbb{R}^n$ и $\delta > 0$. Открытый шар и замкнутый шар с центром в точке $\widehat{x}$ радиуса δ обозначаем соответственно $U_\delta(\widehat{x}; \mathbb{R}^n) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - \widehat{x}| < \delta\}$ и $B_\delta(\widehat{x}; \mathbb{R}^n) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - \widehat{x}| \leqslant \delta\}$. Множество в $\mathbb{R}^n$ открыто, если с каждой своей точкой оно содержит и некоторый шар с центром в этой точке. Окрестность точки — любое открытое множество, содержащее данную точку.

Пусть $\Lambda\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^s$ — линейный оператор. Мы будем отождествлять его с его матрицей в стандартных базисах $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^s$, так что если $x \in \mathbb{R}^n$, то Λx — произведение матрицы Λ на вектор x. В частности, если $s = 1$, т. е. $\Lambda = l$ — линейный функционал, то $l(x) = a \cdot x$, где $a = (l(e_1), \dots, l(e_n))$ и $e_1, \dots, e_n$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^n$.

Норма оператора Λ определяется обычным образом: $\|\Lambda\| = \max_{|x| \leqslant 1} |\Lambda x|$.

Пусть M — подмножество $\mathbb{R}^n$ и $\widehat{x} \in M$. Будем говорить, что отображение $F\colon M \to \mathbb{R}^s$ *строго дифференцируемо в $\widehat{x}$ относительно M*, если найдется такой оператор $\Lambda\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^s$, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что всех $x', x'' \in U_\delta(\widehat{x}; \mathbb{R}^n) \cap M$ выполняется неравенство

$$|F(x') - F(x'') - \Lambda(x' - x'')| \leqslant \varepsilon |x' - x''|. \tag{1}$$

Оператор Λ будем обозначать $\widetilde{F}'(\widehat{x})$ и называть *производной отображения F в точке $\widehat{x}$ относительно множества M*. В частности, если $s = 1$, т. е. если задана функция $f\colon M \to \mathbb{R}$, то говорим о строгой дифференцируемости f в $\widehat{x}$ относительно M и соответствующий линейный функционал (элемент $(\mathbb{R}^n)'$) обозначаем $\widetilde{f}'(\widehat{x})$.

Если M — окрестность точки $\widehat{x}$, то (1) — стандартное определение строгой дифференцируемости отображения F в точке $\widehat{x}$ (см. [1], стр. 139). В этом случае, как легко видеть, F дифференцируемо в $\widehat{x}$ и $\Lambda = F'(\widehat{x})$ — производная F в точке $\widehat{x}$. В частности, если $s = 1$ (т. е. имеем дело с функцией f), то ее производную обозначаем $f'(\widehat{x})$. Из дифференцируемости отображения F в точке $\widehat{x}$ не следует, вообще говоря, его строгая дифференцируемость в этой точке, но если F непрерывно дифференцируемо в некоторой окрестности $\widehat{x}$, то оно строго дифференцируемо в $\widehat{x}$ (см. там же).

Покажем, что если отображение $F\colon M \to \mathbb{R}^s$ строго дифференцируемо в $\widehat{x}$ относительно M, то существует такая окрестность U_0 точки $\widehat{x}$, что F непрерывно на $U_0 \cap M$. Действительно, пусть $\delta > 0$ такое, что (1) выполняется с $\varepsilon = 1$. Положим $U_0 = U_{\delta/2}(\widehat{x}; \mathbb{R}^n)$ и пусть $\overline{x} \in U_0 \cap M$. Для $\varepsilon > 0$ возьмем $\delta_0 = \min\{\delta/2, \varepsilon/2, \varepsilon/2\|\widetilde{F}'(\widehat{x})\|\}$. Тогда, если $x \in U_{\delta_0}(\widehat{x}; \mathbb{R}^n) \cap M$, то

$$\begin{aligned} |F(x) - F(\overline{x})| &= |F(x) - F(\overline{x}) - \widetilde{F}'(\widehat{x})(x - \overline{x}) + \widetilde{F}'(\widehat{x})(x - \overline{x})| \\ &\leqslant |x - \overline{x}| + \|\widetilde{F}'(\widehat{x})\| |x - \overline{x}| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon, \end{aligned}$$

т. е. F непрерывно в $\overline{x}$ и тем самым на $U_0 \cap M$.

