Владикавказский математический журнал
Июль–сентябрь, 2004, Том 6, Выпуск 3

УДК **517.98**

О НЕРАСШИРЯЮЩИХ ОПЕРАТОРАХ

А. Г. Кусраев

Юрию Григорьевичу Решетняку
к его семидесятипятилетию

Обсуждается булевозначный статус проблемы Э. В. Викстеда о порядковой ограниченности нерасширяющих линейных операторов. Дается булевозначное доказательство того, что в расширенном пространстве Канторовича все нерасширяющие линейные операторы порядково ограничены тогда и только тогда, когда оно локально одномерно или, что равносильно, когда оно имеет σ-дистрибутивную базу.

1. Введение

Вопрос о том, всякий ли нерасширяющий линейный оператор в пространстве Канторовича автоматически порядково ограничен, был поставлен Э. В. Викстедом в статье [16]. Первый пример неограниченного нерасширяющего линейного оператора был анонсирован Ю. А. Абрамовичем, А. И. Векслером и А. В. Колдуновым в [1, теорема 1]. Позже те же авторы [2, теорема 2.1] и П. Т. Н. Макполин и Э. В. Викстед [15, теорема 3.2] показали, что все нерасширяющие операторы в расширенном K-пространстве автоматически порядково ограничены в том и только в том случае, если это K-пространство локально одномерно. Тем самым, проблема Э. В. Викстеда была сведена к строению локально одномерных K-пространств.

В этой связи возник вопрос, сформулированный Э. В. Викстедом в [11]: не совпадают ли класс локально одномерных K-пространств и класс дискретных K-пространств? Отрицательный ответ был найден А. Е. Гутманом в [13]: *существует непрерывное* (*безатомное*) *локально одномерное K-пространство* (см. также [6, 14]). А. Е. Гутманом дано также описание баз расширенных локально одномерных K-пространств: ими оказались в точности σ-дистрибутивные полные булевы алгебры.

Кроме того, в булевозначном анализе хорошо известно, что локальная одномерность расширенного K-пространства связана со строением поля действительных чисел $\mathcal{R}$ внутри булевозначной модели $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. Точнее говоря (см. [8]), расширенное K-пространство в соответствии с теоремой Гордона можно представить как спуск $\mathcal{R}{\downarrow}$ булевозначного поля действительных чисел $\mathcal{R}$, а образом стандартного поля действительных чисел $\mathbb{R}$ (при каноническом вложении стандартного универсума $\mathbb{V}$ в булевозначный универсум $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$) служит подполе $\mathbb{R}^{\wedge}$ поля $\mathcal{R}$. При этом несложно убедиться (и это хорошо было известно в других терминах), что $\mathcal{R}{\downarrow}$ локально одномерно в том и только в том случае, если $\mathbb{R}^{\wedge} = \mathcal{R}$. Суммируя все сказанное, можно сформулировать следующий результат.

Теорема A. *Для произвольной полной булевой алгебры $\mathbb{B}$ равносильны следующие утверждения:*

A (1) $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})} \models \mathcal{R} = \mathbb{R}^{\wedge}$;

A (2) *$\mathbb{B}$ является σ-дистрибутивной;*

A (3) *K-пространство $\mathbb{B}(\mathbb{R}) := \mathcal{R}{\downarrow}$ локально одномерно;*

A (4) *в K-пространстве $\mathbb{B}(\mathbb{R}) := \mathcal{R}{\downarrow}$ каждый нерасширяющий линейный оператор порядково ограничен.*

Настоящая работа посвящена булевозначному доказательству этой теоремы. Ниже в § 3, § 4 и § 5 приведем обоснование эквивалентностей A (1) $\leftrightarrow$ A (4), A (1) $\leftrightarrow$ A (3) и A (1) $\leftrightarrow$ A (2) соответственно. Оказывается, что все эквивалентные условия теоремы A сводятся к свойствам чисел и кардиналов внутри подходящей булевозначной модели.

Необходимые сведения из булевозначного анализа и теории векторных решеток содержатся в книгах [3, 7, 8, 10, 12]. Автор выражает благодарность рецензенту, указавшему на существенный пробел в первоначальном определении локального базиса Гамеля из 4.3.

2. Вспомогательные сведения о булевозначных числах и кардиналах

Приведем необходимые определения и факты из булевозначного анализа. Подробности, см. в [8].

2.1. Всюду ниже $\mathbb{B}$ — полная булева алгебра с нулем $\mathbf{0}$ и единицей $\mathbf{1}$, а $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ — соответствующий булевозначный универсум, в котором булева оценка истинности произвольной формулы теории множеств $\varphi(v_1, \dots, v_n)$ с константами $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ обозначается символом $[\![\varphi(x_1, \dots, x_n)]\!]$. При этом $[\![\varphi(x_1, \dots, x_n)]\!] \in \mathbb{B}$ и истинность утверждения φ в модели $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ означает по определению $[\![\varphi(x_1, \dots, x_n)]\!] = \mathbf{1}$.

В силу принципа максимума существует элемент $\mathcal{R} \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, для которого $[\![\,\mathcal{R}$ — поле действительных чисел$\,]\!] = \mathbf{1}$. Если формула $\varphi(x)$ представляет собой формальную запись аксиом архимедова упорядоченного поля (для x), то она эквивалентна ограниченной формуле. Так как для поля $\mathbb{R}$ действительных чисел $\varphi(\mathbb{R})$ истинна, то согласно ограниченному принципу переноса (см. [8]) будет $[\![\,\varphi(\mathbb{R}^{\wedge})\,]\!] = \mathbf{1}$, т. е. $[\![\,\mathbb{R}^{\wedge}$ — архимедово упорядоченное поле$\,]\!] = \mathbf{1}$. Можно считать при этом, что $\mathbb{R}^{\wedge}$ — плотное подполе поля $\mathcal{R}$ в модели $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. При этом $\mathbb{1} = 1^{\wedge}$ служит единицей поля $\mathcal{R}$, если 1 — единица поля $\mathbb{R}$.

