Владикавказский математический журнал
Октябрь–декабрь, 2004, Том 6, Выпуск 4

УДК **517.98**

ВЫПУКЛЫЕ ЭКСТЕНСИОНАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

А. Г. Кусраев, С. С. Кутателадзе

Владимиру Михайловичу Тихомирову
к его 70-летию

В работе предложен булевозначный подход к изучению выпуклых экстенсиональных операторов. Указаны некоторые направления дальнейших исследований.

Введение

Отображение, действующее в функциональных пространствах, называют *экстенсиональным*, если оно не сужает множество точек совпадения любых двух функции из области его определения. Точнее говоря, если пространства V и W состоят из функций, определенных на одном и том же множестве Ω, то экстенсиональность отображения $f : V \to W$ означает, что равенство двух функций $v, v' \in X$ на некотором подмножестве $\Omega_0 \subset \Omega$ влечет равенство образов $f(v)$ и $f(v')$ на том же подмножестве Ω_0. Разумеется, это определение осмыслено и в том случае, когда функциональные пространства V и W заданы на разных множествах, если при этом область определения функций из W определенным образом вложена в область определения функций из V.

Классический пример нелинейного экстенсионального отображения представляет собой оператор Немыцкого. Последний же входит как нелинейная составляющая часть в конструкцию других операторов и уравнений как, например, операторов Урысона и Гаммерштейна (см. [5, 6]). Экстенсиональные отображения присутствуют и в теории интегрантов, восходящей к Р. Рокафеллару (см. [13, 15, 16, 17, 19]). Кроме того, этот класс операторов неявно присутствует в вероятностном функциональном анализе, т. е. при изучении стохастических аналогов различных конструкций анализа: измеримость обратных или сопряженных, спектральные свойства случайных операторов и т. п. ([1, 14, 18, 21]). Общие свойства экстенсиональных отображений составляют существенную часть аппарата булевозначного анализа [9], а также с необходимостью появляются в выпуклом анализе операторов, поскольку таковым является, например, сопряженный выпуклый оператор ([10, 11, 12]).

Таким образом, экстенсиональные отображения явно или неявно встречаются при исследовании различных аналитических задач, и при этом используется разнообразный математический инструментарий. В то же время аналитические свойства общих экстенсиональных отображений не подвергались достаточно детальному изучению. Цель настоящей работы — выделить класс выпуклых экстенсиональных операторов и наметить булевозначный подход к их изучению. Необходимые сведения из теории решеточно нормированных пространств, субдифференциального исчисления и булевозначного анализа собраны соответственно в книгах [8, 9, 10, 11].

1. Полунепрерывность

Введем класс отображений, соответствующих интерпретации в булевозначной модели полунепрерывных снизу выпуклых функций.

1.1. Пусть E — некоторое K-пространство и $\mathfrak{P}(E)$ — полная булева алгебра порядковых проекторов в E. В декартовом произведении $E \times \mathfrak{P}(E)$ выделим множество $E^\star$, состоящее из таких пар (x, π), что $\pi x = 0$. Наделим множество $E^\star$ сложением, умножением на положительные числа и отношением порядка с помощью формул:

$$(x, \pi) + (y, \rho) := ((\pi \wedge \rho)(x + y), \pi \vee \rho) \quad \lambda(x, \pi) := (\lambda x, \pi)$$
$$(x, \pi) \leqslant (y, \rho) \leftrightarrow \pi \leqslant \rho \,\&\, \rho^\perp x \leqslant \rho^\perp y$$
$$(x, y \in E;\ \pi, \rho \in \mathfrak{P}(E);\ \lambda \in \mathbb{R}).$$

Нетрудно проверить, что $E^\star$ — порядково полная $\mathbb{R}$-коническая решетка (см. [10, 1.5.1]). Отображение, сопоставляющее элементу $x \in E$ пару $(x, 0)$, служит вложением E в $E^\star$ с сохранением операций и порядка. Будем отождествлять E с соответствующим подмножеством $E^\star$. Проектор $\pi \in \mathfrak{P}(E)$ можно продолжить до проектора на $E^\star$ следующим образом: если $z := (x, \rho) \in E^\star$, то полагаем $\pi z := (\pi x, \pi\rho)$. Множество вида $\pi E^\star$ называют полосой $E^\star$. Пара $(0, \pi)$, обозначаемая символом $+\propto_\pi := \propto_\pi$, будет наибольшим элементом в полосе $\pi E^\star$. Элемент $+\infty := \infty := \propto_{\mathbb{1}}$ — наибольший элемент в $E^\star$. Итак, в каждой полосе $\pi E^\star$ имеется своя бесконечность $\propto_\pi$, причем эти частные бесконечности служат осколками бесконечности ∞, т. е. $\propto_\pi \wedge \propto_{\pi^\perp} = 0$ и $\propto_\pi \vee \propto_{\pi^\perp} = \infty$. Очевидно, что множество всех бесконечных элементов $\propto_\pi$ с индуцированным из $E^\star$ порядком образует полную булеву алгебру, изоморфную $\mathfrak{P}(E)$. Обозначим $\overline{E} := E^\star \cup -E^\star$.

1.2. Из теоремы Гордона (см. [9, 5.2.2]) легко выводится следующий результат.

Пусть $\mathscr{R}$, $\mathscr{R}^\bullet$ и $\overline{\mathscr{R}}$ — такие элементы булевозначного универсума, что $\mathbb{V}^{(B)} \models$ «$\mathscr{R}$ — поле вещественных чисел, $\mathscr{R}^\bullet = \mathscr{R} \cup \{\infty\}$ и $\overline{\mathscr{R}} = \mathscr{R} \cup \{\pm\infty\}$». Алгебраические системы $\mathscr{R}^\bullet{\downarrow}$ и $\overline{\mathscr{R}}{\downarrow}$ алгебраически и порядково изоморфны $(\mathscr{R}{\downarrow})^\star$ и $\overline{\mathscr{R}{\downarrow}}$ соответственно. При этом существует изоморфизм χ булевой алгебры B на булеву алгебру проекторов $\mathfrak{Pr}(\mathscr{R}{\downarrow})$ такой, что имеют место эквивалентности

$$\chi(b)x = \chi(b)y \leftrightarrow b \leqslant [\![x = y]\!],$$
$$\chi(b)x \leqslant \chi(b)y \leftrightarrow b \leqslant [\![x \leqslant y]\!]$$

для всех $x, y \in \mathscr{R}^\bullet{\downarrow}$ и $b \in B$.

