Владикавказский математический журнал
Июль–сентябрь, 2004, Том 6, Выпуск 3

УДК **517.98**

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО И РЕГУЛЯРНОГО ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ПРОСТРАНСТВАХ ОРЛИЧА ИЗМЕРИМЫХ ВЕКТОР-ФУНКЦИЙ

К семидесятипятилетию
Юрия Григорьевича Решетняка

В. Г. Фетисов, В. Н. Козоброд

В работе рассмотрен вопрос об интерполяции положительного и регулярного операторов в квазинормированных пространствах Орлича измеримых по Лебегу векторнозначных функций.

В обзоре Ю. А. Брудного, С. Г. Крейна и Е. М. Семенова [1] по теории интерполяции операторов отмечалось, что «цикл работ, посвященных интерполяции линейных операторов в линейных топологических пространствах, весьма разнороден по методам и направленности». Можно добавить, что и идея интерполяции локально невыпуклых топологий еще далека от сколь-нибудь полной реализации. Настоящая статья посвящена задаче интерполяции положительного и регулярного линейных операторов в локально ограниченных пространствах Орлича измеримых вектор-функций. При этом используются некоторые соображения более ранних работ первого из авторов (см. ссылки на статьи [2, 3, 4] на стр. 140, 142 из вышеупомянутого обзора [1]).

Сначала приведем необходимый аппарат обозначений, определений, вспомогательных результатов, являющихся базовыми для дальнейшего изложения. Мы во многом следуем содержанию главы 2 из [5] (см. также монографию [8]).

Пусть (T, Σ, μ) — пространство с мерой, т. е. T — множество, Σ — σ-алгебра его подмножеств, μ — счетно-аддитивная неотрицательная мера на Σ. Без ограничения общности можно предполагать, что все атомы дискретной части T являются точками. Пусть $\Sigma(\mu)$ (соответственно $\Sigma^\sigma(\mu)$) есть кольцо (соответственно σ-кольцо) множеств из Σ, имеющих конечную (соответственно σ-конечную) меру. Всюду в дальнейшем будет считать, что:

(a) если $A \subset B \in \Sigma$ и $\mu(B) = 0$, то $A \in \Sigma$ (полнота меры μ);

(b) если для любого $B \in \Sigma(\mu)$ имеем $B \cap A \in \Sigma$, то $A \in \Sigma$;

(c) для любого $A \in \Sigma$ имеем $\mu(A) = \sup\{\mu(B) : B \subset A, B \in \Sigma(\mu)\}$;

(d) существуют дизъюнктные множества $\{T_i\}$ такие, что $\mu(T \setminus \cup T_i) = 0$ и $0 < \mu(T_i) < +\infty$ при любом i;

(e) Для любого $A \in \Sigma(\mu)$ существуют множество N меры нуль и не более, чем счетное множество J индексов i такие, что $A \setminus N = \bigcup_{i \in J}(A \cap T_i)$.

Как известно [1], условия (a)–(e) выполнены для любой полной σ-конечной меры и для меры, порожденной существенно верхним интегралом меры Радона на любом локально компактном пространстве. Без ущерба для нетривиальности всего дальнейшего изложения можно считать, что (T, Σ, μ) есть отрезок [0,1] с мерой Лебега μ или же ограниченный компакт в $\mathbb{R}^n$ с мерой Лебега μ.

Пусть E — F-квазинормированное идеальное пространство с мерой Лебега μ (см. [4]) (например, L^p, $0 < p < \infty$), X — банахово идеальное пространство [5]. Символом $L^0(X)$ обозначаем пространство (классов эквивалентности) всех X-значных измеримых по Лебегу вектор-функций на T.

Через $E(X)$ обозначим F-квазинормированное пространство всех измеримых вектор-функций $\vec{f} : T \to X$ таких, что $\|\vec{f}; E(X)\| = \|\|\vec{f}\|_X\|_E < +\infty$.

Проблематика теории пространств вектор-функций $E(X)$ весьма обширна. Это и вопросы геометрии пространств, ограниченных операторов в них, представления операторов, решение различных классов уравнений и др.