Спуском поля $\mathcal{R}$ называют множество $\mathcal{R}{\downarrow} := \{x \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})} : [\![x \in \mathcal{R}]\!] = \mathbf{1}\}$, на котором определена структура коммутативного упорядоченного кольца следующим образом. Если алгебраические операции и порядок в $\mathcal{R}$ обозначим временно символами $\oplus$, $\odot$, $\circledleq$, а в $\mathcal{R}{\downarrow}$ — как обычно, символами $+, \cdot, \leqslant$, то определение сложения, умножения и отношения порядка на множестве $\mathcal{R}{\downarrow}$ выглядят так:

$$
\begin{gathered}
z = x + y \iff [\![\, z = x \oplus y \,]\!] = \mathbf{1}, \\
z = x \cdot y \iff [\![\, z = x \odot y \,]\!] = \mathbf{1}, \\
x \leqslant y \iff [\![\, x \circledleq y \,]\!] = \mathbf{1} \\
(x,\ y,\ z \in \mathcal{R}{\downarrow}).
\end{gathered}
$$

Умножение элементов $\mathcal{R}{\downarrow}$ на действительные числа можно определить правилом:

$$
y = \lambda x \iff y = \lambda^{\wedge} \cdot x \iff [\![\, y = \lambda^{\wedge} \odot x \,]\!] = \mathbf{1} \quad (x, y \in \mathcal{R}{\downarrow},\ \lambda \in \mathbb{R}).
$$

2.2. ***Теорема Гордона.*** *Пусть $\mathcal{R}$ — поле действительных чисел в модели $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. Тогда $\mathcal{R}{\downarrow}$ (с указанными в 2.1 операциями и порядком) представляет собой расширенное K-пространство с порядковой единицей $\mathbb{1}$. Более того, существует булев изоморфизм χ*

булевой алгебры $\mathbb{B}$ *на базу* $\mathfrak{P}(\mathcal{R}{\downarrow})$ *такой, что для любых* $x, y \in \mathcal{R}{\downarrow}$ *и* $b \in \mathbb{B}$ *справедливы эквивалентности:*

$$\chi(b)x = \chi(b)y \iff b \leqslant [\![\, x = y \,]\!],$$
$$\chi(b)x \leqslant \chi(b)y \iff b \leqslant [\![\, x \leqslant y \,]\!].$$

2.3. Если элемент $\sigma \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ таков, что $[\![\sigma : \mathcal{R} \to \mathcal{R}]\!] = \mathbf{1}$, то существует единственное отображение $S : \mathcal{R}{\downarrow} \to \mathcal{R}{\downarrow}$, для которого

$$[\![S(x) = \sigma(x)]\!] = \mathbf{1} \quad (x \in \mathcal{R}{\downarrow}).$$

Отображение S называют спуском σ и обозначают символом $\sigma{\downarrow}$; оно обладает свойством *экстенсинальности*:

$$[\![x = y]\!] \leqslant [\![S(x) = S(y)]\!] \quad (x, y \in \mathcal{R}{\downarrow}).$$

Как видно из 2.2, экстенсиональность S означает, что для любых $x, y \in \mathcal{R}{\downarrow}$ и $b \in \mathbb{B}$ из $\chi(b)x = \chi(b)y$ вытекает $\chi(b)S(x) = \chi(b)S(y)$.

Наоборот, если имеется экстенсиональное отображение $S : \mathcal{R}{\downarrow} \to \mathcal{R}{\downarrow}$, то существует единственная функция $\sigma : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, для которой $S = \sigma{\downarrow}$. При этом говорят что σ — подъем S и пишут $\sigma = S{\uparrow}$. Таким образом, спуск и подъем устанавливают биекцию множества всех экстенсиональных операторов из $\mathcal{R}{\downarrow}$ в $\mathcal{R}{\downarrow}$ и множества всех элементов $\sigma \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, удовлетворяющих условию $[\![\sigma : \mathcal{R} \to \mathcal{R}]\!] = \mathbf{1}$ (см. правила сокращения стрелок из [8, теорема 3.3.12]). Последнее множество обозначим символом $F(\mathcal{R}){\downarrow}$.

2.4. Пусть $\mathrm{Ex}(\mathcal{R}{\downarrow})$ — множество всех экстенсиональных отображений из $\mathcal{R}{\downarrow}$ в $\mathcal{R}{\downarrow}$. Это множество можно снабдить структурой унитарного модуля над кольцом $\mathcal{R}{\downarrow}$, если ввести в нем алгебраические операции поточечно. Множество $F(\mathcal{R}){\downarrow}$ также можно снабдить структурой модуля над $\mathcal{R}{\downarrow}$. Это делается точно также, как в 2.1.

Указанная в 2.3 *биекция между* $\mathrm{Ex}(\mathcal{R}{\downarrow})$ *и* $F(\mathcal{R}){\downarrow}$ *является изоморфизмом модулей.*

$\lhd$ Требуемое легко усматривается из следующих равенств:

$$(S+T){\uparrow}x = (S+T)x = Sx + Tx = S{\uparrow}x \oplus T{\uparrow}x = (S{\uparrow} \oplus T{\uparrow})x \quad (x \in \mathcal{R}{\downarrow});$$
$$(\alpha \cdot S){\uparrow}x = (\alpha \cdot S)x = \alpha \cdot (Sx) = \alpha \odot (S{\uparrow}x) = (\alpha \odot S{\uparrow})x \quad (\alpha, x \in \mathcal{R}{\downarrow}).$$

В этих соотношениях символами $\oplus$ и $\odot$ обозначены как кольцевые операции в $\mathcal{R}$, так и модульные операции в $F(\mathcal{R}){\downarrow}$. То же относится и к использованию символов $+$ и $\cdot$ в $\mathcal{R}{\downarrow}$ и $\mathrm{Ex}(\mathcal{R}{\downarrow})$. $\rhd$

2.5. Пусть формула $\mathrm{Ord}(\alpha)$ означает, что α — *ординал,* т. е. α — транзитивное множество, вполне упорядоченное отношением $\in$. Эта формула ограничена, поэтому

(1) $\mathrm{Ord}(\alpha) \iff \mathbb{V}^{(\mathbb{B})} \models \mathrm{Ord}(\alpha^{\wedge})$.

Можно показать, что утверждение «наименьший предельный ординал» также можно записать ограниченной формулой, поэтому

$$\alpha \text{ — наименьший предельный ординал } \iff$$
$$\mathbb{V}^{(\mathbb{B})} \models \text{«}\alpha^{\wedge} \text{ — наименьший предельный ординал»}.$$

Множество неотрицательных целых чисел $\omega := \{0, 1, 2, \dots\}$ — наименьший предельный ординал, поэтому $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})} \models$ «$\omega^{\wedge}$ — наименьший предельный ординал». Таким образом, если $\aleph_0$ — множество неотрицательных целых чисел внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, то

(2) $\omega^{\wedge} = \aleph_0$.

