Владикавказский математический журнал
Октябрь–декабрь, 2004, Том 6, Выпуск 4

УДК **517.5**

ОПТИМАЛЬНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛА ПО D-МЕРНОМУ ШАРУ

С. С. Чудова

Дорогому Владимиру Михайловичу
Тихомирову от благодарной студентки

Рассматривается задача оптимального восстановления интегралов от функций многих переменных по их граничным значениям. Приводится явное выражение оптимального метода восстановления интеграла от функций, принадлежащих соболевскому классу. Вычисляется погрешность восстановления.

1. Постановка задачи

Пусть на шаре $D^d = \left\{ t = (t_1, ..., t_d) \in \mathbb{R}^d : \sum\limits_{k=1}^{d} t_k^2 \leqslant 1 \right\}$ задана функция $x(\cdot)$, принадлежащая соболевскому классу функций $W_2^1(D^d)$, т. е. совокупности функций из $L_2(D^d)$, у которых первые частные производные также принадлежат $L_2(D^d)$ и при этом

$$\int\limits_{D^d} \sum_{k=1}^{d} \left(\frac{\partial x(t)}{\partial t_k} \right)^2 dt \leqslant 1.$$

Мы располагаем информацией о граничных значениях этой функции: $F\big(x(\cdot)\big) = \xi(\cdot)$, где F — отображение, сопоставляющее функции $x(\cdot)$ ее значение на границе ∂D^d шара D^d (хорошо известно, см., например, [1], что граничные значения принадлежат соболевскому пространству с дробной гладкостью $\mathscr{W}_2^{1/2}(\partial D^d)$ и это пространство вложено в $L_1(\partial D^d)$). Требуется восстановить по этой информации (по возможности наилучшим образом) интеграл:

$$I\big(x(\cdot)\big) = \int\limits_{D^d} x(t) dt.$$

В сказанное вкладывается следующий смысл: любой функционал m на $\mathscr{W}_2^{1/2}(\partial D^d)$, ставящий в соответствие функции $\xi(\cdot)$ оценку искомого интеграла, мы будем называть методом восстановления интеграла. Погрешность этого метода оценивается величиной:

$$e\big(I, W_2^1(D^d), F, m\big) = \sup_{x(\cdot) \in W_2^1(D^d)} \left| I\big(x(\cdot)\big) - m\big(\xi(\cdot)\big) \right|.$$

Погрешность оптимального восстановления — это нижняя грань по всем возможным методам восстановления

$$E\big(I, W_2^1(D^d), F\big) = \inf_m e\big(I, W_2^1(D^d), F, m\big). \tag{1}$$

Метод, на котором нижняя грань достигается, называется *оптимальным методом восстановления.*

2. Основной результат

Теорема. *Имеет место равенство*

$$E\big(I, W_2^1(D^d), F\big) = \frac{\pi^{d/4}}{d}\sqrt{\frac{2}{(d+2)\Gamma(\frac{d}{2})}},$$

где $\Gamma(\cdot)$– *гамма-функция Эйлера, при этом метод*

$$\hat{m}\big(\xi(\cdot)\big) = \frac{1}{d}\int\limits_{\partial D^d} \xi(\tau)\, d\tau$$

является оптимальным.

В частности, при $d = 2$, переходя к полярным координатам в выражении для оптимального метода, получим формулы:

$$E\big(I, W_2^1(D^2), F\big) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \qquad \hat{m}\big(\xi(\cdot)\big) = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} \xi\big(\cos(\varphi), \sin(\varphi)\big)\, d\varphi.$$

$\lhd$ В основе доказательства лежат соображения, связанные с общими принципами теории экстремума. О таком подходе к решению задач восстановления см. в работах [2] и [3].