Пусть C — выпуклый конус в $\mathbb{R}^n$. Множество $C^* = \{y \in (\mathbb{R}^n)' \mid y \cdot x \geqslant 0, \ \forall\, x \in C\}$ называется сопряженным конусом к C. Легко видеть, что C^* — выпуклый замкнутый конус.

Формулировка основных результатов

Мы начинаем с формулировки обобщенной теоремы об обратной функции

Теорема 1. *Пусть C — выпуклый замкнутый конус в $\mathbb{R}^n$, U — окрестность точки $\widehat{x} \in \mathbb{R}^n$, отображение $F\colon U \cap (\widehat{x}+C) \to \mathbb{R}^s$ строго дифференцируемо в $\widehat{x}$ относительно $U \cap (\widehat{x}+C)$ и $\widetilde{F}'(\widehat{x})(C) = \mathbb{R}^s$. Тогда существуют окрестность V точки $F(\widehat{x})$, отображение $\varphi\colon V \to U \cap (\widehat{x}+C)$ и константа $K>0$ такие, что $F(\varphi(y)) = y$ и $|\varphi(y)-\widehat{x}| \leqslant K|y-F(\widehat{x})|$ для всех $y \in V$.*

Эту теоремы мы применяем для получения необходимых условий локального экстремума (т. е. минимума или максимума) в следующей экстремальной задаче

$$f_0(x) \to \mathrm{extr}, \quad f_i(x) \leqslant 0, \quad i=1,\dots,m', \quad f_i(x)=0, \quad i=m'+1,\dots,m, \quad x \in \widehat{x}+C. \tag{2}$$

Здесь функции f_i, $i=0,1,\dots,m$, определены на множестве $U \cap (\widehat{x}+C)$, где U — окрестность точки $\widehat{x} \in \mathbb{R}^n$ и C — выпуклый замкнутый конус в $\mathbb{R}^n$.

Свяжем с задачей (2) функцию Лагранжа $\mathscr{L}(x,\lambda) = \sum_{i=0}^m \lambda_i f_i(x)$, где $\lambda = (\lambda_0,\lambda_1,\dots,\lambda_m)$ — вектор множителей Лагранжа.

Теорема 2. *Пусть в задаче (2) функции f_i, $0 \leqslant i \leqslant m$, строго дифференцируемы в точке $\widehat{x}$ относительно множества $U \cap (\widehat{x}+C)$. Тогда, если $\widehat{x}$ — локальный экстремум в этой задаче, то найдется ненулевой вектор множителей Лагранжа $\lambda = (\lambda_0,\lambda_1,\dots,\lambda_m)$ такой, что $\lambda_0 \geqslant 0$ ($\lambda_0 \leqslant 0$), если задача на минимум (максимум) и при этом*

(*a*) $\lambda_i \geqslant 0, \quad i=1,\dots,m'$;

(*b*) $\lambda_i f(\widehat{x}) = 0, \quad i=1,\dots,m'$;

(*c*) $\widetilde{\mathscr{L}_x}(\widehat{x},\lambda) \in C^* \iff \sum_{i=0}^m \lambda_i \widetilde{f}_i'(\widehat{x}) \in C^*$.

Сформулируем теперь наиболее важные следствия этого результата.

1. Пусть U — окрестность точки $\widehat{x} \in \mathbb{R}$ и функции f_i, $i=0,1\dots,m$, определены на U. Рассмотрим задачу

$$f_0(x) \to \mathrm{extr}, \quad f_i(x) = 0, \quad i=1,\dots,m. \tag{3}$$

Следствие 1. *Пусть в задаче (3) функции f_i, $0 \leqslant i \leqslant m$ строго дифференцируемы в точке $\widehat{x}$. Тогда, если $\widehat{x}$ — локальный экстремум в этой задаче, то найдется ненулевой вектор множителей Лагранжа $\lambda = (\lambda_0,\lambda_1,\dots,\lambda_m)$ такой, что $\lambda_0 \geqslant 0$ ($\lambda_0 \leqslant 0$), если задача на минимум (максимум) и*

$$\mathscr{L}_x(\widehat{x},\lambda) = 0 \iff \sum_{i=0}^m \lambda_i f_i'(\widehat{x}) = 0.$$

Это классическое правило множителей Лагранжа, явно сформулированное Лагранжем в 1797 году, но которым он пользовался, начиная с середины XVIII века.