Аналогично обстоит дело с множеством рациональных чисел $\mathbb{Q}$. Именно если $\mathcal{Q}$ — множество рациональных чисел внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, то

(3) $\mathbb{Q}^\wedge = \mathcal{Q}$.

2.6. С кардиналами внутри модели $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ дело обстоит иначе. Пусть формула $\mathrm{Card}(x)$ обозначает, что x — *кардинал,* т. е. ординал не равномощный никакому предшествующему ординалу. Можно показать, что если $[\![\mathrm{Card}(\alpha^\wedge)]\!] = \mathbf{1}$, то $\mathrm{Card}(\alpha)$. Однако обратная импликация может нарушиться, а ординал может потерять свойство быть кардиналом при каноническом вложении в $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$.

В действительности для бесконечных кардиналов $\lambda < \varkappa$ можно подобрать такую полную булеву алгебру $\mathbb{B}$, что $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})} \models |\lambda^\wedge| = |\varkappa^\wedge|$ (см. [12, теорема 5.1]). Это обстоятельство называют *смещением кардинальных чисел.* Возможен такой выбор $\mathbb{B}$, что $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})} \models 2^{\omega_\alpha} = \omega_{\beta+1}$ для некоторых $\alpha < \beta$ (см. [12, теорема 2.11]). Так устанавливается совместимость гипотезы континуума и обобщенной гипотезы континуума с аксиомами Цермело — Френкеля.

2.7. Булеву σ-алгебру $\mathbb{B}$ называют *σ-дистрибутивной,* если для любой двойной последовательности $(b_{n,m})_{n,m\in\mathbb{N}}$ в $\mathbb{B}$ выполнено условие:

$$\bigvee_{n\in\mathbb{N}} \bigwedge_{m\in\mathbb{N}} b_{n,m} = \bigwedge_{\varphi\in\mathbb{N}^\mathbb{N}} \bigvee_{n\in\mathbb{N}} b_{n,\varphi(n)}.$$

Это равносильно тому, что для любой двойной последовательности $(b_{n,m})$ верно двойственное соотношение

$$\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} \bigvee_{m\in\mathbb{N}} b_{n,m} = \bigvee_{\varphi\in\mathbb{N}^\mathbb{N}} \bigwedge_{n\in\mathbb{N}} b_{n,\varphi(n)}.$$

Другие эквивалентные формулировки см. у Р. Сикорского [9].

2.8. *Для полной булевой алгебры $\mathbb{B}$ равносильны следующие утверждения:*

(1) *$\mathbb{B}$ σ-дистрибутивна;*

(2) $\mathbb{V}^{(B)} \models (\aleph_0)^{\aleph_0} = (\omega^\omega)^\wedge$;

(3) $\mathbb{V}^{(B)} \models \mathcal{P}(\aleph_0) = \mathcal{P}(\omega)^\wedge$.

$\triangleleft$ См. Дж. Белл [12, стр. 58]. $\triangleright$

3. Булевозначное представление нерасширяющих операторов

В этом параграфе покажем, что А (1) $\leftrightarrow$ А (4). С этой целью вначале получим булевозначное представление нерасширяющих операторов как действительных функций действительного аргумента.

3.1. Всюду в этом параграфе буквой G обозначаем расширенное K-пространство $\mathcal{R}{\downarrow}$. Напомним, что G — также точное f-кольцо с единицей $\mathbb{1}$.

Линейный оператор $S : G \to G$ называют *нерасширяющим* (или *сохраняющим полосы*), если для любых $u, v \in G$ из $u \perp v$ следует $u \perp Sv$. При этом S будет нерасширяющим в том и только в том случае, если $\pi \circ S = S \circ \pi$ для любого порядкового проектора π в G. Пусть $\mathrm{End}_N(G)$ — множество всех нерасширяющих линейных операторов в G. Ясно, что $\mathrm{End}_N(G)$ — векторное пространство. Более того, $\mathrm{End}_N(G)$ будет точным унитарным модулем над кольцом G, если определить оператор gT формулой $gT : x \mapsto g \cdot Tx$ ($x \in G$). Это следует из того, что умножение на элемент G представляет собой нерасширяющий оператор и композиция нерасширяющих операторов есть нерасширяющий оператор. Обозначим символом $\mathrm{End}_{\mathbb{R}^\wedge}(\mathcal{R})$ элемент $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, изображающий пространство всех $\mathbb{R}^\wedge$-линейных отображений из $\mathcal{R}$ в $\mathcal{R}$. Тогда $\mathrm{End}_{\mathbb{R}^\wedge}(\mathcal{R})$ — векторное пространство над полем $\mathcal{R}$ внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, а $\mathrm{End}_{\mathbb{R}^\wedge}(\mathcal{R})\!\downarrow$ — точный унитарный модуль над G.

3.2. *Линейный оператор в K-пространстве G будет нерасширяющим в том и только в том случае, когда он экстенсионален.*

$\lhd$ Как видно из теоремы Гордона и из 2.3, экстенсиональность линейного оператора $T : G \to G$ означает, что для любых $x \in G$ и $\pi \in \mathfrak{P}(G)$ из равенства $\pi x = 0$ следует $\pi T x = 0$. Если взять $x := \pi^\perp y$, то получим $\pi T \pi^\perp = 0$ или, что то же, $\pi T = \pi T \pi$. Заменив в этом равенстве π на $\pi^\perp$, получим $T\pi = \pi T \pi$, поэтому $\pi T = T\pi$. Тем самым, оператор T нерасширяющий согласно 3.1. Наоборот, для нерасширяющего оператора T непосредственно из определений видно, что из $\pi x = 0$ следует $\pi T x = 0$. $\rhd$

3.3. *Модули $\mathrm{End}_N(G)$ и $\mathrm{End}_{\mathbb{R}^\wedge}(\mathcal{R})\!\downarrow$ изоморфны. Изоморфизм устанавливается путем сопоставления нерасширяющему оператору его подъема.*

$\lhd$ Оператор $T \in \mathrm{End}_N(G)$ экстенсионален ввиду 3.2, потому имеет подъем $\tau := T\!\uparrow$, который представляет собой единственную функцию из $\mathcal{R}$ в $\mathcal{R}$, удовлетворяющую условию $[\![\tau(x) = Tx]\!]$ $(x \in G)$, см. 2.3. Используя это условие и определение структуры кольца в $\mathcal{R}\!\downarrow$, можно написать

$$
\begin{aligned}
\tau(x \oplus y) &= T(x + y) = Tx + Ty = \tau(x) \oplus \tau(y) \quad (x, y \in G),\\
\tau(\lambda^\wedge \odot x) &= T(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot Tx = \lambda^\wedge \odot \tau(x) \quad (x \in G, \lambda \in \mathbb{R}).
\end{aligned}
$$