Найдем значение погрешности оптимального восстановления. Для величины (1) имеет место оценка:

$$E\big(I, W_2^1(D^d), F\big) \geqslant \sup_{\substack{x(\cdot)\in W_2^1(D^d) \\ x(\cdot)|_{\partial D^d}=0}} \big|I\big(x(\cdot)\big)\big|. \tag{2}$$

Действительно, для любого метода m, при всех $x(\cdot) \in W_2^1(D^d)$, таких что $x(\cdot)|_{\partial D^d} = 0$, имеем

$$2\,\big|I\big(x(\cdot)\big)\big| \leqslant \big|I\big(x(\cdot)\big) - m(0)\big| + \big|I\big(-x(\cdot)\big) - m(0)\big| \leqslant 2e\big(I, W_2^1(D^d), F, m\big).$$

Следовательно, для всех m справедливо неравенство

$$e\big(I, W_2^1(D^d), F, m\big) \geqslant \big|I\big(x(\cdot)\big)\big|,$$

откуда и следует нужная оценка.

Найдем решение задачи (см. правую часть в (2)):

$$\int\limits_{D^d} x(t)\, dt \to \max, \quad \int\limits_{D^d} \sum_{k=1}^{d} \left(\frac{\partial x(t)}{\partial t_k}\right)^2 dt \leqslant 1, \quad x(\cdot)|_{\partial D^d} = 0. \tag{3}$$

Функция Лагранжа этой задачи имеет вид

$$\mathscr{L}\big(x(\cdot),\lambda\big)=\int\limits_{D^d}\left[-x(t)+\frac{\lambda}{2}\sum_{k=1}^{d}\left(\frac{\partial x(t)}{\partial t_k}\right)^2\right]dt.$$

Покажем, что если для некоторой допустимой функции $\hat{x}(\cdot)$ и $\hat{\lambda}\geqslant 0$ выполнены условия

$$(a)\quad \min_{x(\cdot)}\mathscr{L}\big(x(\cdot),\hat{\lambda}\big)=\mathscr{L}\big(\hat{x}(\cdot),\hat{\lambda}\big),$$

$$(b)\quad \frac{\hat{\lambda}}{2}\left[\int\limits_{D^d}\sum_{k=1}^{d}\left(\frac{\partial \hat{x}(t)}{\partial t_k}\right)^2 dt-1\right]=0,$$

то $\hat{x}(\cdot)$ — решение задачи (3). Действительно, для любой допустимой в (3) функции $x(\cdot)$ имеем

$$-\int\limits_{D^d}x(t)\,dt\geqslant-\int\limits_{D^d}x(t)\,dt+\frac{\hat{\lambda}}{2}\left[\int\limits_{D^d}\sum_{k=1}^{d}\left(\frac{\partial x(t)}{\partial t_k}\right)^2 dt-1\right]$$

$$\overset{(a)}{\geqslant}-\int\limits_{D^d}\hat{x}(t)\,dt+\frac{\hat{\lambda}}{2}\left[\int\limits_{D^d}\sum_{k=1}^{d}\left(\frac{\partial \hat{x}(t)}{\partial t_k}\right)^2 dt-1\right]\overset{(b)}{=}-\int\limits_{D^d}\hat{x}(t)\,dt,$$

т. е. $\hat{x}(\cdot)$ — решение задачи (3).

Далее рассуждаем эвристически: не обращая внимания на законность тех или иных операций, найдем $\hat{x}(\cdot)$ и $\hat{\lambda}$, которые удовлетворяют соотношениям (a) и (b). Первое из этих соотношений означает, что производная функции Лагранжа по $x(\cdot)$ в точке $\hat{x}(\cdot)$ равна нулю, т.е.

$$-\int\limits_{D^d}x(t)\,dt+\hat{\lambda}\int\limits_{D^d}\sum_{k=1}^{d}\frac{\partial \hat{x}(t)}{\partial t_k}\frac{\partial x(t)}{\partial t_k}\,dt=0\quad\forall\,x(\cdot).\tag{4}$$

Рассмотрим дифференциальную $(d{-}1)$-форму

$$f=\sum_{k=1}^{d}(-1)^{k+1}\frac{\partial \hat{x}(t)}{\partial t_k}x(t)\,dt_1\wedge\ldots\wedge\widetilde{dt_k}\wedge\ldots\wedge dt_d,$$