$\lhd$ Ограничимся доказательством утверждения относительно $\mathscr{R}^\bullet$. Если $x \in \mathscr{R}^\bullet{\downarrow}$ и $b_x := [\![x = \infty]\!]$, то $b_x^* = [\![x \in \mathscr{R}]\!]$. Положим $\bar{x} := \mathrm{mix}\{b_x^* x, b_x 0\}$ и $h(x) := (\bar{x}, \chi(b_x))$. Тем самым определено взаимнооднозначное отображение $h : \mathscr{R}^\bullet{\downarrow} \to \mathscr{R}{\downarrow}^\star$. Для пары $(x', \pi) \in \mathscr{R}{\downarrow}^\star$ будет $h(x) = (x', \pi)$, если элемент $x \in \mathscr{R}^\bullet{\downarrow}$ определить соотношениями $b := \chi^{-1}(\pi)$ и $x := \mathrm{mix}\{b^* x, b\infty\}$. Тот факт, что h сохраняет алгебраические операции и порядок, следует из определений. Например, для аддитивности h нужно лишь заметить, что если $h(x) = (\bar{x}, \chi^{-1}(b))$, $h(y) = (\bar{y}, \chi^{-1}(c))$ и $h(x + y) = (\overline{x + y}, \chi^{-1}(d))$, то $d = [\![x + y = \infty]\!] = [\![x = \infty]\!] \vee [\![y = \infty]\!] = b \vee c$ и $d^*(\overline{x + y}) = d^*(x + y) = d^* x + d^* y = \bar{x} + \bar{y}$. $\rhd$

1.3. Пусть $C(Q, \overline{\mathbb{R}})$ — множество всех непрерывных функций из Q в $\overline{\mathbb{R}}$, где $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ — двухточечная компактификация поля $\mathbb{R}$. Обозначим символом $C_\propto(Q)$ множество всех непрерывных функций из Q в $\overline{\mathbb{R}}$, принимающих значение $-\infty$ на нигде не плотном множестве. Введем в $C_\propto(Q,)$ операции суммы и умножения на положительные скаляры, полагая $(u+v)\,(t) = u(t) + v(t)$ и $(\lambda u)\,(t) = \lambda \cdot u(t)$, причем правые части этих соотношений имеют смысл для каждого t из некоторого котощего множества $Q_0 \subset Q$. Порядок в $C_\propto(Q)$ вводят поточечно, т. е. $u \leqslant v$ означает по определению, что $u(t) \leqslant v(t)$ для всех $t \in Q$. Тогда $C_\propto(Q)$ — порядково полная $\mathbb{R}$-коническая решетка (см. [10, 1.5.1]). Ясно, что $C_\infty(Q) \subset C_\propto(Q) \subset C(Q, \overline{\mathbb{R}})$, причем порядок и операции в $C_\infty(Q)$ индуцированы из $C_\propto(Q)$. Порядок и операции в $C(Q, \overline{\mathbb{R}})$ определяются аналогично, оставляя неопределенными лишь выражения $\infty - \infty$ и $0 \cdot \infty$. Из результатов о функциональном представлении K-пространств вытекает следующее утверждение.

1.4. *Пусть E — произвольное K-пространство и Q — стоуновский компакт булевой алгебры $\mathfrak{P}(E)$. Тогда существует полулинейный изоморфизм $\mathbb{R}$-конической решетки $E^\star$ в $\mathbb{R}$-коническую решетку $C_\propto(Q)$. Образ E относительно этого изоморфизма служит фундаментом $C_\infty(Q)$, а образ $E^\star$ совпадает с $C_\propto(Q)$ в том и только в том случае, если E расширенно. Этот изоморфизм естественно продолжается до изоморфизма $\overline{E}$ и $C(Q, \overline{\mathbb{R}})$.*

1.5. Пусть V — пространство Банаха — Канторовича и рассмотрим отображение $f : V \to E^\star$. Говорят, что f *экстенсионально* или что f *сохраняет полосы*, если для любых $u, v \in V$ и $\pi \in \mathfrak{P}(E)$ равенство $\pi u = \pi v$ влечет $\pi f(u) = \pi f(v)$. Отображение $f : V \to E^\star$ назовем *полунепрерывным снизу в точке* $v_0 \in V$, если

$$f(v_0) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf \{ f(v) : \ v \in V, \, \lvert v - v_0 \rvert \leqslant 1/n \, \lvert v_0 \rvert \}.$$

Подчеркнем, что в этой формуле точные границы вычисляются в $E^\star$. Ввиду экстенсиональности f равносильное определение получится, если в правой части определяющего равенства заменить $\lvert v_0 \rvert$ на любой элемент $0 \leqslant e \in E$, для которого $\lvert v_0 \rvert \in \{e\}^{\perp\perp}$.

Можно показать, что для экстенсиональных отображений имеет место критерий полунепрерывности, аналогичный скалярному случаю.

Для экстенсионального отображения $f : V \to E^\star$ равносильны утверждения:

(1) *f полунепрерывно снизу;*

(2) *множество $\{v \in V : \ f(v) \leqslant e\}$ секвенциально br-замкнуто для любого $0 \leqslant e \in E$;*

(3) $\operatorname{epi}(f)$ *секвенциально br-замкнуто в $V \times E$ (с нормой $\big\lvert (v, e) \big\rvert := \lvert v \rvert + |e|$).*

1.6. ***Теорема.*** *Пусть E — расширенное K-пространство, $B := \mathfrak{P}(E)$ и $\mathscr{R}$ — поле вещественных чисел внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Пусть V — пространство Банаха — Канторовича над E, а $(\mathscr{V}, \iota)$ — его булевозначная реализация. Для любого экстенсионального отображения $f : \ V \to E^\star$ существует единственный элемент $\varphi \in \mathbb{V}^{(B)}$, для которого $\varphi : \mathscr{V} \to \mathscr{R}^\bullet$ и $[\![f(v) = \varphi(\iota x)]\!] = \mathbb{1}$ $(v \in \mathscr{V}\!\downarrow)$. При этом справедливы утверждения:*

(1) *отображение f полунепрерывно снизу (в точке $v_0 \in V$) том и только в том случае, если $\mathbb{V}^{(B)} \models$«функция φ полунепрерывна снизу (в точке $\iota v_0 \in \mathscr{V}$)»;*

(2) *отображение f выпукло (сублинейно, линейно, ограничено) в том и только в том $\mathbb{V}^{(B)} \models$«функция φ выпукла (сублинейна, линейна, ограничена)».*

$\lhd$ Из булевозначного анализа известно (см. [9, 3.2.12 и 3.3.11]), что множество всех экстенсиональных отображений из V в $E^\star$ биективно спуску элемента $\mathscr{F}$, где $\mathbb{V}^{(B)} \models$«$\mathscr{F}$ —множество всех функций из $\mathscr{V}$ в $\mathscr{R}^\bullet$».