Отсюда видно, что $[\![\tau : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ — $\mathbb{R}^\wedge$-линейная функция $]\!] = \mathbf{1}$, т. е. $[\![\tau \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}^\wedge}(\mathcal{R})]\!] = \mathbf{1}$. Если $\tau \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}^\wedge}(\mathcal{R})\!\downarrow$, то спуск $\tau\!\downarrow : G \to G$ — экстенсиональное отображение (см. 2.3). В точности те же соображения, что и выше, убеждают, что $\mathbb{R}^\wedge$-линейность τ внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ влечет линейность оператора $\tau\!\downarrow$. С учетом 3.2 заключаем, что $\tau\!\downarrow$ — нерасширяющий оператор. Теперь требуемое следует из 2.4. $\rhd$

3.4. В предложении 3.3 возникла следующая ситуация. В поле действительных чисел $\mathbb{R}$ рассматривается упорядоченное подполе $\mathbb{P} \subset \mathbb{R}$, содержащее $\mathbb{Q}$. Тем самым $\mathbb{R}$ является векторным пространством над полем $\mathbb{P}$ и имеет базис Гамеля, который обозначим символом $\mathcal{E}$. Множество всех $\mathbb{P}$-линейных функций в $\mathbb{R}$ обозначим символом $\mathrm{End}_{\mathbb{P}}(\mathbb{R})$. Для полноты приведем два хорошо известных факта.

(1) *Пусть $\mathbb{P}$ — плотное подполе поля $\mathbb{R}$. Общая форма $\mathbb{P}$-линейной функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дается формулой*

$$
f(x) = \sum_{e \in \mathcal{E}} x_e \phi(e), \quad x = \sum_{e \in \mathcal{E}} x_e e,
$$

где вторая формула — разложение x по базису Гамеля $\mathcal{E}$, а $\phi : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ — произвольная функция, принимающая лишь конечное число ненулевых значений.

$\lhd$ Выводится непосредственно из определения и свойств базиса Гамеля. $\rhd$

(2) *Произвольная $\mathbb{P}$-линейная функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ допускает представление $f(x) = cx$ $(x \in \mathbb{R})$ для некоторого $c \in \mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда она ограничена сверху или снизу на некотором интервале $]a, b[\subset \mathbb{R}$, $a < b$.*

$\lhd$ Необходимость очевидна. Для доказательства достаточности предположим, что функция f ограничена сверху числом M на интервале $]a, b[$. Тогда открытое множество $\{(s, t) \in \mathbb{R}^2 : a < s < b,\ M < t\}$ не имеет общих точек с графиком f, следовательно, график f не может быть плотным в $\mathbb{R}^2$. Но если функция f не допускает требуемого представления, то ее график плотен в $\mathbb{R}^2$. Это устанавливается точно также, как и для функционального уравнения Коши, см. [4, глава 2, теорема 3]. $\rhd$

3.5. Теперь приведем два следствия для нерасширяющих операторов, которые получаются булевозначной интерпретацией предложений 3.4 (1, 2).

(1) *Нерасширяющий оператор $T \in \mathrm{End}_N(G)$ порядково ограничен в том и только в том случае, когда он имеет представление $Tx = g \cdot x$ $(x \in G)$ для некоторого фиксированного $g := g_T \in G$.*

$\lhd$ Нужно лишь заметить, что подъем в 2.3 сохраняет свойство порядковой ограниченности, и применить 3.4 (2) внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. $\rhd$

(2) *Для того чтобы каждый нерасширяющий линейный оператор в $G := \mathcal{R}{\downarrow}$ был порядково ограниченным, необходимо и достаточно, чтобы $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})} \models \mathcal{R} = \mathbb{R}^{\wedge}$.*

$\lhd$ $\Leftarrow$: Если $\mathbb{R}^{\wedge}$ совпадает с полем действительных чисел $\mathcal{R}$ внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, то $\mathrm{End}_{\mathbb{R}^{\wedge}}(\mathcal{R}){\downarrow}$ — множество всех $\mathcal{R}$-линейных функций в $\mathcal{R}$. Но $\mathcal{R}$-линейная функция в $\mathcal{R}$ имеет вид $f(x) = cx$ $(x \in \mathcal{R})$, поэтому $\mathrm{End}_N(G)$ состоит из порядково ограниченных операторов согласно (1).

$\Rightarrow$: Если $\mathbb{R}^{\wedge} \neq \mathcal{R}$, то базис Гамеля $\mathcal{E}$ векторного пространства $\mathcal{R}$ над $\mathbb{R}^{\wedge}$ содержит хотя бы два различных элемента $e_1 \neq e_2$. Определив функцию $f_0 : \mathcal{E} \to \mathcal{R}$ так, чтобы $f_0(e_1)/e_1 \neq f_0(e_2)/e_2$, можно продолжить ее до $\mathbb{R}^{\wedge}$-линейной функции $f : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$, которая не может быть ограниченной в соответствии с 3.4 (2). Но тогда спуск доставляет нерасширяющий линейный оператор, который не будет порядково ограниченным, см. (1). $\rhd$

4. Локально одномерные K-пространства

В этом параграфе покажем, что A (1) $\leftrightarrow$ A (3). Как вспомогательное средство здесь вводится понятие локального базиса Гамеля.

4.1. Пусть G — расширенное K-пространство с фиксированной порядковой единицей $\mathbb{1}$. Элемент $e \in G_+$ именуют *локально постоянным относительно* $f \in G_+$, если $e = \sup_{\xi\in\Xi} \lambda_\xi \pi_\xi f$ для некоторого числового семейства $(\lambda_\xi)_{\xi\in\Xi}$ и семейства $(\pi_\xi)_{\xi\in\Xi}$ попарно дизъюнктных порядковых проекторов в G. Расширенное K-пространство G называют *локально одномерным*, если все элементы положительного конуса G_+ являются локально постоянными относительно $\mathbb{1}$. Как видно, G будет локально одномерным в том и только в том случае, когда все элементы G_+ локально постоянны относительно произвольной порядковой единицы $e \in G$. В самом деле, достаточность очевидна, а для обоснования необходимости нужно заметить, что для произвольного $x \in G_+$ можно выбрать разбиение единицы $(\pi_\xi)_{\xi\in\Xi}$ так, чтобы элементы $\pi_\xi x$ и $\pi_\xi e$ были ненулевыми кратными элемента $\pi_\xi \mathbb{1}$, если только $\pi_\xi x$ отличен от нуля. Но тогда $\pi_\xi x$ будет кратным элемента $\pi_\xi e$.