Мы рассматриваем в основном два модельных примера $E(X)$, а именно:

(1) $L^p(X)$ (или $L^p(T, X)$) есть пространство всех измеримых вектор-функций $\vec{f}(t)$ таких, что F-квазинорма элемента:

$$\|\vec{f}; L^p(X)\| = \left(\int_T \|\vec{f}(t)\|_X^p \, d\mu(t) \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty, \quad 0 < p < \infty;$$

(2) через $L^{*\varphi}(X)$ (или $L^{*\varphi}(T, X)$) обозначим пространство всех измеримых вектор-функций $\vec{f}(t)$ таких, что

$$\|\vec{f}; L^{*\varphi}(X)\| = \inf \left\{ \varepsilon > 0 : \int_T \varphi(\|\vec{f}(t)\|_X / \varepsilon) \, d\mu(t) \leqslant \varepsilon \right\},$$

где φ — некоторая φ-функция, принадлежащая классу $\Phi(L)$, см. [6].

Цель нашей работы, как уже отмечалось, — проинтерполировать линейный положительный и регулярный операторы, действующие в заданной четверке F-квазинормированных пространств Орлича векторнозначных функций.

В дальнейшем важную роль играют γ-выпуклые φ-функции, подчиняющиеся Δ_2-условию [4], примерами которых могут служить $\varphi_1(x) = |x|^p$ $(0 < \gamma < p < 1)$, $\varphi_2(x) = \frac{|x|}{\ln(\sqrt{|x|}+e)}$ и другие. Для γ-выпуклой φ-функции F-квазинорма вектор-функции $\vec{f}(t) \in L^{*\varphi}(X)$ имеет вид:

$$\|\vec{f}; L^{*\varphi}(X)\| = \inf \left\{ \varepsilon > 0 : \int_T \varphi\left(\frac{\|\vec{f}(t)\|_X}{\varepsilon^{\frac{1}{\gamma}}} \right) d\mu(t) \leqslant 1 \right\}.$$

Так же, как для скалярного случая [3], можно показать (см. [5]), что множество всех конечнозначных вектор-функций вида $\vec{f}(t) = \sum_{i=1}^n \chi_{G_i}(t) x_i$, $(G_i \in \Sigma$, $G_i \cap G_j = \varnothing$, $i, j = 1, \ldots, n$, где $i \neq j$, $x_i \in X$, $\chi_{G_i}(t)$ — индикатор измеримого множества $G_i \in \Sigma)$ плотно в F-квазинормированном пространстве Орлича $L^{*\varphi}(X)$, а его замыкание в F-квазинорме пространства $L^{*\varphi}(X)$ обозначим через $E^{\varphi}(X)$.

Считаем для определенности, что φ-функция φ_0 «слабее», чем φ-функция φ_1, т. е. $\overline{\lim\limits_{x\to\infty}} \frac{\varphi_0(Kx)}{\varphi_1(x)} < +\infty$ $(K > 0, x \geqslant 0)$. По заданным γ-выпуклым φ-функциям φ_0 и φ_1 можно построить так называемую промежуточную φ-функцию следующим образом:

а) пусть $W_0(x) = \varphi_0(|x|^{1/\gamma})$ и $W_1(x) = \varphi_1(|x|^{1/\gamma})$ — некоторые N-функции [7], $W_i^{-1}(x)$ — обратные к $W_i(x)$ $(i = 0, 1)$ функции;

в) обозначим через $W_\alpha^{-1}(x) = [W_0^{-1}(x)]^{1-\alpha}[W_1^{-1}(x)]^{\alpha}$, где $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$;