Покажем справедливость (1). Положим

$$D_\varepsilon := \{v \in V :\ |v - v_0| \leqslant \varepsilon \mathbb{1}\}, \quad d(\varepsilon) := \sup f(D_\varepsilon);$$
$$\mathscr{D}_\varepsilon := \{v \in \mathscr{V} :\ \|v - v_0\| \leqslant \varepsilon\}, \quad \delta(\varepsilon) := \sup \varphi(\mathscr{D}_\varepsilon).$$

В силу [9, 3.3.11 (2)] верно $[\![f(D_\varepsilon)\!\uparrow = \varphi(\mathscr{D}_\varepsilon)]\!] = \mathbb{1}$ и, следовательно, $[\![d(\varepsilon) = \delta(\varepsilon)]\!] = \mathbb{1}$. Если $A := (0, \infty) \subset \mathbb{R}$, то отображения $d : \varepsilon \mapsto d(\varepsilon)$ $(\varepsilon \in A)$ и $\delta : \varepsilon \mapsto \delta(\varepsilon)$ $(\varepsilon \in A^\wedge)$ связаны соотношением $\delta = d\!\uparrow$ (см. [9, 3.5.5]) и, поэтому $[\![\sup(A) = \sup \delta(A^\wedge)]\!] = \mathbb{1}$. В силу изотонности функции δ, плотности $A^\wedge$ в $\tilde{A} := \{t \in \mathscr{R} :\ 0 < t < \infty\}$ выполняется $[\![\sup \delta(A^\wedge) = \sup \delta(\tilde{A})]\!] = \mathbb{1}$. Тем самым, равносильны следующие соотношения:

$$f(v_0) = \sup_{0<\varepsilon\in\mathbb{R}} \inf \{f(v) :\ v \in V,\ |v - v_0| \leqslant \varepsilon \mathbb{1}\},$$
$$\varphi(v_0) = \sup_{0<\varepsilon\in\mathscr{R}} \inf \{\varphi(v) :\ v \in \mathscr{V},\ \|v - v_0\| \leqslant \varepsilon\}.$$

Доказательство (2) элементарно. $\triangleright$

2. Двойственность

Изучение выпуклых операторов обычно проводят относительно векторной двойственности $X \leftrightarrow \mathscr{L}(X, E)$, где X — топологическое векторное пространство, $\mathscr{L}(X, E)$ — пространство линейных непрерывных операторов из X в упорядоченное топологическое векторное пространство E, а билинейный оператор двойственности имеет вид $(x, T) \mapsto Tx$ (см. [7, 10]). В случае же выпуклых экстенсиональных операторов наиболее естественной является двойственность между пространством Банаха — Канторовича и его операторно сопряженным пространством [8].

2.1. Пусть V — решеточно нормированное пространство над E и $E^* := \mathrm{Orth}(E)$. Обозначим символом V^* совокупность всех линейных операторов $v^* : V \to E$, для каждого из которых существует свой положительный ортоморфизм $e^* \in E^*$ такой, что

$$|\langle v | v^* \rangle| \leqslant e^* |v| \quad (v \in V).$$

Для любого $v^* \in V^*$ существует наименьший положительный элемент $e^* \in E^*$, удовлетворяющий указанному неравенству. Этот элемент мы обозначим символом $|u^*|$. Легко видеть, что отображение $v^* \mapsto |v^*|$ является разложимой нормой. При этом $(V^*, |\cdot|)$ представляет собой пространство Банаха — Канторовича, называемое *сопряженным* к V пространством (подробности см. в [7, 9]). Из данного определения и из порядковой непрерывности ортоморфизмов следует, что V^* состоит из bo-непрерывных операторов, т. е. если $v^* \in V^*$, то из $bo\text{-}\lim_\nu v_\nu = 0$ следует $bo\text{-}\lim_\nu \langle v_\nu, v^* \rangle = 0$ (см. [8, 3.3.2 (2), 4.3.1]).

2.2. *Пусть V — решеточно нормированное пространство над $E := \mathscr{R}\!\downarrow$. Обозначим через $\mathscr{V}$ его булевозначную реализацию, а через $\mathscr{V}'$ — банахово сопряженное пространство к $\mathscr{V}$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Тогда отображение $\nu \mapsto \nu\!\downarrow$ $(\nu \in \mathscr{V}'\!\downarrow)$ служит линейной изометрией между пространствами Банаха — Канторовича $\mathscr{V}'\!\downarrow$ и V^*.*

$\triangleleft$ См. [7, 3.4.7, 3.4.8], [8, 8.3.7], [9, 5.5.9, 5.5.10]. $\triangleright$

2.3. *Сопряженный оператор* или *преобразование Юнга — Фенхеля* $f^* : V^* \to \overline{E}$ отображения $f : v \to E^\star$ относительно двойственности $V \leftrightarrow V^*$ определяют формулой

$$f^*(v^*) = \sup \{\langle v, v^* \rangle - f(v) :\ v \in V\} \quad (v^* \in V^*).$$

Второй сопряженный оператор f^{**} вводят путем повторения указанной процедуры:

$$f^{**}(v) = \sup\{\langle v, v^*\rangle - f(v) : \ v^* \in V^*\} \quad (v \in V).$$

С очевидными оговорками v можно рассматривать как элемент пространства V^{**}. С точностью до такого отождествления второй сопряженный оператор f^{**} служит сужением повторного преобразования Юнга — Фенхеля $(f^*)^*$ на пространство V. Нетрудно видеть, что f^* — полунепрерывный снизу выпуклый оператор.

2.4. (1) *Пусть f и φ — те же, что и в 1.5. Тогда $f^* = \varphi^*\!\downarrow$.*

$\lhd$ Требуемое означает, что для любого $v \in \mathscr{V}\!\downarrow$ элемент $f^{**}(v)$ удовлетворяет равенству

$$f^{**}(v) = \sup\{\langle v, v^*\rangle - \varphi(v) : \ v^* \in \mathscr{V}^*\} \quad (v \in V)$$

внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Последнее можно установить теми же рассуждениями, что и в 1.5. $\rhd$

(2) *Для отображения $f : V \to E^\star$ имеет место равенство $f = f^{**}$ в том и только в том случае, когда оно экстенсионально, выпукло и полунепрерывно снизу.*

$\lhd$ Нужно применить теорему Фенхеля — Моро внутри $\mathbb{V}^{(B)}$, что законно в силу 1.5 и (1). $\rhd$

2.5. Пусть V — пространство Банаха — Канторовича, а $\Gamma_h(V,E)$ — множество всех экстенсиональных полунепрерывных снизу выпуклых операторов $f : V \to E^\star$. Легко видеть, что $\Gamma_h(V,E)$ — это A-коническая полурешетка, где $A := \mathrm{Orth}(E)$ (см. [9, 1.5.1]).