4.2. *Для того чтобы K-пространство $G := \mathcal{R}{\downarrow}$ было локально одномерно, необходимо и достаточно, чтобы $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})} \models \mathcal{R} = \mathbb{R}^{\wedge}$.*

$\lhd$ Равенство $[\![\mathcal{R} = \mathbb{R}^{\wedge}]\!] = \mathbf{1}$ имеет место в том и только в том случае, когда $\mathcal{R}{\downarrow} = \mathbb{R}^{\wedge}{\downarrow}$ (см. [8, 3.3.3]). Тем самым, нужно только убедиться, что локальная одномерность G равносильна равенству $G = \mathbb{R}^{\wedge}{\downarrow}$. Однако, согласно [8, 3.1.1] множество $\mathbb{R}^{\wedge}{\downarrow}$ состоит из всех перемешиваний вида $\mathrm{mix}_{t\in\mathbb{R}}(b_t t^{\wedge})$, где $(b_t)_{t\in\mathbb{R}}$ — произвольное разбиение единицы в $\mathbb{B}$. Отсюда с учетом структурных свойств расширенного K-пространства G (см. [8, 5.2.2 и 5.2.3]) вытекает, что равенство $G = \mathbb{R}^{\wedge}{\downarrow}$ равносильно возможности представления каждого элемента $x \in G$ в виде $o\text{-}\sum_{t\in\mathbb{R}^{\wedge}} t\chi(b_t)\mathbb{1}$ для подходящего разбиения единицы $(b_t)_{t\in\mathbb{R}^{\wedge}}$ в $\mathbb{B}$. Последнее же равносильно условию локальной одномерности G, так как полагая $\pi_t := \chi(b_t)$, указанное представление можно записать в виде

$$x = o\text{-}\sum_{t\in\mathbb{R}^{\wedge},\, t>0} t\pi_t\mathbb{1} + o\text{-}\sum_{t\in\mathbb{R}^{\wedge},\, t<0} t\pi_t\mathbb{1} = \sup_{t\in\mathbb{R}^{\wedge},\, t>0} t\pi_t\mathbb{1} - \sup_{t\in\mathbb{R}^{\wedge},\, t<0} (-t)\pi_t\mathbb{1},$$

причем $x^+ = \sup\{t\pi_t\mathbb{1} : t \in \mathbb{R}^\wedge,\ t > 0\}$ и $x^- = \sup\{-t\pi_t\mathbb{1} : t \in \mathbb{R}^\wedge,\ t < 0\}$. $\triangleright$

4.3. Итак, расширенное K-пространство $G = \mathcal{R}{\downarrow}$ локально одномерно лишь в том случае, когда $[\![$векторное пространство $\mathcal{R}$ над полем $\mathbb{R}^\wedge$ одномерно$]\!] = \mathbf{1}$. В этой связи интересно выяснить, какая конструкция в расширенном K-пространстве $G = \mathcal{R}{\downarrow}$ соответствует базису Гамеля векторного пространства $\mathcal{R}$ над полем $\mathbb{R}^\wedge$. Будем считать, что G наделено единственной мультипликативной структурой, при которой G — коммутативная упорядоченная алгебра с кольцевой единицей $\mathbb{1}$.

Будем говорить, что $x, y \in G$ различны на проекторе $\pi \in \mathfrak{P}(G)$, если для любого порядкового проектора $\rho \in \mathfrak{P}(G)$ равенство $\rho x = \rho y$ влечет $\pi\rho = 0$. Как видно, последнее равносильно соотношению $\pi(G) \subset |x - y|^{\perp\perp}$.

Подмножество $\mathcal{E} \subset G$ назовем *локально линейно независимым,* если для произвольного ненулевого порядкового проектора π в G, любых попарно различных на π элементов $e_1, \dots, e_n \in \mathcal{E}$ и чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ из условия $\pi(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n) = 0$ вытекает справедливость равенства $\lambda_k = 0$ для всех $k := 1, \dots, n$. Максимальное локально линейно независимое множество в G называют *локальным базисом Гамеля* K-пространства G.

В любом расширенном K-пространстве G существует локальный базис Гамеля.

$\triangleleft$ Достаточно применить лемму Куратовского — Цорна к упорядоченным по включению множествам всех локально линейно независимых множеств в G. $\triangleright$

4.4. *Пусть $G := \mathcal{R}{\downarrow}$, $\mathcal{E} \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ и $[\![\mathcal{E} \subset \mathcal{R}]\!] = \mathbf{1}$. Тогда $[\![\mathcal{E}$ — линейно независимое множество в векторном пространстве $\mathcal{R}$ над полем $\mathbb{R}^\wedge]\!] = \mathbf{1}$ в том и только в том случае, когда $\mathcal{E}{\downarrow}$ — локально линейно независимое множество в G.*

$\triangleleft$ $\Leftarrow$ Положим $\mathcal{E}' := \mathcal{E}{\downarrow}$ и предположим, что $\mathcal{E}'$ — локально линейно независимое множество. Пусть для натурального n формула $\varphi(n, \tau, \sigma)$ формализует утверждение: τ и σ — отображения из n в $\mathbb{R}^\wedge$ и $\mathcal{E}$ соответственно, $\sigma(k) \neq \sigma(l)$ при различных k и l из n и $\sum_{k \in n} \tau(k)\sigma(l) = 0$. Обозначим через $\psi(n)$ формулу $(\forall\tau)(\forall\sigma)(\varphi(n, \tau, \sigma) \to (\forall k \in n)\tau(k)) = 0$. Тогда линейная независимость $\mathcal{E}$ внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ означает справедливость равенства

$$\mathbf{1} = [\![(\forall n \in \mathbb{N}^\wedge)\psi(n)]\!] = \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} [\![\psi(n^\wedge)]\!].$$

Итак, нужно показать, что для любого натурального $n \in \mathbb{N}$ имеет место равенство $[\![\psi(n^\wedge)]\!] = \mathbf{1}$. Вычисление булевых оценок с учетом структуры формулы ψ и правил [8, 2.3.8] приводит к следующей эквивалентной форме последнего равенства:

$$\bigwedge \Big\{ [\![(\forall k \in n^\wedge)\tau(k) = 0]\!] :\ \tau, \sigma \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})};\ [\![\varphi(n^\wedge, \tau, \sigma)]\!] = \mathbf{1} \Big\}.$$

Возьмем теперь произвольные $\tau, \sigma \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ и $n \in \mathbb{N}$, для которых $[\![\varphi(n^\wedge, \tau, \sigma)]\!] = \mathbf{1}$. Тогда $[\![\tau : n^\wedge \to \mathbb{R}^\wedge]\!] = \mathbf{1}$ и $[\![\sigma : n^\wedge \to \mathcal{E}]\!] = \mathbf{1}$, причем $[\![\sigma(k) \neq \sigma(l)$ при различных k и l из $n^\wedge$ и $\sum_{k \in n^\wedge} \tau(k)\sigma(l) = 0]\!] = \mathbf{1}$.