с) промежуточной γ-выпуклой φ-функцией для φ_0 и φ_1 является $\varphi_\alpha(x) = W_\alpha(x^\gamma)$, где $W_\alpha(x)$ — обратная к $W_\alpha^{-1}(x)$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ (подробнее см. [4]). Пространства $E^{\varphi_\alpha}(X)$ образуют при $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ семейство вложенных друг в друга локально ограниченных пространств Орлича, а так как в каждом из них плотно множество всех конечнозначных функций, то каждое из пространств $E^{\varphi_{\alpha_2}}(X)$ плотно вложено в $E^{\varphi_{\alpha_1}}(X)$ при $\alpha_1 < \alpha_2$. Таким образом, F-квазинормированные пространства Орлича $E^{\varphi_\alpha}(X)$ (будучи непрерывно вложенными в пространство всех измеримых вектор-функций) образуют интерполяционную шкалу, соединяющую заданные $E^{\varphi_0}(X)$ и $E^{\varphi_1}(X)$. Если же обе γ-выпуклые φ-функции φ_0, φ_1 подчиняются Δ_2-условию [4], то получаем шкалу F-квазинормированных пространств Орлича $L^{*\varphi_\alpha}(X)$, соединяющую заданные пространства $L^{*\varphi_0}(X)$ и $L^{*\varphi_1}(X)$. В частности, если φ_0 и φ_1 — некоторые N-функции [7], то при $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ семейство $E^{\varphi_\alpha}(X)$ образует шкалу нормированных пространств Орлича вектор-функций. Основные соотношения между F-квазинормами при $0 \leqslant \alpha_1 < \alpha < \alpha_2 \leqslant 1$ для каждого элемента из соответствующих пространств Орлича аналогичны скалярному случаю [3] (см. также [4]).

Теорема 1. *Пусть A — положительный линейный оператор, действующий непрерывно из нормированного пространства Орлича $E_{M_0}(X)$ в F-квазинормированное пространство Орлича $E^{\varphi_0}(X)$ и из $E_{M_1}(X)$ в $E^{\varphi_1}(X)$, где*

$$\|A\vec{f}; E^{\varphi_0}(X)\| \leqslant c_0\|\vec{f}; E_{M_0}(X)\|, \quad \|A\vec{f}; E^{\varphi_1}(X)\| \leqslant c_1\|\vec{f}; E_{M_1}(X)\|,$$

причем c_0 и c_1 не зависят от выбора измеримой вектор-функции $\vec{f}(t)$. Тогда для любого α, $0 < \alpha < 1$, справедливо неравенство

$$\|A\vec{f}; E^{\varphi_\alpha}(X)\| \leqslant aK_0^{1-\alpha}K_1^{\alpha}\big(\|\vec{f}; E_{M_\alpha}(X)\|^{\frac{\gamma}{(1+\gamma)}} \vee \|\vec{f}; E_{M_\alpha}(X)\|\big),$$

где $a > 0$, $K_i(c_i)$, $i = 0, 1$.

$\lhd$ Наметим схему доказательства. На первом этапе рассматриваем сужение оператора A на линейное многообразие всех конечнозначных измеримых вектор-функций, и далее, второй этап — продолжение по непрерывности оператора A на $E_{M_\alpha}(X)$. На первом этапе базовым является неравенство вида:

$$\|A\vec{f}\|_X \leqslant \left(A(M_0^{-1}(M_\alpha(\|\vec{f}\|_X)))\right)^{1-\alpha} \cdot \left(A(M_1^{-1}(M_\alpha(\|\vec{f}\|_X)))\right)^{\alpha},$$

где X — банахово пространство, $0 < \alpha < 1$, M_i^{-1} — обратная к N-функции M_i, $i = 0, 1$, M_α — N-функция обратная к $(M_0^{-1})^{1-\alpha} \cdot (M_1^{-1})^{\alpha}$. Для его доказательства сначала используем неравенство Гёльдера для алгебраических сумм (учитывая, что $\vec{f}(t)$ — конечнозначная вектор-функция):

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \omega_i v_i \delta_i\right| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |\omega_i|^{\frac{1}{1-\alpha}} \cdot \delta_i\right)^{1-\alpha} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} |v_i|^{\frac{1}{\alpha}} \delta_i\right)^{\alpha},$$

где $0 < \alpha < 1$. Пусть при $t = t_0$ все значения $A\chi_{G_i}(t_0) < +\infty$. Полагаем

$$\omega_i = (M_0^{-1}(M_\alpha(|x_i|)))^{1-\alpha} \cdot \operatorname{sgn} x_i, \quad v_i = (M_1^{-1}(M_\alpha(|x_i|))), \quad \delta_i = A\chi_{G_i} t_0.$$