2. Пусть снова U — окрестность точки $\widehat{x} \in \mathbb{R}$ и функции f_i, $i=0,1\dots,m$, определены на U. Рассмотрим задачу

$$f_0(x) \to \mathrm{extr}, \quad f_i(x) \leqslant 0, \quad i=1,\dots,m', \quad f_i(x)=0, \quad ß = m'+1,\dots,m. \tag{4}$$

Следствие 2. *Пусть в задаче (4) функции f_i, $0 \leqslant i \leqslant m$, строго дифференцируемы в точке $\widehat{x}$. Тогда, если $\widehat{x}$ — локальный экстремум в этой задаче, то найдется ненулевой вектор множителей Лагранжа $\lambda = (\lambda_0,\lambda_1,\dots,\lambda_m)$ такой, что $\lambda_0 \geqslant 0$ ($\lambda_0 \leqslant 0$), если задача на минимум (максимум) и при этом* (*a*) $\lambda_i \geqslant 0, \quad i = 1, \dots, m'$;

(*b*) $\lambda_i f(\widehat{x}) = 0, \quad i = 1, \dots, m'$;

(*c*) $\mathscr{L}_x(\widehat{x}, \lambda) = 0$.

Эта теорема была доказана в [4].

3. Отметим, наконец, еще одну ситуацию. Пусть U — окрестность точки $\widehat{x} \in \mathbb{R}^n$ и функции f_i, $i = 0, 1, \dots, m$, определены на множестве $U \cap (\widehat{x} + \mathbb{R}^n_+)$, где $\mathbb{R}^n_+ = \{x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n : x_i \geqslant 0,\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$. Рассмотрим задачу

$$f_0(x) \to \mathrm{extr}, \quad f_i(x) \leqslant 0, \quad i = 1, \dots, m', \quad f_i(x) = 0, \\ i = m' + 1, \dots, m, \quad x \in U \cap (\widehat{x} + \mathbb{R}^n_+). \quad (5)$$

Следствие 3. *Пусть в задаче* (5) *функции* f_i, $0 \leqslant i \leqslant m$, *строго дифференцируемы в* $\widehat{x}$ *относительно множества* $U \cap (\widehat{x} + \mathbb{R}^n_+)$. *Тогда, если* $\widehat{x}$ *— локальный экстремум в этой задаче, то найдется ненулевой вектор множителей Лагранжа* $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m)$ *такой, что* $\lambda_0 \geqslant 0$ $(\lambda_0 \leqslant 0)$, *если задача на минимум* (*максимум*) *и*

(*a*) $\lambda_i \geqslant 0, \quad i = 1, \dots, m'$;

(*b*) $\lambda_i f(\widehat{x}) = 0, \quad i = 1, \dots, m'$;

(*c*) $\mathscr{L}_x(\widehat{x} + 0, \lambda) \geqslant 0 \iff \sum_{i=0}^m \lambda_i f_i'(\widehat{x} + 0) \geqslant 0$,

где $f_i'(\widehat{x} + 0)$ *— производная справа функции* f_i *в точке* $\widehat{x}$, $0 \leqslant i \leqslant m$, *и неравенство между векторами понимается покоординатно.*

Именно к такого сорта задаче сводится доказательство необходимых условий экстремума в задаче оптимального управления (в классе кусочно-непрерывных управлений), стандартные требования к которой гарантируют выполнение условий следствия.

Доказательства

$\lhd$ [Доказательство теоремы 1] Как уже было сказано, доказательство основано на методе Ньютона, где роль обратного оператора к $\widetilde{F}'(\widehat{x})$ играет правый обратный к $\widetilde{F}'(\widehat{x})$, существование и нужные свойства которого вытекают из следующей леммы.

Лемма. *Пусть* C *— выпуклый конус в* $\mathbb{R}^n$ *и* $\Lambda \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^s$ *— линейный оператор такой, что* $\Lambda(C) = \mathbb{R}^s$. *Тогда существуют отображение* $R \colon \mathbb{R}^s \to C$ *и константа* $\gamma > 0$ *такие, что* $\Lambda(R(y)) = y$ *и* $|R(y)| \leqslant \gamma |y|$ *для всех* $y \in \mathbb{R}^s$.