Пусть $t : n \to \mathbb{R}^\wedge{\downarrow}$ и $s : n \to \mathcal{E}'$ — модифицированные спуски τ и σ соответственно, см. [8, 3.5.5]. Тогда

$$\mathbf{1} = [\![(\forall k, l \in n^\wedge)(k \neq l \to \sigma(k) \neq \sigma(l)]\!] = \bigwedge_{\substack{k,l \in n \\ k \neq l}} [\![\sigma(k^\wedge) \neq \sigma(l^\wedge)]\!] = \bigwedge_{\substack{k,l \in n \\ k \neq l}} [\![s(k) \neq s(l)]\!],$$

стало быть, $s(k)$ и $s(l)$ различны на единичном проекторе при разных k и l. Кроме того,

$$\left[\!\!\left[\sum_{k=0}^{n-1} t(k)s(k) = 0 \right]\!\!\right] = \left[\!\!\left[\sum_{k \in n^\wedge} \tau(k)\sigma(k) = 0 \right]\!\!\right] = \mathbf{1},$$

поэтому $\sum_{k=0}^{n-1} t(k)s(k)=0$. Так как $t(k)\in\mathbb{R}^\wedge{\downarrow}$ для всех $k\in n$, то существует разбиение единицы $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$ в $\mathbb{B}$ и для каждого $k\in n$ существует числовое семейство $(\lambda_{\xi,k})_{\xi\in\Xi}$ такие, что

$$t(k)=o\text{-}\sum_{\xi\in\Xi}\lambda_{\xi,k}\chi(b_\xi)\mathbb{1}\quad (k:=0,1,\dots,n-1).$$

Подставляя эти выражения в равенство $\sum_{k-0}^{n-1} t(k)s(k)=0$, получим

$$0=\sum_{k=0}^{n-1}\left(o\text{-}\sum_{\xi\in\Xi}\lambda_{\xi,k}\chi(b_\xi)\mathbb{1}\right)s(k)=o\text{-}\sum_{\xi\in\Xi}\chi(b_\xi)\sum_{k=0}^{n-1}\lambda_{\xi,k}s(k).$$

Итак, $\chi(b_\xi)\sum_{k=0}^{n-1}\lambda_{\xi,k}s(k)=0$ и, так как $s(k)$ и $s(l)$ различны на проекторе $\chi(b_\xi)$ при различных $k,l\in n$, то по определению локальной линейной независимости будет $\lambda_{\xi,k}=0$ $(k=0,1,\dots,n-1)$. Тем самым, $t(k)=0$ $(k=0,1,\dots,n-1)$, следовательно,

$$\mathbf{1}=\bigwedge_{k\in n}[\![t(k)=0]\!]=\bigwedge_{k\in n}[\![\tau(k^\wedge)=0]\!]=[\![(\forall k\in n^\wedge)\tau(k)=0]\!],$$

что и требовалось.

$\Rightarrow$ Пусть $[\![\mathcal{E}$ — $\mathbb{R}^\wedge$-линейно независимое множество в $\mathcal{R}]\!]=\mathbf{1}$. Рассмотрим функции $t:n\to\mathbb{R}$ и $s:n\to\mathcal{E}'$, а также их модифицированные подъемы $\tau,\sigma\in\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, см. [8, 3.5.5]. Тогда $[\![\tau:n^\wedge\to\mathbb{R}^\wedge]\!]=\mathbf{1}$ и $[\![\sigma:n^\wedge\to\mathcal{E}]\!]=\mathbf{1}$, причем t и s служат модифицированными спусками τ и σ соответственно. Внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ выполнена формула

$$(\forall k,l\in n^\wedge)\sigma(k)\neq\sigma(l)\wedge\sum_{k\in n^\wedge}\tau(k^\wedge)\sigma(k^\wedge)=0\ \to\ (\forall k\in n^\wedge)\tau(k)=0.$$

Подсчет булевой оценки этой формулы дает

$$b':=\bigwedge_{\substack{k,l\in n,\\ k\neq l}}[\![s(k)\neq s(l)]\!]\wedge\left[\!\!\left[\sum_{k=1}^{n}t(k)s(k)=0\right]\!\!\right]\leqslant\bigwedge_{k=0}^{n-1}[\![t(k)=0]\!].$$

Теперь если $\pi\sum_{k=0}^{n-1}t(k)s(k)=0$, причем $s(k)$ и $s(l)$ различны на проекторе π при различных $k,l\in n$, то согласно 2.2 будет $\pi\leqslant\chi(b')$, и вновь по 2.2 $\pi t(k)=0$ для всех $k\in n$. Так как $\pi\neq 0$, то $t(k)=0$ $(k=0,\dots,n-1)$. Тем самым, $\mathcal{E}'$ — локально линейно независимое множество в G. $\rhd$

4.5. *Если множество $\mathcal{E}_0\subset G$ локально линейно независимо, то $\mathcal{E}:=\mathcal{E}_0{\uparrow}$ будет $\mathbb{R}^\wedge$-линейно независимым множеством в $\mathcal{R}$.*

$\lhd$ Согласно 4.4 достаточно доказать, что множество $\mathcal{E}_0':=\mathrm{mix}(\mathcal{E}_0)=\mathcal{E}{\downarrow}=\mathcal{E}_0{\uparrow}{\downarrow}$ локально линейно независимо. Возьмем ненулевой порядковый проектор π в G, попарно различные на π элементы $e_1,\dots,e_n\in\mathcal{E}'$ и числа $\lambda_1,\dots,\lambda_n\in\mathbb{R}$, удовлетворяющие условию $\pi(\lambda_1e_1+\dots+\lambda_ne_n)=0$. Существует разбиение единицы (b_ξ) в $\mathbb{B}$ и семейства $(g_{\xi,k})\subset\mathcal{E}_0$, для которых $e_k=o\text{-}\sum_\xi\chi(b_\xi)g_{\xi,k}$. Ясно, что $\rho:=\pi\chi(b_\eta)\neq 0$ для некоторого индекса η. Элементы $g_{\eta,1},\cdots,g_{\eta,n}$ попарно различны на проекторе ρ и $\rho(\lambda_1g_{\eta,1}+\dots+\lambda_ng_{\eta,n})=0$. В силу локально линейной независимости $\mathcal{E}_0$ получаем $\lambda_1=\dots=\lambda_n=0$. $\rhd$