В силу линейности и положительности оператора A базовое неравенство выполняется при $t = t_0$, а так как почти при всех значениях $t \in T$ функции $A\chi_{G_i}(t)$ конечны, то базовое неравенство справедливо почти при всех $t \in T$. Возводя обе его части в степень $\gamma > 0$, умножая на $\|\vec{g}(t)\|_X$, где $\vec{g}(t) \in E_{V_\alpha}(X)$ (V_α — двойственная в смысле Юнга N-функция к W_α (см. [6])), а $\Gamma(\vec{g}, V_\alpha) = \int_T V_\alpha(\|\vec{g}(t)\|_X) d\mu(t) \leqslant 1$, проинтегрировав обе части базового неравенства и применяя интегральное неравенство Гёльдера с показателями $p = \frac{1}{1-\alpha}$, $p' = \frac{1}{\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, получим оценку вида:

$$\int_T \|A\vec{f}(t)\|_X^\gamma \cdot \|\vec{g}(t)\|_X \, d\mu(t) \leqslant \left(\int_T (A(M_0^{-1}(M_\alpha(\|\vec{f}\|_X))))^\gamma (V_0^{-1}(V_\alpha(\|\vec{g}\|_X))) \, d\mu(t) \right)^{1-\alpha}$$
$$\times \left(\int_T (A(M_1^{-1}(M_\alpha(\|\vec{f}\|_X))))^\gamma (V_1^{-1}(V_\alpha(\|\vec{g}\|_X))) \, d\mu(t) \right)^{\alpha}.$$

Функция $V_0^{-1}(V_\alpha(\|\vec{g}\|_X))$, очевидно, принадлежит пространству E_{V_0} (аналогично, функция $V_1^{-1}(V_\alpha(\|\vec{g}\|_X)) \in E_{V_1}$. Итак, приходим к неравенству

$$\int_T [A(M_0^{-1}(M_\alpha(\|\vec{f}\|_X)))]^\gamma \cdot (V_0^{-1}(V_\alpha(\|\vec{g}\|_X))) \, d\mu(t) \leqslant \|\![AY_0]^\gamma; E_{w_0}\|\!|,$$

где $Y_0 := M_0^{-1}(M_\alpha(\|\vec{f}\|_X))$. Имеем аналогичную оценку для $M_1^{-1}(M_\alpha(\|\vec{f}\|_X)) = Y_1$. Значит,

$$\int_T \|A\vec{f}(t)\|_X^\gamma \cdot \|\vec{g}(t)\|_X d\mu(t) \leqslant \|\![AY_0]^\gamma; E_{w_0}\|\!|^{1-\alpha} \cdot \|\![AY_1]^\gamma; E_{w_1}\|\!|^{\alpha}, \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1.$$

На втором шаге отдельно рассматриваем случаи:

а) $\|\!|A\vec{f}; E^{\varphi_\alpha}(X)\|\!| \leqslant 1$,

в) $\|\!|A\vec{f}; E^{\varphi_\alpha}(X)\|\!| \geqslant 1$,

с использованием γ-выпуклой промежуточной φ-функции φ_α. Приведем окончательные оценки для каждого из случаев (опуская детали для краткости изложения).

а):

$$\|\!|A\vec{f}; E^{\varphi_\alpha}(X)\|\!| \leqslant 4k_0^{1-\alpha}k_1^\alpha \|\!|\vec{f}; E_{M_\alpha}(X)\|\!|,$$

где $k_i = \max\{c_i^{\gamma/(1+\gamma)}, c_i\}$, $i = 0, 1$, не зависит от выбора конечнозначной вектор-функции $\vec{f}(t)$ из $E_{M_\alpha}(X)$;

в):

$$\|\!|A\vec{f}; E^{\varphi_\alpha}(X)\|\!| \leqslant 2^{1+\frac{1}{\gamma}} {k'_0}^{1-\alpha} {k'_1}^{\alpha} \|\!|\vec{f}; E_{M_\alpha}(X)\|\!|,$$

