*Владикавказский математический журнал*
*Октябрь–декабрь, 2004, Том 6, Выпуск 4*

*УДК* **517.95**

# О СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА ГРАФАХ

**А. П. Буслаев, А. Г. Таташев, М. В. Яшина**

*Владимиру Михайловичу Тихомирову*
*к его 70-летию*

Рассмотрены двух- и трехкомпонентные модели автотранспортного потока на кольцевой дороге, описываемые системами нелинейных дифференциальных уравнений. Найдены условия, при которых движение устойчиво или неустойчиво.

В связи с наблюдаемым взрывным ростом количественного и качественного состава автомобильного транспорта в России при сохранении общего объема автомобильных дорог явно обозначились проблемы функционирования автотранспортных потоков. Вопросы моделирования движения, устойчивости, безопасности являются темой исследования многих российских и зарубежных научных коллективов [1–3]. Все большее значение в рассматриваемой тематике приобретают системы дифференциальных уравнений на графах, ранее рассматривавшиеся для моделирования других естественно-научных задач [4, 5]. Наконец, в отличие от гидродинамического подхода потоки из частиц с мотивированным поведением стали предметом исследований физиков [6, 7] и др. [8].

## 1. Двухкомпонентная модель

Рассмотрим математическую модель автотранспортного потока на кольцевой дороге. Дорога разбита на два участка. Длина $i$-го участка равна $l_i$, а плотность потока на $i$-м участке равна $\rho_i$, $i = 1, 2$ (рис. 1).

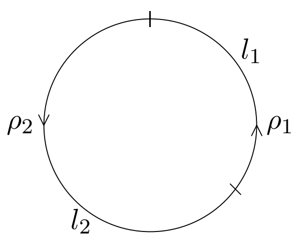


**Рис. 1.** Модель кольцевого движения.

Будем считать,что состав транспортного потока на кольцевой дороге постоянный и, таким образом, выполняется условие

$$\rho_1 l_1 + \rho_2 l_2 = C, \tag{1}$$

где $C$ — константа, *масса потока.*

Пусть $f_i(\rho)$ — интенсивность движения (*основная диаграмма*) на $i$-м участке. Простейшая модель основной диаграммы ($i = 1, 2$)

$$f_i(\rho) = \lambda_i \rho_+ (\rho_{\max_i} - \rho)_+ = \begin{cases} \lambda_i \rho(\rho_{\max_i} - \rho), & 0 \leqslant \rho \leqslant \rho_{\max_i}; \\ 0, & \rho \in (-\infty, 0) \cup (\rho_{\max_i}, +\infty), \end{cases} \tag{2}$$

где $\rho_{\max_i}$ — максимальное значение плотности потока на $i$-м участке — параметр, зависящий от многих факторов, и в первую очередь, от числа полос, состояния полотна, климатических условий и т. д.

Далее будем считать, что функции $f_i(\rho)$ удовлетворяют условию (2). Плотности $\rho_1 = \rho_1(t)$, $\rho_2 = \rho_2(t)$, рассматриваемые как функции от времени, удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} l_1 \dfrac{d\rho_1}{dt} = \theta(\rho_{\max_1} - \rho_1) f_2(\rho_2) - \theta(\rho_{\max_2} - \rho_2) f_1(\rho_1), \\ l_2 \dfrac{d\rho_2}{dt} = \theta(\rho_{\max_2} - \rho_2) f_1(\rho_1) - \theta(\rho_{\max_1} - \rho_1) f_2(\rho_2), \end{cases} \tag{3}$$

где $i = 1, 2$,

$$\theta(\rho_{\max_i} - \rho_i) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant \rho_i < \rho_{\max_i}, \\ 0, & (\rho_i < 0) \vee (\rho_i \geqslant \rho_{\max_i}). \end{cases}$$

Начальные условия для (3) имеют вид

$$\rho_1(0) = \rho_{10}, \quad \rho_2(0) = \rho_{20} \tag{4}$$

и удовлетворяют неравенствам

$$0 < \rho_{i0} < \rho_{\max_i}, \quad i = 1, 2. \tag{5}$$

Нетрудно доказать следующее утверждение.