Обозначим символом $\Gamma(\mathscr{V},\mathscr{R})$ элемент из $\mathbb{V}^{(B)}$, изображающий множество всех полунепрерывных снизу выпуклых функций из $\mathscr{V}$ в $\mathscr{R}^\bullet$. Понятно, что $\Gamma(\mathscr{V},\mathscr{R})$ является $\mathscr{R}$-конической полурешеткой.

(1) *Для расширенного K-пространства $E := \mathscr{R}\!\downarrow$ отображение $\varphi \mapsto \varphi\!\downarrow$ служит полулинейным изоморфизмом A-конических полурешеток $\Gamma(\mathscr{V},\mathscr{R})\!\downarrow$ и $\Gamma_h(V,E)$, сохраняющим точные верхние границы конечных множеств. Это же отображение осуществляет изоморфизм пространств Банаха — Канторовича $\mathscr{V}'\!\downarrow$ и V^*.*

$\lhd$ То, что $\varphi \mapsto \varphi\!\downarrow$ служит биекцией между $\Gamma(\mathscr{V},\mathscr{R})\!\downarrow$ и $\Gamma_h(V,E)$, следует из 1.5. Для проверки A-полулинейности возьмем $\varphi_1,\varphi_2 \in \Gamma(\mathscr{V},\mathscr{R})\!\downarrow$, множители $\alpha_1,\alpha_2 \in A := \mathscr{R}\!\downarrow$ и точку $v \in \mathscr{V}\!\downarrow$. По определению спуска, внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ будет

$$\begin{aligned}(\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2)\!\downarrow\!(v) &= (\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2)(v) = (\alpha_1 \cdot \varphi_1(v) + \alpha_2 \cdot \varphi_2)(v)\\ &= (\alpha_1 \cdot \varphi_1\!\downarrow\!(v) + \alpha_2 \cdot \varphi_2)\!\downarrow\!(v) = (\alpha_1 \cdot \varphi_1\!\downarrow + \alpha_2 \cdot \varphi_2)\!\downarrow)(v),\end{aligned}$$

что и требовалось. $\rhd$

(2) *Если E — расширенное K-пространство, то отображение $f \mapsto f^*$ служит биекцией между множествами $\Gamma_h(V,E)$ и $\Gamma_h(V^*,E)$.*

$\lhd$ Следует из 2.3 и (1). $\rhd$

3. Субдифференцируемость

Здесь мы установим вариант теоремы Экланда для полунепрерывных экстенсиональных отображений и дадим некоторые его применения к субдифференцируемости.

3.1. Возьмем выпуклый оператор $f : V \to E^\star$, точку $v_0 \in \mathrm{dom}(f)$ и фиксированный элемент $\varepsilon \in E^+$. Оператор $v^* \in V^*$ называют *ε-субградиентом* f в точке v_0, если $\langle v, v^*\rangle - \langle v_0, v^*\rangle \leqslant f(v) - f(v_0) + \varepsilon$ для всех $v \in V$. Множество всех ε-субградиентов оператора f в точке v_0 именуют *ε-субдифференциалом* f в точке v_0 и обозначают символом $\partial_\varepsilon f(v_0)$. Как обычно, при $\varepsilon = 0$ пишем $\partial f(v_0) := \partial_0 f(v_0)$. В [10, 11] ε-субдифференциал определен на основе двойственности $X \leftrightarrow \mathscr{L}(X, E)$ и, стало быть, введенный выше ε-субдифференциал следовало бы определить как $\partial_\varepsilon f(v_0) \cap V^*$. Однако в данной работе мы рассматриваем только двойственность $V \leftrightarrow V^*$, поэтому использование одного и того же символа ∂_ε не ведет к путанице. Существенно разные ε-субдифференциалы можно получить, варьируя двойственности. Однако, простейшие свойства сопряжения при этом по существу не меняются.

Из включения $v^* \in \partial_\varepsilon f(v_0)$ следует, что $v_0 \in \partial_\varepsilon f^*(v^*)$. Если же $f^{**}(v_0) = f(v_0)$, то $v^* \in \partial_\varepsilon f(v)$ тогда и только тогда, когда $v \in \partial_\varepsilon f^*(v^*)$.

3.2. Как видно из 2.4, если f и φ — те же, что и в 1.5, то для любых $\nu \in \mathscr{V}'{\downarrow}$, $v_0 \in \mathscr{V}{\downarrow}$ и $0 \leqslant \varepsilon \in E := \mathscr{R}{\downarrow}$ равносильны соотношения $[\![\nu \in \partial_\varepsilon \varphi(v_0)]\!] = \mathbb{1}$ и $\nu{\downarrow} \in \partial_\varepsilon f(v_0)$. Таким образом, отображение $\nu \mapsto \nu{\downarrow}$ осуществляет аффинную биекцию множеств $(\partial_\varepsilon \varphi(v_0)){\downarrow}$ и $\partial_\varepsilon f(v_0)$.

Если V — пространство Банаха — Канторовича над $E := \mathscr{R}{\downarrow}$, а $f : V \to E^\star$ — полунепрерывный снизу выпуклый экстенсиональный оператор, то для любых $0 \leqslant \varepsilon \in E$, $E = \{e\}^{\perp\perp}$, и $v_0 \in \operatorname{dom}(f)$ будет $\partial_\varepsilon f(v_0) \neq \varnothing$.