$\lhd$ Пусть S — s-мерный симплекс в $\mathbb{R}^s$, т. е. S — выпуклая оболочка некоторого набора аффинно независимых векторов $e_1, \dots, e_{s+1}$. Тогда любой вектор $y \in S$ однозначно представляется в виде $y = \sum_{i=1}^{s+1} \alpha_i e_i$, где $\alpha_i \geqslant 0$, $1 \leqslant i \leqslant s+1$ и $\sum_{i=1}^{s+1} \alpha_i = 1$ (числа α_i называют барицентрическими координатами y) и внутренность S не пуста (см. [5, стр. 27–29]). Можно считать, что нуль принадлежит внутренности S. Тогда для некоторого $r > 0$ шар $B_r(0; \mathbb{R}^s)$ также принадлежит внутренности S. Так как $\Lambda(C) = \mathbb{R}^s$, то найдутся такие $f_i \in C$, $1 \leqslant i \leqslant s+1$, что $\Lambda f_i = e_i$, $1 \leqslant i \leqslant s+1$. Для каждого $y \in \mathbb{R}^s$, $y \neq 0$, положим $R(y) = (|y|/r) \sum_{i=1}^{s+1} \alpha_i (r|y|^{-1} y) f_i$, где $\alpha_i(r|y|^{-1}y)$, $1 \leqslant i \leqslant s+1$, — барицентрические координаты вектора $r|y|^{-1}y$, и пусть $R(0) = 0$. Ясно, что $R(y) \in C$ для любого $y \in \mathbb{R}^s$. Далее имеем:

$$\Lambda(R(y)) = (|y|/r) \sum_{i=1}^{s+1} \alpha_i (r|y|^{-1} y) e_i = (|y|/r) r |y|^{-1} y = y$$

и

$$|R(y)| \leqslant (|y|/r) \max_{1\leqslant i\leqslant s+1} \alpha_i(r|y|^{-1}y)\sum_{i=1}^{s+1}|f_i| \leqslant (|y|/r)\sum_{i=1}^{s+1}|f_i| = \gamma|y|,$$

где $\gamma = r^{-1}\sum_{i=1}^{s+1}|f_i|$. $\rhd$

Приступим теперь непосредственно к доказательству теоремы. Оператор $\widetilde{F}'(\widehat{x})$ удовлетворяет условиям леммы. Возьмем соответствующие ему отображение R и число γ из этой леммы. Для $\varepsilon = 1/2\gamma$ найдется (согласно определению строгой дифференцируемости F в $\widehat{x}$ относительно множества $U \cap (\widehat{x}+C)$ и непрерывности F в некоторой окрестности $\widehat{x}$, пересеченной с $\widehat{x}+C$) такое $\delta > 0$, что $U_\delta(\widehat{x};\mathbb{R}^n) \subset U$, отображение F непрерывно на $B_{\delta/2}(\widehat{x};\mathbb{R}^n) \cap (\widehat{x}+C)$ и если $x', x'' \in U_\delta(\widehat{x};\mathbb{R}^n) \cap (\widehat{x}+C)$, то

$$|F(x') - F(x'') - \widetilde{F}'(\widehat{x})(x'-x'')| \leqslant \frac{1}{2\gamma}|x'-x''|. \tag{6}$$

Положим $V = U_{\delta/4\gamma}(F(\widehat{x});\mathbb{R}^s)$ и пусть $y \in V$. Рассмотрим последовательность (итеративный процесс Ньютона)

$$x_i = x_{i-1} + R(y - F(x_{i-1})), \quad i \in \mathbb{N}, \quad x_0 = \widehat{x}. \tag{7}$$

Покажем, что $x_i \in B_{\delta/2}(\widehat{x};\mathbb{R}^n) \cap (\widehat{x}+C)$ $(i = 0,1,2,\ldots)$. Доказываем по индукции. Ясно, что $x_0 \in B_{\delta/2}(\widehat{x};\mathbb{R}^n) \cap (\widehat{x}+C)$ и допустим $x_i \in B_{\delta/2}(\widehat{x};\mathbb{R}^n) \cap (\widehat{x}+C)$, $i = 0,1,\ldots,m$. Из (7) следует, что

$$\Lambda(x_i - x_{i-1}) = y - F(x_{i-1}), \quad i = 0,1,\ldots,m. \tag{8}$$

Воспользовавшись последовательно (7) с оценкой для отображения R, (8), (6) и затем итерируя процедуру, будем иметь

$$\begin{aligned}|x_{m+1} - x_m| &\leqslant \gamma|y - F(x_m)| = \gamma|F(x_{m-1}) - F(x_m) + \Lambda(x_m - x_{m-1})| \\ &\leqslant \frac{1}{2}|x_m - x_{m-1}| \leqslant \frac{1}{4}|x_{m-1} - x_{m-2}| \leqslant \ldots \leqslant \frac{1}{2^m}|x_1 - \widehat{x}|.\end{aligned} \tag{9}$$