***Лемма 1.*** *Если для некоторого $t_0 \geqslant 0$ выполняется хотя бы одно из равенств $\rho_1(t_0) = \rho_{\max_1}$ или $\rho_2(t_0) = \rho_{\max_2}$, то для любого $t \geqslant t_0$ справедливо $\rho_1(t) = \rho_1(t_0)$ и $\rho_2(t) = \rho_2(t_0)$.*

Другими словами, если описываемый системой дифферренциальных уравнений (3)–(5) процесс достигнет точки на верхней границе, то он будет находиться в этой точке и все последующее время. Такой режим будем называть *критическим.*

Пусть $\rho_1 = \rho$. Из (1) имеем $\rho_2 = (C - \rho l_1)/l_2$.

Система уравнений (3)–(5) сводится к дифференциальному уравнению

$$l_1 \frac{d\rho}{dt} = \begin{cases} \frac{\lambda_2}{l_2}(C - l_1\rho)(\rho_{\max_2} - \frac{1}{l_2}(C - l_1\rho)) - \lambda_1 \rho(\rho_{\max_1} - \rho)), \\ \qquad \max(0, \frac{1}{l_1}(C - l_2\rho_{\max_2})) < \rho < \min(\frac{C}{l_1}, \rho_{\max_1}); \\ 0, \qquad (\rho \leqslant \max(0, \frac{1}{l_1}(C - l_2\rho_{\max_2}))) \vee (\rho \geqslant \min(\frac{C}{l_1}, \rho_{\max_1})). \end{cases} \tag{6}$$

При этом начальное условие для уравнения (6)

$$\rho(0) = \rho_0 \tag{7}$$

удовлетворяет неравенствам

$$\max\left(0, \frac{1}{l_1}(C - l_2\rho_{\max_2})\right) < \rho < \min\left(\frac{C}{l_1}, \rho_{\max_1}\right). \tag{8}$$

Пусть

$$a = l_1\left(\frac{\lambda_1}{l_1^2} - \frac{\lambda_2}{l_2^2}\right); \qquad b = \frac{\lambda_1\rho_{\max_1}}{l_1} + \frac{\lambda_2\rho_{\max_2}}{l_2} - \frac{2\lambda_2 C}{l_2^2};$$

$$c = \frac{\lambda_2}{l_1 l_2}C\left(\rho_{\max_2} - \frac{C}{l_2}\right); \qquad D = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

При выполнении условия (8) дифференциальное уравнение (6) принимает вид

$$\frac{d\rho}{dt} = a\rho^2 - b\rho + c, \tag{9}$$

в противном случае $d\rho/dt = 0$.

Пользуясь леммой 1 и явным видом (9), можем заключить, что решение задачи Коши (6), (7) существует и единственно ($t \geqslant 0$) [9]. При этом в случае выхода решения на граничные значения оно становится константой.

Будем говорить, что *дифференциальное уравнение* (6), (7) *описывает устойчивое движение*, если существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любого $\rho(0) \in (\rho_0 - \varepsilon, \rho_0 + \varepsilon)$ решение дифференциального уравнения (6) с начальным условием (7) *не является критическим*, т. е. удовлетворяет (8).

***Теорема 1.*** *Пусть для любого $t \geqslant t_0$ выполняется условие* (8). *Тогда уравнение* (9) *имеет на $[t_0, +\infty)$ следующее решение:*

**(a)** *если $a \neq 0$, то*

($a_1$) *при $D < 0$*

$$\rho = \frac{b}{2a} + \sqrt{-D}\,\mathrm{tg}\,(\sqrt{-D}(at + A));$$

($a_2$) *при $D > 0$*

$$\rho = \frac{b}{2a} + \sqrt{D}\,\mathrm{th}\,(\sqrt{D}(at + A));$$

($a_3$) *при $D = 0$*

$$\rho = \frac{1}{A - at} + \frac{b}{2a};$$

**(b)** *если $a = 0$, то*

$$\rho = \frac{c}{b} + Ae^{-bt}, \tag{10}$$

*где $A$ — некоторая константа.*

◁ Перепишем уравнение (9) в виде

$$\frac{d\rho}{dt} = a\left(\left(\rho - \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right). \tag{11}$$

При $a \neq 0$, разделив переменные и интегрируя обе части получившегося уравнения, имеем утверждения ($a_1$)–($a_3$) теоремы 1. При $a = 0$ имеем линейное дифференциальное уравнение $\frac{d\rho}{dt} + b\rho = c$, решение которого задается соотношением (10). ▷

Будем далее без ограничения общности считать, что $a \geqslant 0$. Если $a < 0$, то можно поменять номера участков.