$\triangleleft$ Известно, что ε-субдифференциал полунепрерывной снизу выпуклой функции φ на банаховом пространстве непуст в любой точке $v_0 \in \operatorname{dom}(\varphi)$ (см., например, [20]). Остается воспользоваться биекцией между $(\partial_\varepsilon \varphi(v_0)){\downarrow}$ и $\partial_\varepsilon f(v_0)$. $\triangleright$

3.3. *Теорема.* *Пусть V — пространство Банаха — Канторовича над K-пространством $E := \mathscr{R}{\downarrow}$, а f — полунепрерывное снизу экстенсиональное отображение из V в $E^\star$. Допустим, что для некоторых $0 < \varepsilon \in E$ и $v_0 \in V$ справедливо неравенство $f(v_0) \leqslant \inf\{f(v) : v \in V\} + \varepsilon$. Тогда для любого обратимого $0 \leqslant \lambda \in E$ существует $z_\lambda \in V$ такой, что*

$$f(z_\lambda) \leqslant f(v_0), \quad |z_\lambda - v_0| \leqslant \lambda,$$

$$f(z_\lambda) = \inf\{f(v) + \lambda^{-1}\varepsilon\, |z_\lambda - v| : \ v \in V\}.$$

$\triangleleft$ Согласно 1.5 можно считать, что $f = \varphi{\downarrow}$, где $\varphi : \mathscr{V} \to \mathscr{R}^\bullet$ — полунепрерывная снизу функция $\mathbb{V}^{(B)}$. Более того имеет место соотношение $[\![\varphi(v_0) \leqslant \inf\{\varphi(v) : v \in \mathscr{V}\} + \varepsilon]\!] = \mathbb{1}$. В силу булевозначных принципов максимума и переноса внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ справедлива теорема Экланда (см. [17, теорема 6.1], [20, лемма 3.13]). Следовательно, найдутся $0 < \lambda \in \mathscr{R}{\downarrow}$, $z_\lambda \in \mathscr{V}{\downarrow}$, для которых

$$\varphi(z_\lambda) \leqslant \varphi(v_0), \quad \|z_\lambda - v_0\| \leqslant \lambda,$$

$$\varphi(z_\lambda) = \inf\{\varphi(v) + \lambda^{-1}\varepsilon \|z_\lambda - v\| : \ v \in \mathscr{V}\}.$$

Отсюда следует требуемое. $\triangleright$

Рассмотрим теперь вариант теоремы Брёнстеда — Рокафеллара для выпуклых экстенсиональных отображений.

3.4. *Теорема.* *Пусть $f : V \to E^\star$ — полунепрерывный снизу выпуклый экстенсиональный оператор. Допустим, что для некоторых $v_0 \in V$, $0 \leqslant \varepsilon \in E$ и $v_0^* \in V^*$ выполняется $v_0^* \in \partial_\varepsilon f(v_0)$. Тогда для любого обратимого $0 \leqslant \lambda \in E$ существуют $v_\lambda \in V$ и $v^* \in V^*$ такие, что*

$$|v_\lambda - v_0| \leqslant \lambda, \quad |v_\lambda^* - v_0^*| \leqslant \lambda^{-1}\varepsilon, \quad v_\lambda^* \in \partial f(v_\lambda).$$

$\triangleleft$ Доказывается так же, как и 3.3. Нужно внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ применить к функции φ теорему Брёнстеда — Рокафеллара (см. [17, теорема 6.2], [20, теорема 3.17]). $\triangleright$

3.5. *Теорема.* *Пусть $f : V \to E^\star$ — собственный полунепрерывный снизу выпуклый экстенсиональный оператор. Тогда для любого $u \in \operatorname{dom}(f)$ имеет место представление*

$$\begin{aligned} f(u) &= \sup\{\langle u - v, v^*\rangle + f(v) : \ v \in \operatorname{dom}(\partial f), \ v^* \in \partial f(v)\} \\ &= \sup\{\langle u, v^*\rangle - f^*(v^*) : \ v^* \in \operatorname{Im}(\partial f)\}. \end{aligned}$$

Иными словами, полунепрерывный снизу собственный выпуклый экстенсиональный оператор на банаховом пространстве является верхней огибающей семейства аффинных операторов, определяемых ее субградиентами.

$\lhd$ Можно считать, что $V = \mathscr{V}{\downarrow}$, $E = \mathscr{R}{\downarrow}$ и $f = \varphi{\downarrow}$ (см. 1.5). Заметим, что $\operatorname{dom}(f) = \operatorname{dom}(\varphi){\downarrow}$. Пусть функция ψ из $\operatorname{dom}(\varphi) \times \mathscr{V}'$ в $\mathscr{R}$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ действует по правилу $\psi(\nu, \nu^*) := \langle u - \nu, \nu^*\rangle + \varphi(\nu)$. Тогда $g := \psi{\downarrow}$ действует из $\operatorname{dom}(f) \times V^*$ в E по правилу $g(v, v^*) = \langle u - v, v^*\rangle + f(v)$. Итак, $g(\partial f) = \psi{\downarrow}((\partial\varphi){\downarrow}) = \psi(\partial\varphi){\downarrow}$, поэтому $f(u) = \sup g(\partial f)$, так как внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ верно $\varphi(u) = \sup \psi(\partial\varphi)$. $\rhd$

3.6. Из доказанного видно, что как и в случае скалярных функций, точки субдифференцируемости и субградиенты полунепрерывной снизу выпуклой экстенсионального оператора образуют представительное множество.

Пусть $f : V \to E^\star$ — собственный полунепрерывный снизу выпуклый экстенсиональный оператор. Множество тех $z \in \operatorname{dom}(f)$, для которых $\partial f(z) \neq \varnothing$, плотно в $\operatorname{dom}(f)$. Точнее, для любых $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ и $z_0 \in \operatorname{dom}(f)$ найдется $z \in \operatorname{dom}(\partial f)$ так, что $|z - z_0| \leqslant \varepsilon\mathbb{1}$.

$\lhd$ Для произвольной точки $v_0 \in \operatorname{dom}(f)$ в соответствии с предложением 2.4 (2) имеет место представление

$$f(v_0) = \sup\{\langle v_0, v^*\rangle - f^*(v^*) : \ v^* \in V^*\}.$$

Для любого $\varepsilon > 0$ существуют разбиение единицы $(\pi_\xi) \subset \mathfrak{P}(E)$ и семейство $(v_\xi^*) \subset V^*$ такие, что

$$\pi_\xi\langle v_0, v_\xi^*\rangle - \pi_\xi f^*(v_\xi^*) \geqslant \pi_\xi f(v_0) - \varepsilon\pi_\xi\mathbb{1}$$

для каждого ξ. Если $v := \sum_\xi \pi_\xi v_\xi$ и $v^* := \sum_\xi \pi_\xi v_\xi^*$, то в силу экстенсиональности операторов v^*, f и f^* будет $\langle v_0, v^*\rangle - f^*(v^*) \geqslant f(v_0) - \varepsilon\mathbb{1}$. Следовательно, $v^* \in \partial_{\varepsilon\mathbb{1}} f(v_0)$. Применив теорему 3.4 при $\lambda := \sqrt{\varepsilon}\mathbb{1}$, подберем $z \in V$ и $z^* \in V^*$ так, что $|z - v_0| \leqslant \sqrt{\varepsilon}\mathbb{1}$, $|z^* - v^*| \leqslant \sqrt{\varepsilon}\mathbb{1}$ и $z^* \in \partial f(z)$. $\rhd$

3.7. Рассмотрим результаты типа теоремы Бишопа — Фелпса о плотности. Множество $C \subset V$ назовем циклически замкнутым, если оно br-замкнуто и для любых семейства $(v_\xi) \subset V$ и разбиения единицы $(\pi_\xi) \subset \mathfrak{P}(E)$ существует такой элемент $v \in C$, что $\pi_\xi |v - v_\xi| = 0$ для всех ξ.