Теперь по неравенству треугольника, (9) и (7)

$$\begin{aligned}|x_{m+1} - \widehat{x}| &\leqslant |x_{m+1} - x_m| + |x_m - x_{m-1}| + \ldots + |x_1 - \widehat{x}| \\ &\leqslant \left(\frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^{m-1}} + \ldots + 1\right)|x_1 - \widehat{x}| \leqslant 2\gamma|y - F(\widehat{x})| < 2\gamma\frac{\delta}{4\gamma} = \frac{\delta}{2},\end{aligned}$$

т. е. $x_{m+1} \in B_{\delta/2}(\widehat{x};\mathbb{R}^n)$.

По предположению $x_m \in \widehat{x}+C$. Отсюда и из (7): $x_{m+1} \in x_m + C \subset \widehat{x}+C+C = \widehat{x}+C$ (в силу выпуклости C). Таким образом, $x_{m+1} \in B_{\delta/2}(\widehat{x},\mathbb{R}^n) \cap (\widehat{x}+C)$ и тем самым это включение выполняется для всех $i = 0,1,2,\ldots$

Так как для любых i и j (по неравенству треугольника и (9))

$$\begin{aligned}|x_{i+j} - x_i| &\leqslant |x_{i+j} - x_{i+j-1}| + \ldots + |x_{i+1} - x_i| \\ &\leqslant \left(\frac{1}{2^{i+j-1}} + \ldots + \frac{1}{2^i}\right)|x_1 - \widehat{x}| \leqslant \frac{2}{2^i}|x_1 - \widehat{x}| \to 0\end{aligned}$$

при $i \to \infty$, то последовательность $\{x_i\}$ фундаментальна и значит, сходится.

Обозначим $\varphi(y) = \lim_{i\to\infty} x_i$. Ясно, что $\varphi(y) \in B_{\delta/2}(\widehat{x};\mathbb{R}^n) \cap (\widehat{x} + C)$. Далее в силу непрерывности F на $B_{\delta/2}(\widehat{x};\mathbb{R}^n) \cap (\widehat{x} + C)$ и (8) имеем

$$|F(\varphi(y)) - y| = \lim_{i\to\infty} |F(x_i) - y| = \lim_{i\to\infty} |\widetilde{F}'(\widehat{x})(x_{i+1} - x_i)| = 0$$

и, следовательно, $F(\varphi(y)) = y$.

Поскольку (по неравенству треугольника и (7))

$$|x_i - \widehat{x}| \leqslant |x_i - x_{i-1}| + \ldots + |x_1 - \widehat{x}| \leqslant 2\gamma|y - F(\widehat{x})|,$$

то переходя здесь к пределу при $i \to \infty$ и обозначая $K = 2\gamma$, получаем, что $|\varphi(y) - \widehat{x}| \leqslant K|y - F(\widehat{x})|$. $\rhd$

Заметим, что если в теореме $C = \mathbb{R}^n$, $s = n$, то $\widetilde{F}'(\widehat{x})$ — обратимый оператор и в этом случае $\varphi\colon V \to F^{-1}(V)$ — обратное отображение к F. Действительно, обозначим $\Lambda = F'(\widehat{x})$, тогда $R = \Lambda^{-1}$. Пусть $y \in V$ и $F(x) = y$. Имеем

$$\begin{aligned} |x - \varphi(y)| &= |\Lambda^{-1}\Lambda(x - \varphi(y))| \leqslant \gamma|\Lambda(x - \varphi(y))| \\ &= \gamma|F(x) - F(\varphi(y)) - \Lambda(x - \varphi(y))| \leqslant \gamma\frac{1}{2\gamma}|x - \varphi(y)| = \frac{1}{2}|x - \varphi(y)|, \end{aligned} \quad (10)$$

т. е. $x = \varphi(y)$.