Пусть $D > 0$; $a > 0$. Положим

$$\widehat{\rho}_1 = \frac{b}{2a} - \sqrt{D}, \quad \widehat{\rho}_2 = \frac{b}{2a} + \sqrt{D}$$

— нули правой части уравнения (9), рис. 2.

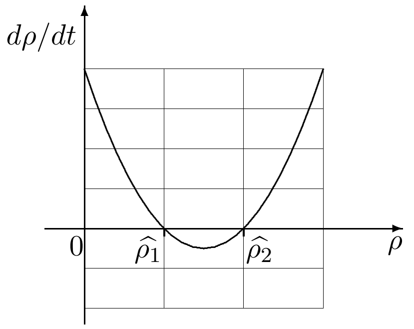


**Рис. 2.** Значения $\rho$, при которых $d\rho/dt = 0$.

В вырожденном случае $a = 0$ через

$$\widehat{\rho} = \frac{c}{b}$$

обозначим единственный ноль $a\rho^2 - b\rho + c$. Наконец (рис. 3),

$$r_{\min} = \max\left(0, \frac{1}{l_1}(C - l_2\rho_{\max_2})\right), \tag{12}$$

$$r_{\max} = \min\left(\frac{C}{l_1}, \rho_{\max_1}\right). \tag{13}$$

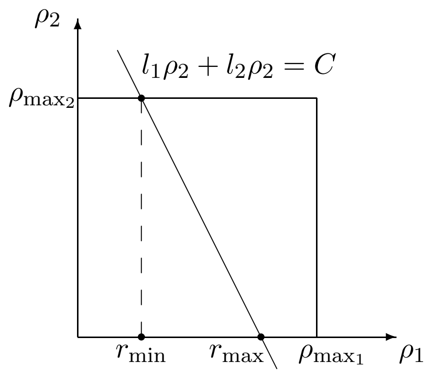


**Рис. 3.** Допустимые значения плотностей.

***Лемма 2.*** *Пусть* $\rho_1(0)l_1 + \rho_2(0)l_2 = C$. *Тогда система неравенств*

$$\begin{cases} 0 < \rho_1(0) < \rho_{\max_1}, \\ 0 < \rho_2(0) < \rho_{\max_2} \end{cases} \tag{14}$$

*равносильна условию*

$$r_{\min} < \rho(0) = \rho_1(0) < r_{\max}. \tag{15}$$

Эту лемму нетрудно доказать, используя определения величин $r_{\min}$ и $r_{\max}$.

Рассмотрим дифференциальное уравнение вида

$$\frac{d\rho}{dt} = F(\rho), \tag{16}$$

где функция $F(\rho)$ непрерывна на некотором отрезке $[\rho_1, \rho_2]$, вне которого эта функция равна нулю. В интервале $(\rho_1, \rho_2)$ функция $F$ дифференцируема и может иметь лишь конечное число нулей, причем все эти нули простые.

***Лемма 3.*** *Решение уравнения* (16) *с начальным условием* $\rho(0) = \rho_0$, $F(\rho_0) > 0$ ($F(\rho_0) < 0$) *строго монотонно стремится к ближайшему справа (слева) нулю* $\rho_*$ *функции* $F$, *в окрестности которого функция* $F$ *меняет знак с плюса на минус, или выходит за конечное время на константу, если таких нулей нет.*

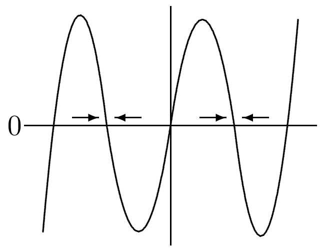


**Рис. 4.** Поведение решения.

$\lhd$ Предположим, что $F(\rho_0) > 0$ и $\rho_*$ — ближайший справа нуль $F(\rho_*)$, $\rho_* < \rho_2$. Тогда $\rho(t)$ строго монотонно возрастает. Поскольку интеграл $\int\limits_{\rho_0}^{\rho_*} \frac{d\rho}{F(\rho)}$ расходится, то $\rho(t)$ строго монотонно приближается к $\rho_*$ за бесконечное время, рис. 4. Если же $F(\rho) > 0$, $\rho \in [\rho_0, \rho_2]$, то $\rho(t)$ выходит за конечное время на константу. Аналогичные рассуждения в случае, если $F(\rho_0) < 0$. Если $F(\rho_0) = 0$, то в силу теоремы единственности решение является константой. $\rhd$

Будем считать, что начальное условие $\rho(0) = \rho_0$ удовлетворяет неравенствам (15).