где $\widetilde{dt_k}$ означает, что множитель dt_k не входит в произведение, тогда по формуле Стокса (см. [4]):

$$\int\limits_{\partial D^d}f=\int\limits_{D^d}df.$$

Дифференциал этой формы имеет вид

$$df=\sum_{k=1}^{d}\left(\frac{\partial^2\hat{x}(t)}{\partial t_k^2}x(t)+\frac{\partial \hat{x}(t)}{\partial t_k}\frac{\partial x(t)}{\partial t_k}\right)dt_1\wedge\ldots\wedge dt_d.$$

Тогда второй интеграл в (4) можно записать в виде:

$$\int\limits_{D^d}\sum_{k=1}^{d}\frac{\partial \hat{x}(t)}{\partial t_k}\frac{\partial x(t)}{\partial t_k}\,dt=\int\limits_{\partial D^d}f-\int\limits_{D^d}\sum_{k=1}^{d}\frac{\partial^2\hat{x}(t)}{\partial t_k^2}x(t)\,dt.\tag{5}$$

Так как для допустимых функций $x(\cdot)|_{\partial D^d} = 0$, то первый интеграл справа в этом равенстве равен нулю. Подставляя полученное выражение в (4), приходим к уравнению:

$$\int\limits_{D^d} x(t)\left(1+\hat\lambda\sum_{k=1}^{d}\frac{\partial^2\hat x(t)}{\partial t_k^2}\right)dt = 0 \quad \forall\, x(\cdot).$$

Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{d}\frac{\partial^2\hat x(t)}{\partial t_k^2} = -\frac{1}{\hat\lambda}.$$

Легко видеть, что $\hat x(t) = \frac{1}{2d\hat\lambda}\left(1-\sum\limits_{k=1}^{d} t_k^2\right)$ удовлетворяет этому условию и на границе D^d обращается в нуль. Множитель Лагранжа $\hat\lambda$ находим из условия (b):

$$\int\limits_{D^d}\sum_{k=1}^{d}\left(\frac{\partial\hat x(t)}{\partial t_k}\right)^2 dt = 1,$$

т. е. $\int\limits_{D^d}\sum\limits_{k=1}^{d} t_k^2\,dt = d^2\hat\lambda^2$.

Воспользовавшись известной формулой (см.,например, [5], с. 402)

$$\int\limits_{D^d} f(\sqrt{t_1^2+...+t_d^2})\,dt_1...dt_d = 2\frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(\frac{d}{2})}\int\limits_0^1 r^{d-1}f(r)\,dr,$$

получим, что $\frac{2\pi^{d/2}}{(d+2)\Gamma(\frac{d}{2})} = d^2\hat\lambda^2$, откуда $\hat\lambda = \frac{\pi^{d/4}}{d}\sqrt{\frac{2}{(d+2)\Gamma(\frac{d}{2})}}$.
Таким образом,

$$\hat x(t) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi^{d/2}}}\sqrt{(d+2)\Gamma(d/2)}\left(1-\sum_{k=1}^{d} t_k^2\right).$$

Теперь, подставив найденные $\hat x(\cdot)$ и $\hat\lambda$ в уравнение (5), легко убедиться, что получается тождество, верное для всех $x(\cdot)$.

Покажем, что $\hat x(\cdot)$ действительно является решением задачи (3). Для любой допустимой функции $x(\cdot)$ тождество (5) перепишется в виде:

$$\int\limits_{D^d}\sum_{k=1}^{d}\frac{\partial\hat x(t)}{\partial t_k}\frac{\partial x(t)}{\partial t_k}\,dt = -\int\limits_{D^d}\sum_{k=1}^{d}\frac{\partial^2\hat x(t)}{\partial t_k^2}x(t)\,dt = \frac{1}{\hat\lambda}\int\limits_{D^d} x(t)\,dt.$$