Допустим, что оператор $v_0^* : V \to E$ ограничен на непустом выпуклом циклически замкнутом множестве $C \subset V$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдутся оператор $v^* \in V^*$ и точка $v \in V$ такие, что

$$|v^* - v_0^*| \leqslant \varepsilon\, |v_0|, \quad C^*(v^*) = \langle v, v^*\rangle.$$

$\lhd$ Иными словами, для ограниченного на C оператора v_0 существует сколь угодно близкий (в смысле векторной нормы) оператор v, достигающий максимума на C. Для доказательства нужно положить в 3.6 $f := \delta_C$. $\rhd$

4. Расслоения

В этом параграфе мы рассмотрим выпуклые экстенсиональные операторы относительно двойственности между пространствами сечений, связанными с непрерывным банаховым расслоением над экстремально несвязным компактом и сопряженным с ним расслоением. Необходимые сведения имеются в [2] и [8].

4.1. Предположим, что Q — экстремальный компакт и задано непрерывное банахово расслоение $\mathscr{X}$ над Q. Если u — непрерывное почти глобальное сечение расслоения $\mathscr{X}$, то функция $q \mapsto \|u(q)\|_q$ определена и непрерывна на котощем множестве $\mathrm{dom}(u)$. Следовательно, существует единственная функция $|u| \in C_\infty(Q)$ такая, что $|u|(q) = \|u(q)\|_q$ $\big(q \in \mathrm{dom}(u)\big)$. В множестве всех почти непрерывных глобальных сечений $\mathfrak{M}(Q, \mathscr{X})$ расслоения $\mathscr{X}$ вводят отношение эквивалентности, полагая $u \sim v$ в том случае, когда $u(q) = v(q)$ при всех $q \in \mathrm{dom}(u) \cap \mathrm{dom}(v)$. Для эквивалентных u и v выполняется $|u| = |v|$. Значит, можно по определению положить $|\tilde{u}| := |u|$, где $\tilde{u}$ — класс эквивалентности почти глобального сечения u. Обозначим фактор-множество $\mathfrak{M}(Q, \mathscr{X})/{\sim}$ символом $C_\infty(Q, \mathscr{X})$. В это множество естественным образом можно ввести структуру решеточно нормированного пространства.

Если E — идеал в $C_\infty(Q)$, то множество $E(\mathscr{X}) := \big\{u \in C_\infty(Q, \mathscr{X}) : |u| \in E\big\}$, снабженное операциями, индуцированными из $C_\infty(Q, \mathscr{X})$, представляет собой пространство Банаха — Канторовича над E.

4.2. Непрерывное банахово расслоение $\mathscr{X}$ над экстремальным компактом Q называют *насыщенным* или *просторным*, если каждое ограниченное непрерывное сечение расслоения $\mathscr{X}$, определенное на плотном подмножестве Q, может быть продолжено до глобального непрерывного сечения. В этом параграфе мы рассматриваем только просторные банаховы расслоения.

Теорема. *Если $\mathscr{X}$ — просторное банахово расслоение над экстремальным компактом Q, а E — идеал в $C_\infty(Q)$, то $E(\mathscr{X})$ — пространство Банаха — Канторовича над E и $C_\infty(Q, \mathscr{X})$ — его максимальное расширение. Наоборот, для всякого пространства Банаха — Канторовича V над E существует единственное с точностью до изоморфизма просторное банахово расслоение $\mathscr{X}$ такое, что V линейно изометрично пространству $E(\mathscr{X})$.*

$\lhd$ Доказательство см. в [2, 8]. $\rhd$

4.3. Рассмотрим непрерывное банахово расслоение $\mathscr{X}$ и предположим, что для каждой точки $q \in Q_0$ некоторого котощего множества $Q_0 \subset Q$ определена полунепрерывная снизу собственная выпуклая функция $f_q : \mathscr{X}_q \to \mathbb{R}^\bullet$. Обозначим $V := C_\infty(Q, \mathscr{X})$ и $V_0 := E_0(\mathscr{X})$, где E_0 — некоторый идеал в $E := C_\infty(Q)$. Допустим, что для каждого $v \in V_0$ функция $q \mapsto f_q(v(q))$ непрерывна на $\mathrm{dom}(v) \cap Q_0$ и, следовательно, имеет единственное продолжение на все Q. Это продолжение обозначим символом $\tilde{f}(v)$. Тем самым возникает отображение $\tilde{f}_0 : V_0 \to E^\star$, которое очевидно выпукло и экстенсионально. Существует единственное продолжение $\tilde{f}$ оператора $\tilde{f}_0$ на все V, определяемое формулой $\tilde{f}(v) := o\text{-}\sum_\xi \pi_\xi \tilde{f}_0(v_\xi)$, где (π_ξ) — разбиение единицы в $\mathfrak{P}(E)$ и (v_ξ) — произвольное семейство в V_0.