***Теорема 2.*** *Пусть* $a > 0$. *Тогда*

(1) *при* $D \leqslant 0$ *движение неустойчиво;*

(2) *при* $D > 0$ *движение устойчиво тогда и только тогда, когда*

$$(\rho_0 < \widehat{\rho}_2) \wedge (r_{\min} < \widehat{\rho}_1 < r_{\max}). \tag{17}$$

*Пусть* $a = 0$. *Движение устойчиво тогда и только тогда, когда*

$$(b \geqslant 0) \wedge (r_{\min} < \widehat{\rho} < r_{\max}). \tag{18}$$

$\lhd$ Утверждение теоремы следует из лемм 2 и 3. $\rhd$

Для случая одинаковых участков, т. е. при $l_1 = l_2 = l$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, $\rho_{\max_1} = \rho_{\max_2} = \rho_{\max}$, справедлива следующая

***Теорема 3.*** *Если* $C < l\rho_{\max}$, $\rho_0 \neq \frac{C}{2l}$, *то* $\rho \to \frac{C}{2l}$ *при* $t \to \infty$ *и движение устойчиво. Если* $C > l\rho_{\max}$ *и* $\rho_0 \neq \frac{C}{2l}$, *то движение неустойчиво и выходит на границу за конечное* *время. Если $\rho_0 = \frac{C}{2l}$, $C > l\rho_{\max}$, то $\rho(t) \equiv \rho_0$, причем движение неустойчиво. Если $C = l\rho_{\max}$ или $C < l\rho_{\max}$, $\rho_0 = \frac{C}{2l}$, то также $\rho(t) \equiv \rho_0$, при этом движение устойчиво.*

$\lhd$ В данном случае решение (7), (9) имеет вид

$$\rho = \frac{C}{2l} + \left(\rho_0 - \frac{C}{2l}\right) e^{-\frac{2\lambda}{l}(\rho_{\max} - \frac{C}{l})t}.$$

Поэтому при $\frac{C}{l} > \rho_{\max}$ данное решение выходит за конечное время на границу, на которой в соответствии с леммой 1 остается все последующее время. Если $\rho_0 = \frac{C}{2l}$, то $\rho(t) \equiv \rho_0$. Однако, если $C > l\rho_{\max}$, то при изменении на сколь угодно малую величину значения $\rho_0$ движение становится критическим. Если $C = l\rho_{\max}$, или $\rho_0 = \frac{C}{2l}$, $C < l\rho_{\max}$, то $\rho(t) \equiv \rho_0$, причем движение устойчиво. Наконец, при $\frac{C}{l} < \rho_{\max}$, $\rho_0 \neq \frac{C}{2l}$, имеем $\lim\limits_{t\to+\infty} \rho(t) = \frac{C}{2l}$, причем решение монотонно убывает, если $\rho_0 > \frac{C}{2l}$, и монотонно возрастает в случае $\rho_0 < \frac{C}{2l}$. Учтено, что, если $\frac{C}{l} < \rho_{\max}$, то $\max(0, \frac{C}{l} - \rho_{\max}) = 0$ и, таким образом, при своем убывании функция $\rho(t)$, принимая значения, превышающие $\frac{C}{2l}$, не может достигнуть значения, при котором плотность потока на втором участке станет равной $\rho_{\max}$. $\rhd$

## 2. Трехкомпонентная модель с одинаковыми участками. Правильный треугольник

Предположим, что автомобили совершают движение по кольцевой дороге, разбитой на 3 участка. Длина каждого участка равна $l$; плотность транспортного потока на $i$-м участке в момент времени $t$ равна $\rho_i(t)$, $i = 1, 2, 3$. Суммарное число автомобилей на кольце не изменяется. Автомобиль, покидающий $i$-й участок, поступает на $(i+1)$-й участок, $i = 1, 2, 3$. При $i = 3$ под $(i+1)$-м участком понимается участок с номером 1. При $i = 1$ под $(i-1)$-м участком понимается участок с номером 3.