4.6. (1) *Пусть $G:=\mathcal{R}{\downarrow}$, $\mathcal{E}\in\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ и $[\![\mathcal{E}\subset\mathcal{R}]\!]=\mathbf{1}$. Тогда $[\![\mathcal{E}$ — базис Гамеля векторного пространства $\mathcal{R}$ над полем $\mathbb{R}^\wedge]\!]=\mathbf{1}$ в том и только в том случае, когда $\mathcal{E}{\downarrow}$ — локальный базис Гамеля в G.*

$\lhd$ Следует из 4.4 и 4.5. $\rhd$

(2) Расширенное K-пространство G будет локально одномерным тогда и только тогда, когда $\{\mathbb{1}\}$ — локальный базис Гамеля в G.

$\lhd$ Следует из 4.2 и (1). $\rhd$

4.7. Понятие локального базиса Гамеля, введенное в [15], отличается от рассматриваемого в этой работе и соответствует интерпретации множества $\mathcal{E}\cup\{0\}$, где $[\![\mathcal{E}$ — базис Гамеля векторного пространства $\mathcal{R}$ над полем $\mathbb{R}^{\wedge}]\!] = \mathbf{1}$. Кроме того, определение локального базиса Гамеля из [15] и [7] некорректно.

5. Дедекиндовы сечения и цепные дроби в булевозначной модели

В этом параграфе покажем, что A (1) $\leftrightarrow$ A (2). Для этого необходимо выяснить, как ведут себя дедекиндовы сечения и цепные дроби в булевозначной модели.

5.1. *Для любых двух множеств $a\subset\mathbb{Q}$ и $\bar a\subset\mathbb{Q}$ имеет место эквивалентность*

$$(a,\bar a)\ \text{— дедекиндово сечение} \leftrightarrow [\![(a^{\wedge},\bar a^{\wedge})\ \text{— дедекиндово сечение}]\!] = \mathbf{1}.$$

$\lhd$ В самом деле, формула $\varphi(a,\bar a,\mathbb{Q})$, утверждающая, что множества $a\subset\mathbb{Q}$ и $\bar a\subset\mathbb{Q}$ образуют сечение, ограничена, поэтому можно применить ограниченный принцип переноса. $\rhd$

5.2. *Если булева алгебра $\mathbb{B}$ σ-дистрибутивна, то $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}\models\mathcal{R}\subset\mathbb{R}^{\wedge}$.*

$\lhd$ Заметим, что это как раз означает, что A (2) $\to$ A (1). Допустим, что булева алгебра $\mathbb{B}$ σ-дистрибутивна. Тогда по 2.8 (3) $\mathcal{P}(\omega^{\wedge}) = \mathcal{P}(\omega)^{\wedge}$. Согласно 2.5 (3), верно также $\mathcal{P}(\mathbb{Q}^{\wedge}) = \mathcal{P}(\mathbb{Q})^{\wedge}$. Для обоснования требуемого включения нужно лишь показать, что если $[\![t\in\mathcal{R}]\!] = \mathbf{1}$, то $[\![t\in\mathbb{R}^{\wedge}]\!] = \mathbf{1}$. Пусть $[\![t\in\mathcal{R}]\!] = \mathbf{1}$, т. е. t — дедекиндово сечение внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. Тогда внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ справедлива формула:

$$(\exists a\in\mathcal{P}(\mathbb{Q}^{\wedge}))(\exists\bar a\in\mathcal{P}(\mathbb{Q}^{\wedge}))\varphi(a,\bar a,\mathbb{Q}^{\wedge})\wedge t=(a,\bar a),$$

где φ — то же, что и в 5.1. Вычисление булевой оценки этой формулы с учетом отмеченного выше соотношения $\mathcal{P}(\mathbb{Q}^{\wedge}) = \mathcal{P}(\mathbb{Q})^{\wedge}$ дает

$$\mathbf{1} = \bigvee_{a\subset\mathbb{Q}}\bigvee_{\bar a\subset\mathbb{Q}}[\![\varphi(a^{\wedge},\bar a^{\wedge},\mathbb{Q}^{\wedge})]\!]\wedge[\![t=(a,\bar a)^{\wedge}]\!].$$

Подберем разбиение единицы $(b_\xi)\subset\mathbb{B}$ и два семейства (a_ξ) и $(\bar a_\xi)$ в $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$ так, чтобы

$$b_\xi\leqslant[\![\varphi(a_\xi^{\wedge},\bar a_\xi^{\wedge},\mathbb{Q}^{\wedge})]\!]\wedge[\![t=(a_\xi,\bar a_\xi)^{\wedge}]\!].$$

Отсюда следует, что $t = \operatorname{mix}_\xi b_\xi(a_\xi,\bar a_\xi)^{\wedge}$, причем $b_\xi\leqslant[\![\varphi(a_\xi^{\wedge},\bar a_\xi^{\wedge},\mathbb{Q}^{\wedge})]\!]$. Если $b_\xi\neq\mathbf{0}$, то $[\![\varphi(a_\xi^{\wedge},\bar a_\xi^{\wedge},\mathbb{Q}^{\wedge})]\!] = \mathbf{1}$, так как для ограниченной формулы $\psi(x_1,\dots,x_n)$ оценка $[\![\psi(x_1^{\wedge},\dots,x_n^{\wedge})]\!]$ принимает лишь два значения $\mathbf{0}$ и $\mathbf{1}$ в силу правил преобразования булевых оценок относительно полных булевых гомоморфизмов [8, 2.2.3 (2)]. Согласно ограниченному принципу переноса [8, 2.2.9] справедлива $\varphi(a_\xi,\bar a_\xi,\mathbb{Q})$, т. е. $(a_\xi,\bar a_\xi)$ — дедекиндово сечение. Теперь ясно, что $b_\xi\leqslant[\![t=(a_\xi,\bar a_\xi)^{\wedge}\in\mathbb{R}^{\wedge}]\!]$, поэтому $[\![t\in\mathbb{R}^{\wedge}]\!] = \mathbf{1}$. $\rhd$