где $k'_i = \max\{c_i^{1+1/\gamma}, c_i\}$, $i = 0, 1$. Обозначая через $a = \max\{4, 2^{1+1/\gamma}\}$, $K_i = \max\{k_i, k'_i\}$, $i = 0, 1$, получим требуемое для множества всех конечнозначных вектор-функций. Далее, используя продолжение по непрерывности исходного оператора A с множества конечнозначных вектор-функций, всюду плотного в нормированном пространстве Орлича $E_{M_\alpha}(X)$ векторнозначных функций, и повторяя рассуждения, аналогичные скалярному случаю (см. [3]), имеем результат теоремы 1. При этом исходный оператор A и продолженный, совпадая друг с другом на всюду плотном в $E_{M_\alpha}(X)$ множестве конечнозначных функций $\vec{f}(t)$, в силу единственности предела по мере совпадут и на всем нормированном пространстве $E_{M_\alpha}(X)$. $\triangleright$

Замечание. Линейный оператор A называется регулярным, если он представим в виде разности двух положительных линейных операторов. Как известно, для регулярности исходного оператора A необходимо и достаточно, чтобы существовал положительный линейный оператор S (так называемая мажоранта оператора A), подчиняющийся условию $|A\vec{f}| \leqslant S(|\vec{f}|)$. В этой ситуации операторное уравнение $A\vec{f} = \vec{V}$ тесно связано с операторным уравнением $S\vec{u} = \vec{w}$, так как поведение оператора A в некотором смысле «контролируется» мажорантой S в силу вышеприведенной нормативной оценки (см.

монографию [8]). Из теоремы 1, определения регулярного линейного оператора и последнего условия непосредственно вытекает следующая

Теорема 2. *Пусть линейный оператор A имеет положительную мажоранту S. Пусть известно, что линейный положительный оператор S является непрерывным оператором, действующим из нормированного пространства Орлича $E_{M_0}(X)$ в F-квазинормированное пространство Орлича $E^{\varphi_0}(X)$ и из $E_{M_1}(X)$ в $E^{\varphi_1}(X)$. Тогда при каждом α, $0 < \alpha < 1$, линейный оператор A из нормированного пространства Орлича $E_{M_\alpha}(X)$ в F-квазинормированное пространство Орлича $E^{\varphi_\alpha}(X)$ является непрерывным.*

В заключение отметим, что если определяющие N-функции M_0 и M_1, равно как и γ-выпуклые φ-функции φ_0 и φ_1 подчиняются Δ_2-условию [6], то $E_{M_\alpha}(X)$ можно заменить на $L^*_{M_\alpha}(X)$, а $E^{\varphi_\alpha}(X)$ на $L^{*\varphi_\alpha}(X)$ при каждом $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$.

Литература

1. *Брудный Ю. А., Крейн С. Г., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов // Математический анализ.—М.: ВИНИТИ.—1986.—С. 3–164.
2. *Поволоцкий А. И., Фетисов В. Г.* К вопросу об интерполяции линейных операторов // Уч. зап. Ленингр. пед. ин-та.—1070.—№ 464.—С. 258–278.
3. *Поволоцкий А. И., Фетисов В. Г.* Об интерполяции линейных операторов, действующих в обобщенные пространства Орлича // Уч. зап. Ленингр. пед. ин-та.—1971.—№ 404.—С. 415–438.
4. *Фетисов В. Г.* Шкалы метрических пространств Орлича и полилинейные операторы в них // Уч. зап. Кемеров. пед. ин-та.—1969.—Вып. 19.—С. 116–129.
5. *Бухвалов А. В., Коротков В. Б., Кусраев А. Г. и др.* Векторные решетки и интегральные операторы.—Новосибирск: Наука, 1992.—215 с.
6. *Ульянов П. Л.* Представление функций рядами и классы $\Phi(L)$ // Успехи мат. наук.—1972.—Т. 27, № 2.—С. 3–52.
7. *Красносельский М. А., Рутицкий Я. Б.* Выпуклые функции и пространства Орлича.—М.: Физматгиз.—1958.—315 с.
8. *Кусраев А. Г.* Мажорируемые операторы.—М.: Наука, 2003.—619 с.

Статья поступила 27 января 2004 г.

Фетисов Валерий Георгиевич, д. ф.-м. н.
г. Шахты, Южно-Российский госуниверситет экономики и сервиса
E-mail: fetisov_vg@sssu.ru

Козоброд Вячеслав Николаевич, к. ф.-м. н.
г. Волгодонск, Волгодонский институт сервиса ЮРГУЭС
E-mail: kvn@vuf.ru