В каждый момент времени плотности потоков удовлетворяют условию

$$l(\rho_1 + \rho_2 + \rho_3) = C. \tag{19}$$

Плотности потоков удовлетворяют системе дифференциальных уравнений ($\rho_4 = \rho_1$, $\rho_0 = \rho_3$)

$$l\frac{d\rho_i}{dt} = \theta(\rho_{\max_i} - \rho_i) f_{i-1}(\rho_{i-1}) - \theta(\rho_{\max_{i+1}} - \rho_{i+1}) f_i(\rho_i), \quad i = 1, 2, 3, \tag{20}$$

с начальным условием

$$0 < \rho_i(0) = \rho_{i0} < \rho_{\max}, \quad i = 1, 2, 3,$$

где

$$f_i(\rho_i) = \lambda(\rho_i)_+(\rho_{\max} - \rho_i)_+ = \begin{cases} \lambda\rho_i(\rho_{\max} - \rho_i), & 0 < \rho_i < \rho_{\max}, \\ 0, & \rho_i \notin (0, \rho_{\max}). \end{cases} \tag{21}$$

Таким образом, считаем, что вид функции $f_i$ не зависит от $i$. При этом $3l\rho_{\max} = C_{\max}$ — *емкость сети.*

При условии, что $0 < \rho_1 < \rho_{\max}$, $0 < \rho_2 < \rho_{\max}$, $0 < \rho_3 = \frac{C}{l} - \rho_1 - \rho_2 < \rho_{\max}$, из (19)–(21) получаем систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} l\frac{d\rho_1}{dt} = \lambda(\frac{C}{l} - \rho_1 - \rho_2)(\rho_{\max} - \frac{C}{l} + \rho_1 + \rho_2) - \lambda\rho_1(\rho_{\max} - \rho_1), \\ l\frac{d\rho_2}{dt} = \lambda\rho_1(\rho_{\max} - \rho_1) - \lambda\rho_2(\rho_{\max} - \rho_2). \end{cases} \tag{22}$$

Понятие устойчивости движения определяется аналогично тому, как это было сделано для двухкомпонентного случая.

***Теорема 4.*** *Если* $0 < \rho_{i0} < \rho_{\max}$, $i = 1, 2, 3$, $l(\rho_{10} + \rho_{20} + \rho_{30}) = C$ *и* $C < l\rho_{\max}$, *то*

$$\rho_i \to \frac{C}{3l}, \quad i = 1, 2, 3,$$

*при* $t \to \infty$ *и движение устойчиво.*

$\triangleleft$ Нетрудно убедиться, что если выполняется условие $C < l\rho_{\max}$ и для момента времени $t$ выполняется $0 < \rho_{i-1}(t) < \rho_i(t) < \rho_{\max}$, то $f_{i-1}(\rho_{i-1}(t)) < f_i(\rho_i(t))$ и, следовательно, плотность $\rho_i$ потока на $i$-м участке убывает.

Пусть $i_0$ — номер участка, на котором в текущий момент времени плотность потока максимальна, $0 < \rho_{i_0-1} < \rho_{i_0} < \rho_{\max}$. Тогда плотность на $i_0$-м участке убывает. В любой момент времени значение плотности потока на участке с максимальной плотностью убывает (если начальные значения плотностей не на всех участках одинаковы) и, оставаясь большей, чем $C/(3l)$, сходится, как можно убедиться, к этому значению. При этом на каждом из остальных участков дороги плотность также сходится к $C/(3l)$. $\triangleright$

При $\rho_1 = \rho_2 = C/(3l)$ правые части обоих уравнений системы (22) равны 0.

***Теорема 5.*** *Точка* $\rho_1 = \rho_2 = \frac{C}{3l}$ *является для системы дифференциальных уравнений (22) точкой устойчивого равновесия, если* $C < \frac{3l}{2}\rho_{\max}$, *и точкой неустойчивого равновесия, если* $C > \frac{3l}{2}\rho_{\max}$.

$\triangleleft$ Перейдем к новым переменным

$$\rho_1 = \frac{C}{3l} + \alpha_1, \quad \rho_2 = \frac{C}{3l} + \alpha_2,$$

причем будем рассматривать систему при малых значениях $\alpha_1$, $\alpha_2$.

Пренебрегая в уравнениях слагаемыми порядка малости, более высокого, чем $\alpha_1$, $\alpha_2$, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{d\alpha_1}{dt} = 2p\alpha_1 + p\alpha_2, \\ \dfrac{d\alpha_2}{dt} = -p\alpha_1 + p\alpha_2, \end{cases} \tag{23}$$

где

$$p = \frac{\lambda}{l}\left(\frac{2C}{3l} - \rho_{\max}\right).$$

Характеристическое уравнение системы (23) имеет корни $\lambda_1 = \frac{3p}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}|p|i$, и $\lambda_2 = \frac{3p}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}|p|i$.