$\lhd$ [Доказательство теоремы 2] Пусть $\widehat{x}$ — локальный экстремум в задаче (2). Можно считать, что $f_i(\widehat{x}) = 0$, $1 \leqslant i \leqslant m' + 1$ (и тем самым утверждение (b) теоремы выполнено). Действительно, отбросим те ограничения, для которых $f_i(\widehat{x}) < 0$. Легко понять, что $\widehat{x}$ — локальный экстремум и в новой задаче. Если для нее будут доказаны условия (a) и (c), то (b) будет выполняется автоматически. Дополнив найденный набор множителей Лагранжа нулевыми компонентами (соответствующие тем номерам, где $f_i(\widehat{x}) < 0$), получим утверждения (a), (b), (c) для исходной задачи.

Пусть, для определенности, $\widehat{x}$ — локальный минимум. Рассмотрим отображение $F\colon (U\cap(\widehat{x}+C))\times\mathbb{R}_+^{m'+1} \to \mathbb{R}^{m+1}$, определенное по правилу: $F(x,u) = (f_0(x)+u_0, f_1(x)+u_1, \ldots, f_{m'}(x)+u_{m'}, f_{m'+1}(x), \ldots, f_m(x))^T$. Ясно, что $F(\widehat{x},0) = (f_0(\widehat{x}),0)$. Из строгой дифференцируемости функций f_i, $0 \leqslant i \leqslant m$, в точке $\widehat{x}$ относительно множества $U \cap (\widehat{x}+C)$ следует строгая дифференцируемость отображения F в точке $(\widehat{x},0)$ относительно множества $(U\cap(\widehat{x}+C))\times\mathbb{R}_+^{m'+1}$, где $\widetilde{F}'(\widehat{x},0)$ — матрица, строки которой суть $(\widetilde{f}_0'(\widehat{x}),1,0,\ldots,0)$, $(\widetilde{f}_1'(\widehat{x}),0,1,0,\ldots,0), \ldots, (\widetilde{f}_{m'}'(\widehat{x}),0,\ldots,0,1)$, $(\widetilde{f}_{m'+1}'(\widehat{x}),0,\ldots,0), \ldots, (\widetilde{f}_m'(\widehat{x}),0,\ldots,0)$.

Покажем, что $\widetilde{F}'(\widehat{x},0)(C \times \mathbb{R}_+^{m'+1}) \neq \mathbb{R}^{m+1}$. Если это не так, то по теореме 1 (условия которой, очевидно, выполнены) найдутся окрестность V точки $(f_0(\widehat{x}),0)$, отображение $\varphi\colon V \to (U\cap(\widehat{x}+C))\times\mathbb{R}_+^{m'+1}$ и константа $K > 0$ такие, что $|\varphi(y)-(\widehat{x},0)| \leqslant K|y-(f_0(\widehat{x}),0)|$ для всех $y \in V$. В частности, для всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ вектор $y_\varepsilon = (f_0(\widehat{x}) - \varepsilon, 0)$ принадлежит V и $|\varphi(y_\varepsilon) - (\widehat{x},0)| \leqslant K\varepsilon$. Отсюда следует, что какова бы ни была окрестность U_0 точки $\widehat{x}$ найдутся такие $x_\varepsilon \in U_0 \cap (\widehat{x} + C)$ и $u_\varepsilon = (u_{0\varepsilon}, \ldots, u_{m'\varepsilon})^T \in \mathbb{R}_+^{m'+1}$, что $f_0(x_\varepsilon)+u_{0\varepsilon} = f_0(\widehat{x})-\varepsilon$, $f_1(x_\varepsilon)+u_{1\varepsilon} = 0, \ldots, f_{m'}(x_\varepsilon)+u_{m'\varepsilon} = 0, f_{m'+1}(x_\varepsilon) = 0, \ldots, f_m(x_\varepsilon) = 0$. Таким образом, точка x_ε допустима в задаче (2), но $f_0(x_\varepsilon) \leqslant f_0(x_\varepsilon) + u_{0\varepsilon} = f_0(\widehat{x}) - \varepsilon < f_0(\widehat{x})$ в противоречии с тем, что $\widehat{x}$ — локальный минимум. Итак, $\widetilde{F}'(\widehat{x},0)(C \times \mathbb{R}_+^{m'+1}) \neq \mathbb{R}^{m+1}$.

Множество $Q = \widetilde{F}'(\widehat{x},0)(C \times \mathbb{R}_+^{m'+1})$ есть выпуклый конус в $\mathbb{R}^{m+1}$ как образ выпуклого конуса при линейном отображении. Множество $Q \setminus \{0\}$ также выпуклый конус. По теореме отделимости (см., например, [5, стр. 37]) его можно отделить от точки 0, т. е.