4.4. *Оператор $\tilde{f} : V \to E^\star$ является выпуклым, экстенсиональным и полунепрерывным снизу.*

$\lhd$ Выпуклость и экстенсиональность оператора $\tilde{f}$ очевидны. Докажем полунепрерывность снизу в произвольной точке $v_0 \in V$. Положим $e := \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf\{\tilde{f}(v) : v \in$

V, $|v-v_0| \leqslant 1/n\,|v_0|\}$. Существует котощее множество $Q_0' \subset Q$ такое, что на Q_0' выполнено поточечное равенство

$$e(q) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf\{\tilde f(v)(q):\ v\in V,\ |v-v_0| \leqslant 1/n\,|v_0|\}.$$

Для любой точки $q \in Q_0' \cap \mathrm{dom}(v_0)$ будет $\{v(q) : |v-v_0| \leqslant \varepsilon|v_0|\} = \{x \in \mathscr{X}_q : \|x-v_0(q)\|_q \leqslant \varepsilon\|v_0(q)\|_q\}$. Значит, учитывая полунепрерывность снизу функции f_q, мы получаем

$$e(q) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf\{f_q(v(q)):\ x\in\mathscr{X}_q,\ \|x-v_0(q)\|_q \leqslant 1/n\|v_0(q)\|_q\} = f_q(v_0(q)) = \tilde f(v_0)(q).$$

Значит, $e = \tilde f(v_0)$, что и требовалось. $\triangleright$

4.5. Для просторного непрерывного банахова расслоения $\mathscr{X}$ можно определить *сопряженное банахово расслоение* $\mathscr{X}'$, которое также будет просторным. При этом пространство $\mathscr{X}'(q)$ является подпространством в $\mathscr{X}(q)'$, нормирующим $\mathscr{X}(q)$; более того $\|x\|_q = \max\{\langle x,x'\rangle : x'\in\mathscr{X}'(q),\ \|x'\|_q \leqslant 1\}$ для всех $x\in\mathscr{X}(q)$.

Пусть $\langle\cdot,\cdot\rangle_q$ — каноническая билинейная форма двойственности $\mathscr{X}(q) \leftrightarrow \mathscr{X}(q)'$. Возьмем $u\in C_\infty(Q,\mathscr{X})$ и $v\in C_\infty(Q,\mathscr{X}')$. Функция $q\mapsto\langle u(q),w(q)\rangle_q$ непрерывна, а ее область определения $\mathrm{dom}(u)\cap\mathrm{dom}(v)$ всюду плотна в Q. Следовательно, эта функция имеет единственное продолжение до элемента $C_\infty(Q)$. Возникающий элемент мы обозначим символом $\langle u,v\rangle$. Определенная таким образом форма $\langle\cdot,\cdot\rangle$ приводит пространства $C_\infty(Q,\mathscr{X})$ и $C_\infty(Q,\mathscr{X}')$ в $C_\infty(Q)$-значную двойственность (см. [7]). При этом в K-пространстве $C_\infty(Q)$ имеют место соотношения:

$$|u| = \max\{\langle u,u^*\rangle:\ u^*\in C_\infty(Q,\mathscr{X}'), |u^*| \leqslant \mathbb{1}\} \quad (u\in C_\infty(Q,\mathscr{X})),$$
$$|u^*| = \sup\{\langle u,u^*\rangle:\ u\in C_\infty(Q,\mathscr{X}), |u| \leqslant \mathbb{1}\} \quad (u'\in C_\infty(Q,\mathscr{X}')).$$

4.6. *Теорема.* *Пусть $\mathscr{X}$ — просторное НБР над Q и E — идеал в $C_\infty(Q)$. Тогда пространство $C_\infty(Q,\mathscr{X}')$ линейно изометрично $C_\infty(Q,\mathscr{X})^*$, где изометрия осуществляется сопоставлением сечению $u^*\in C_\infty(Q,\mathscr{X}')$ оператора $u\mapsto\langle u,u^*\rangle$ из $E(\mathscr{X})$ в E. В частности, если $\mathscr{X}$ — реализационное расслоение для расширенного пространства Банаха — Канторовича V, то $\mathscr{X}'$ — реализационное расслоение для сопряженного пространства Банаха — Канторовича ПБК V^*.*

$\triangleleft$ Доказательство см. в [2]. $\triangleright$

4.7.*Пусть $0\leqslant\varepsilon\in E$ и $v_0\in\mathrm{dom}(\tilde f)$. Оператор $v^*\in V^*$ входит в $\partial_\varepsilon\tilde f(v)$ в том и только в том случае, когда для некоторого котощего множества $Q_0'\subset Q$ выполняется поточечное соотношение*

$$v^*(q)\in\partial_{\varepsilon(q)}f_q(v_0(q)) \quad (q\in Q_0').$$

$\triangleleft$ По определению отображения $\tilde f$ на котощем множестве $Q_0' := Q_0\cap\mathrm{dom}(v_0)$ выполняется $\tilde f(v_0)(q) = f_q(v_0(q))$. Тогда для произвольного $v^*\in V^*$ будет

$$\langle v(q),v^*(q)\rangle_q - \langle v_0(q),v^*(q)\rangle_q \leqslant f_q(v(q)) - f_q(v_0(q)) \quad (q\in Q_0'\cap\mathrm{dom}(v^*)).$$

Если $x\in\mathscr{X}_q$, то $v_x(q)=x$ для некоторого глобального непрерывного сечения v_x. Следовательно, полагая $v := v_x$, мы получим

$$\langle x,v^*(q)\rangle_q - \langle v_0(q),v^*(q)\rangle_q \leqslant f_q(x) - f_q(v_0(q)) \quad (x\in\mathscr{X}_q,\ q\in Q_0'\cap\mathrm{dom}(v^*)),$$

что и требовалось. $\triangleright$

4.8. *Теорема.* *Пусть $\mathscr{X}$ — просторное банахово расслоение, $\mathscr{X}'$ — сопряженное расслоение. Пусть $\tilde{f} : V \to E^{\star}$ — выпуклый экстенсиональный оператор из 4.3 и для некоторых $v_0 \in C_\infty(Q, \mathscr{X})$, $0 \leqslant \varepsilon \in E$ и $v_0^* \in C_\infty(Q, \mathscr{X}')$ выполняется $v_0^* \in \partial_\varepsilon \tilde{f}(v_0)$. Тогда для любого обратимого $0 \leqslant \lambda \in E$ существуют $v_\lambda \in C_\infty(Q, \mathscr{X})$ и $v^* \in C_\infty(Q, \mathscr{X}')$ такие, что на некотором котощем подмножестве Q выполняются поточечные соотношения*

$$\begin{gathered}\|v_\lambda(q) - v_0(q)\|_q \leqslant \lambda(q),\\ \|v_\lambda^*(q) - v_0^*(q)\|_q \leqslant \lambda(q)^{-1}\varepsilon(q),\\ v_\lambda^*(q) \in \partial f_q(v_\lambda(q)).\end{gathered}$$

$\triangleleft$ Следует из 3.4 и 4.7. $\triangleright$

Аналогично можно вывести поточечные варианты теорем Бишопа — Фелпса.

5. Некоторые задачи

В заключение мы сформулируем несколько задач, при решении которых могут быть полезны изложенные выше соображения.