Следовательно, по неравенству Коши — Буняковского

$$\int\limits_{D^d} x(t)\,dt = \hat\lambda\int\limits_{D^d}\sum_{k=1}^{d}\frac{\partial\hat x(t)}{\partial t_k}\frac{\partial x(t)}{\partial t_k}\,dt$$

$$\leqslant \hat\lambda\left[\int\limits_{D^d}\sum_{k=1}^{d}\left(\frac{\partial\hat x(t)}{\partial t_k}\right)^2 dt\right]^{1/2}\times\left[\int\limits_{D^d}\sum_{k=1}^{d}\left(\frac{\partial x(t)}{\partial t_k}\right)^2 dt\right]^{1/2}\leqslant\hat\lambda.$$

С другой стороны

$$\int\limits_{D^d} \hat{x}(t)\,dt = \frac{1}{2d\hat{\lambda}} \int\limits_{D^d} \left(1 - \sum_{k=1}^{d} t_k^2\right) dt = \frac{1}{2d\hat{\lambda}} \frac{2\pi^{d/2}}{(d+2)\Gamma(\frac{d}{2})} \frac{2}{d} = \hat{\lambda},$$

значит $\hat{x}(\cdot)$ — решение (3).

В соответствии с (2) мы нашли оценку снизу для погрешности оптимального восстановления : $E(I, W_2^1(D^d), F) \geqslant \hat{\lambda}$.

Рассмотрим метод

$$\hat{m}\big(\xi(\cdot)\big) = \hat{\lambda} \int\limits_{\partial D^d} \sum_{k=1}^{d} (-1)^k \frac{\partial \hat{x}(t)}{\partial t_k} \xi(t)\, dt_1 \wedge \ldots \wedge \widetilde{dt_k} \wedge \ldots \wedge dt_d$$

$$= \frac{1}{d} \int\limits_{\partial D^d} \sum_{k=1}^{d} (-1)^{k+1} t_k \xi(t)\, dt_1 \wedge \ldots \wedge \widetilde{dt_k} \wedge \ldots \wedge dt_d = \frac{1}{d} \int\limits_{\partial D^d} \xi(\tau)\, d\tau$$

и покажем, что он является оптимальным.

Из (4) и (5) вытекает равенство:

$$\int\limits_{D^d} x(t)\,dt - \hat{m}\big(\xi(\cdot)\big) = \hat{\lambda} \int\limits_{D^d} \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial \hat{x}(t)}{\partial t_k} \frac{\partial x(t)}{\partial t_k}\, dt.$$

Но погрешность оптимального восстановления не превосходит модуля этой разности, следовательно

$$E\big(I, W_2^1(D^d), F\big) \leqslant \hat{\lambda} \left[\int\limits_{D^d} \sum_{k=1}^{d} \left(\frac{\partial \hat{x}(t)}{\partial t_k}\right)^2 dt\right]^{1/2} \times \left[\int\limits_{D^d} \sum_{k=1}^{d} \left(\frac{\partial x(t)}{\partial t_k}\right)^2 dt\right]^{1/2} \leqslant \hat{\lambda}.$$

Итак, на самом деле, погрешность в точности равна $\hat{\lambda}$, а метод $\hat{m}$ — оптимальный. ▷

Автор благодарит В. М. Тихомирова за постановку задачи и внимание к работе.

Литература

1. *Бесов О. В., Ильин В. Л., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения.—М.: Наука, 1975.—480 с.
2. *Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М.* О неравенствах для производных колмогоровского типа // Мат. сборник.—1997.—Т. 188, № 12, С. 73–106.
3. *Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М.* Выпуклый анализ и его приложения.—М.: Эдиториал УРСС, 2003 (2-ое изд.).—176 с.
4. *Зорич В. А.* Математический анализ. Часть 2.—М.: МЦНМО, 2002.—787 с.
5. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 3.—М.: Наука, 1966.—656 с.

Статья поступила 21 ноября 2004 г.

Чудова Софья Сергеевна
г. Москва, Московский государственный институт
радиотехники электроники и автоматики
E-mail: `yanos@inbox.ru`