Если $C < \frac{3l}{2}\rho_{\max}$, то $p < 0$ и, таким образом, корни характеристического уравнения имеют отрицательные действительные части. В этом случае начало координат является точкой устойчивого фокуса [9, 10].

Если $C > \frac{3l}{2}\rho_{\max}$, то $p > 0$. Корни характеристического уравнения имеют положительные действительные части. Начало координат является точкой неустойчивого фокуса. Возвращаясь к исходным переменным, получим утверждение теоремы. $\triangleright$

Правые части обоих уравнений системы (22) равны 0 также в случае, если $\rho_1 = \rho_2 = \frac{C}{l} - \rho_{\max}$.

***Теорема 6.*** *Точка* $\rho_1 = \rho_2 = \frac{C}{l} - \rho_{\max}$ $(l\rho_{\max} < C < 2l\rho_{\max})$ *является для системы* (22) *точкой неустойчивого равновесия (седлом).*

$\lhd$ Теорема 6 доказывается аналогично теореме 5. $\rhd$

Другие ситуации, при которых правые части обоих уравнений системы (22) равны 0, ($0 < \rho_1 < \rho_{\max}$, $0 < \rho_2 < \rho_{\max}$, $0 < \rho_3 = \frac{C}{l} - \rho_1 - \rho_2 < \rho_{\max}$) сводятся к теоремам 5 и 6 с помощью циклической перенумерации участков.

Из изложенного можно сделать следующие выводы:

а) *если* $C < \frac{C_{\max}}{3}$, *то движение устойчиво при любых начальных значениях, при этом* $\lim\limits_{t\to\infty} \rho_i = \frac{C}{3l}$, $i = 1, 2, 3$;

б) *если* $\frac{C_{\max}}{3} < C < \frac{C_{\max}}{2}$, *то движение устойчиво при некоторых начальных значениях, причем* $\lim\limits_{t\to\infty} \rho_i = \frac{C}{3l}$, $i = 1, 2, 3$, *и неустойчиво при других;*

в) *при* $C > \frac{C_{\max}}{2}$ *устойчивое равновесие для решения системы* (22) *невозможно.*

## Литература


1. *Дрю Д.* Теория транспортных потоков и управление ими.—М.: Транспорт, 1972.—424 с.
2. *Смирнов Н. Н., Киселев А. Б., Никитин В. Ф., Юмашев М. В.* Математическое моделирование автотранспортных потоков.—М.: Изд-во МГУ, 1999.—30 с.
3. *Смирнов Н. Н., Киселев А. Б., Никитин В. Ф., Юмашев М. В.* Математическое моделирование автомобильных потоков на магистралях // Вестник МГУ, сер. 1. Математ. и мех.—2000.—№ 4.—С. 39–44.
4. *Nicaise S.* Some results on spectral theory over networks, applied to nerve impulse transmission // Lecture Notes in Math.—Springer–Verlag, 1985.—№ 1171.—С. 532–541.
5. *Покорный Ю. В., Поворотова Е. Н., Пенкин О. М.* О спектре некоторых векторных краевых задач // В кн.: Вопросы качественной теории дифференциальных уравнений / Под ред. В. М. Матросова.—Новосибирск: Наука, 1988.—С. 109–113.
6. *Lubashevski I., Mahnke R., Wagner P., Kalenkov S.* Long-lived states in synchronized traffic flow. Empirical prompt and dynamical trap model // Phys. Rev. E 66, 016117 (2002).
7. *Lubashevsky I., Wagner P., Mahnke R.* Bounded rational driver models // Eur. Phys. J.—2003.—Bd. 32.—С. 243–247.
8. *Буслаев А. П., Новиков А. В., Приходько В. М., Таташев А. Г., Яшина М. В.* Вероятностные и имитационные подходы к оптимизации автодорожного движения / Под ред. В. М. Приходько.—М.: Мир, 2003.—368 с.
9. *Трикоми Ф.* Дифференциальные уравнения.—М: ИЛ, 1962.—351 с.
10. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения.—М.: ГИТТЛ, 1950.—471 с.


*Статья поступила 11 ноября 2004 г.*

Буслаев Александр Павлович, д. ф.-м. н.
г. Москва, Московский автомобильно-дорожный институт (ГТУ)
E-mail: busl@math.madi.ru

Таташев Александр Геннадьевич, д. ф.-м. н.
г. Москва, Московский автомобильно-дорожный институт (ГТУ)

Яшина Марина Викторовна, д. т. н., к. ф.-м. н.
г. Москва, Московский автомобильно-дорожный институт (ГТУ)