5.1. Пусть (Ω, Σ, μ) — пространство с мерой (обладающее свойством прямой суммы) и $\mathscr{X}$ — измеримое банахово расслоение над Ω (см. [2, 8]).

Пусть при почти всех $\omega \in \Omega$ задана выпуклая полунепрерывная снизу функция $f_\omega : X_\omega \to \mathbb{R}^\bullet$. Положим $\Omega \otimes \mathscr{X} := \{(\omega, x) : \omega \in \Omega, x \in \mathscr{X}_\omega\}$ и определим функцию $f : \Omega \otimes \mathscr{X} \to \mathbb{R}^\bullet$ формулой $f(\omega, x) := f_\omega(x)$. Допустим, что композиция $\omega \mapsto f(\omega, u(\omega))$ измерима для всех u из некоторого пространства L измеримых сечений $u : \Omega \to \mathscr{X}$. В этой ситуации принято определять интегральный функционал $I_f : L \to \mathbb{R}^\bullet$ следующим образом:

$$I_f(u) := \int_\Omega f(\omega, u(\omega))\, d\mu(\omega),$$

если функция $\omega \mapsto f^+(\omega, u(\omega))$ суммируема и $I_f(u) := +\infty$ в противном случае. Пусть $E := L^0(\Omega, \Sigma, \mu)$ — это K-пространство (классов эквивалентности) измеримых функций, а $I : L^1(\mu) \to \mathbb{R}$ — интеграл Лебега. Тогда имеет место представление $I_f = I \circ F$, где оператор $F : L \to E^\star$ определен формулой $F(u) : \omega \mapsto f(\omega, u(\omega))$. Как видно, оператор F экстенсионален. Важно выразить свойства оператора F через свойства семейства функций (f_ω). Далее интересно изучить свойства интегрального функционала I_f, используя для этой цели выпуклый экстенсиональный оператор F и разработанную А. Е. Гутманом в [2] технику исследования измеримых банаховых расслоений с помощью просторных банаховых расслоений.

5.2. В монографии В. Л. Левина [13] исследованы вопросы регулярного интегрального представления субдифференциала $\partial I_f(v)$ и сопряженного выпуклого функционала I_f^* для I_f в случае постоянного банахова расслоения (т.е. в пространстве измеримых вектор-функций). В работах А. Д. Иоффе и В. М. Тихомирова [3] изучалась двойственность операции интегрирования и континуальной инфимальной конволюции. Представляется интересным распространить указанные теории на общий интегральный функционал из 5.1.

5.3. Представляют интерес те же задачи, что и в 5.1 и 5.2, но в ситуации, когда при почти всех $\omega \in \Omega$ задан выпуклый оператор $f_\omega : X_\omega \to E$, где E — порядково полная банахова решетка, а $I : L^1(\mu, E) \to E$ — интеграл Бохнера.

5.4. Выяснить условия, при которых полунепрерывный снизу выпуклый экстенсиональный оператор имеет вид из 4.3 для некоторого расслоения полунепрерывных снизу выпуклых функций, определенных на слоях непрерывного банахова расслоения. То же самое для измеримого банахова расслоения.

5.5. Изучить связь дифференцируемости выпуклого экстенсионального оператора с послойной дифференцируемостью при представления его в виде непрерывного или измеримого расслоения выпуклых функций. Что представляет из себя послойная асплундовость? Послойное свойство Радона — Никодима? и т. п.

Литература

1. Буцан Г. П. Стохастические полугруппы.—Киев: Наукова думка, 1977.—216 с.
2. Гутман А. Е. Банаховы расслоения в теории решеточно нормированных пространств // В кн.: Линейные операторы, согласованные с порядком.—Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 1995.—С. 63–211.
3. Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. О минимизации интегральных функционалов // Функц. анализ и его прил.—1969.—Т. 3, No 3.—С. 61–70.
4. Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. Теория экстремальных задач.—М.: Наука, 1974.—479 с.
5. Красносельский М. А. Положительные решения операторных уравнений.—М.: Физматгиз, 1962.—394 с.
6. Красносельский М. А., Забрейко П. П., Пустыльник Е. И., Соболевский П. Е. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций.—М.: Наука, 1966.—499 с.
7. Кусраев А. Г. Векторная двойственность и ее приложения.—Новосибирск: Наука, 1985.—256 с.
8. Кусраев А. Г. Мажорируемые операторы.—М.: Наука, 2003.—619 с.
9. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Булевозначный анализ. Изд. 2-е.—Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 2003.—386 с.; Англ. пер.: Dordrecht: Kluwer, 1999.—322 p.
10. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Субдифференциалы. Теория и приложения. Ч. I.—Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 2002.—viii+372 с.
11. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Субдифференциалы. Теория и приложения. Ч. II.—Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 2003.—viii+413 с.
12. Кутателадзе С. С. Об экстенсиональности операторно-выпуклых отображений // Оптимизация—1986.—№ 37 (54).—С. 69–70.
13. Левин В. Л. Выпуклый анализ в пространствах измеримых функций и его применение в математике и экономике.—М.: Наука, 1985.—352 с.
14. Скороход А. В. Случайные линейные операторы.—Киев: Наукова думка, 1978.—200 с.
15. Рокафеллар Р. Т. Интегралы, являющиеся выпуклыми функционалами // Математическая экономика.—М.: Мир, 1974.—С. 170–204.
16. Рокафеллар Р. Т. Выпуклые интегральные функционалы и двойственность // Математическая экономика.—М.: Мир, 1974.—С. 222–237.
17. Экланд И., Темам Р. Выпуклый анализ и экстремальные задачи.—М.: Мир, 1979.—400 с.
18. Bharucha-Read A. T. Random Integral Equations.—New York: Academic Press, 1972.
19. Castaing Ch., Valadier M. Convex Analysis and Measurable Multifunctions.—Berlin etc.: Springer, 1977.—278 p.—(Lectures Notes in Math.; 580).
20. Phelps R. Convex Functions, Monotone Operators and Differentiability.—Berlin etc.: Springer, 1993.—117 p.
21. Scheidt J. V., Purkert W. Random Eigenvalue Problems.—Berlin: Academic-Verlag, 1983.—271 p.

Статья поступила 28 ноября 2004 г.

Кусраев Анатолий Георгиевич, д. ф.-м. н.
г. Владикавказ, Институт прикладной математики
и информатики ВНЦ РАН
E-mail: kusraev@alanianet.ru

Кутателадзе Семен Самсонович, д. ф.-м. н.
г. Новосибирск, Институт математики им. С. Л. Соболева
E-mail: sskut@math.nsk.su