существует такой ненулевой вектор $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m)$, что для всех $y \in Q \setminus \{0\}$ справедливо неравенство $\lambda \cdot y \geqslant 0$, которое, очевидно, справедливо и для всех $y \in Q$. Но $y = (\widetilde{f}_0'(\widehat{x}) \cdot x + u_0, \widetilde{f}_1'(\widehat{x}) \cdot x + u_1, \ldots, \widetilde{f}_{m'}'(\widehat{x}) \cdot x + u_{m'}, \widetilde{f}_{m'+1}(\widehat{x}) \cdot x, \ldots, \widetilde{f}_m'(\widehat{x}) \cdot x)^T$ и поэтому мы имеем

$$\sum_{i=0}^{m} \lambda_i \widetilde{f}_i'(\widehat{x}) \cdot x + \sum_{i=0}^{m'} \lambda_i u_i \geqslant 0 \quad \forall\, (x, u) \in C \times \mathbb{R}_+^{m'+1}, \tag{11}$$

где $u = (u_0, u_1, \ldots, u_{m'})$.

Полагая $x = 0$, получаем утверждение (a) теоремы, а полагая $u = 0$, получаем утверждение (c). Если $\widehat{x}$ — локальный максимум, то в качестве первой компоненты $F(x, u)$ надо взять $f_0(x) - u_0$. Все рассуждения остаются прежними, но и из (11) будет следовать, что $\lambda_0 \leqslant 0$. $\rhd$

$\lhd$ [Доказательство следствия 1] В силу предположений $\widetilde{f}_i'(\widehat{x}) = f_i'(\widehat{x})$, $0 \leqslant i \leqslant m$. Отсутствие ограничения типа включения можно трактовать так: $C = \mathbb{R}^n$. Тогда утверждение (c) теоремы означает, что линейный функционал неотрицателен на всем $\mathbb{R}^n$ и, следовательно, он равен нулю. $\rhd$

Отметим, что если не заботиться о знаке λ_0, то следствие 1 сразу вытекает из теоремы 1. Действительно, рассмотрим отображение $F\colon U \to \mathbb{R}^{m+1}$, $F(x) = (f_0(x), f_1(x), \ldots, f_m(x))^T$. Также как при доказательстве теоремы 2 проверяется, что $F'(\widehat{x})(\mathbb{R}^n) \neq \mathbb{R}^{m+1}$, т. е. строки матрицы $F'(\widehat{x})$ линейно зависимы, а это и есть утверждение следствия 1.

$\lhd$ [Доказательство следствия 2] Поскольку здесь также $\widetilde{f}_i'(\widehat{x}) = f_i'(\widehat{x})$, $0 \leqslant i \leqslant m$, и $C = \mathbb{R}^n$, то те же аргументы, что и выше приводят к требуемому утверждению. $\rhd$

$\lhd$ [Доказательство следствия 3] Легко видеть, что $\widetilde{f}_i(\widehat{x}) = f_i'(\widehat{x}+0)$, $0 \leqslant i \leqslant m$, и ясно, что сопряженный конус к $\mathbb{R}_+^n$ совпадает с $\mathbb{R}_+^n$. $\rhd$

Литература

1. *Алесеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В.* Оптимальное управление.—М.: Наука, 1979.—429 с.
2. *Дмитрук А. В., Милютин А. А., Осмоловский Н. П.* Теорема Люстерника и теория экстремума // Успехи мат. наук.—1980.—Т. 35, вып. 6.—С. 11–40.
3. *Арутюнов А. В., Винтер Р. Б.* Метод конечномерной аппроксимации в теории оптимального управления // Диф. уравнения.—2003.—Т. 39, № 11.—С. 1443–1451.
4. *John F.* Extreme problems with inequalities as subsidery conditions // Studies and essays presented to R. Courant on his 60th birthday, January 8.—New York: Intersociety, 1948.—P. 187–204.
5. *Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М.* Выпуклый анализ и его приложения.—М.: Эдиториал УРСС, 2003.—176 с.

Статья поступила 15 ноября 2004 г.

Магарил-Ильяев Георгий Георгиевич, д. ф.-м. н.
г. Москва, Московский государственный институт радиотехники,
электроники и автоматики (Технический университет)
E-mail: georg@magaril.mccme.ru