5.3. Теперь докажем импликацию A (1) $\to$ A (2). Воспользуемся разложением числа в цепную дробь. Положим

$$\mathbb{I}:=\{t\in\mathbb{R}:\ 0<t<1,\ t\ \text{иррационально}\},$$
$$\mathcal{I}:=\{t\in\mathcal{R}:\ 0<t<1,\ t\ \text{иррационально}\}.$$

Известно, что существует биекция $\lambda : \mathbb{I} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, которая сопоставляет числу t последовательность неполных частных $\lambda(t) = a : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ его разложения в цепную дробь:

$$t = \cfrac{1}{a(1) + \cfrac{1}{a(2) + \cfrac{1}{a(3) + \ldots}}}.$$

Для последовательностей $a : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ и $s : \mathbb{N} \to \mathbb{I}$ рассмотрим ограниченную формулу $\varphi(a, s, t, \mathbb{N})$, утверждающую, что $s(1) = t^{-1}$ и при всех $n \in \mathbb{N}$ имеют место соотношения

$$a(n) = \left[\frac{1}{s(n)}\right], \quad s(n+1) = \frac{1}{s(n)} - a(n),$$

где $[\alpha]$ — целая часть числа $0 < \alpha \in \mathbb{R}$, выражаемая ограниченной формулой $\psi(\alpha, [\alpha], \mathbb{N})$:

$$[\alpha] \in \mathbb{N} \wedge [\alpha] \leqslant \alpha \wedge (\forall n \in \mathbb{N})(n \leqslant \alpha \to n \leqslant [\alpha]).$$

Тогда равенство $\lambda(t) = a$ означает существование последовательности $s : \mathbb{N} \to \mathbb{I}$, для которой выполняется $\varphi(a, s, t, \mathbb{N})$. Биекцию λ назовем *разложением в цепную дробь.* По принципу переноса внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ существует разложение в цепную дробь $\widetilde{\lambda} : \mathcal{I} \to (\aleph_0)^{\aleph_0}$.

5.4. *Ограничение $\widetilde{\lambda}$ на $\mathbb{I}^\wedge$ совпадает с $\lambda^\wedge$, т. е. $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})} \models (\forall t \in \mathbb{I}^\wedge)\widetilde{\lambda}(t) = \lambda^\wedge(t)$.*

$\lhd$ Требуемое верно лишь тогда, когда для каждого $t \in \mathbb{I}$ справедливо $\widetilde{\lambda}(t^\wedge) = \lambda(t)^\wedge$. В силу данного выше определения биекции $\widetilde{\lambda}$ нужно обосновать справедливость внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ формулы: $(\exists s \in \mathcal{I}^{\mathbb{N}^\wedge})\varphi(\lambda(t)^\wedge, s, t^\wedge, \mathbb{N}^\wedge)$.

По определению λ существует последовательность $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{I}$, для которой выполнено $\varphi(\lambda(t), \sigma, t, \mathbb{N})$. Ввиду ограниченности формулы φ выполняется также $\mathbf{1} = [\![\varphi(\lambda(t)^\wedge, \sigma^\wedge, t^\wedge, \mathbb{N}^\wedge)]\!]$. Заметим, что $\sigma^\wedge : \mathbb{N}^\wedge \to \mathbb{I}^\wedge \subset \mathcal{I}$, т. е. $[\![\sigma^\wedge \in \mathcal{I}^{\mathbb{N}^\wedge}]\!] = \mathbf{1}$. Суммируя сказанное, можем написать

$$[\![(\exists s \in \mathcal{I}^{\mathbb{N}^\wedge})\varphi(\lambda(t)^\wedge, s, t^\wedge, \mathbb{N}^\wedge)]\!] \geqslant [\![\varphi(\lambda(t)^\wedge, \sigma^\wedge, t^\wedge, \mathbb{N}^\wedge)]\!] = \mathbf{1}. \ \rhd$$

5.5. *Если $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})} \models \mathcal{R} = \mathbb{R}^\wedge$, то булева алгебра $\mathbb{B}$ σ-дистрибутивна.*

$\lhd$ В силу нашего предположения внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ выполняется $\mathcal{I} = \mathbb{I}^\wedge$. Таким образом, $\widetilde{\lambda}$ и $\lambda^\wedge$ — биекции, $\widetilde{\lambda}$ продолжает $\lambda^\wedge$ и образы у них совпадают. Ясно, что тогда совпадают и области определения (и вообще $\widetilde{\lambda} = \lambda^\wedge$), поэтому $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^\wedge = (\mathbb{N}^\wedge)^{\mathbb{N}^\wedge}$. Отсюда в силу 2.8 вытекает σ-дистрибутивность $\mathbb{B}$. $\rhd$

6. Заключительные замечания

Итак, утверждение теоремы А сводится к простым свойствам действительных чисел и кардиналов. Но даже тем, кто свободно владеет техникой (спусков и подъемов) булевозначного анализа, приведенное доказательство может показаться громоздким по сравнению со стандартным доказательством, содержащимся в работах Ю. А. Абрамовича, А. И. Векслера и А. В. Колдунова [2], П. Т. Н. Макполина и Э. В. Викстеда [15], А. Е. Гутмана [13]. Однако смысл изложенного выше не в упрощении имеющегося в этих работах доказательства, а в том, что булевозначный взгляд на задачу обнаруживает новые взаимосвязи. Об этом еще несколько замечаний.

6.1. Так как внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ пространство $\mathbb{R}^\wedge$-линейных функций в $\mathcal{R}$ допускает полное описание (см. 3.4 (1)), использующее базис Гамеля, то и пространство $\mathrm{End}_N(\mathcal{R}{\downarrow})$ может быть полностью описано с использованием строгого локального базиса Гамеля. Однако при этом возникнут некоторые проблемы с однозначностью.

6.2. Размерность $\delta(\mathcal{R})$ векторного пространства $\mathcal{R}$ над полем $\mathbb{R}^{\wedge}$ представляет собой кардинал внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. Объект $\delta(\mathcal{R})$ содержит важную информацию о связи булевой алгебры $\mathbb{B}$ и множества действительных чисел $\mathbb{R}$. Ввиду свойств булевозначных ординалов имеет место представление $\delta(\mathcal{R}) = \mathrm{mix}_\xi\, b_\xi \alpha_\xi^{\wedge}$, где (b_ξ) — разбиение единицы в булевой алгебре $\mathbb{B}$, а (α_ξ) — некоторое семейство стандартных кардиналов. Это представление — своего рода «декомпозиционный ряд» булевой алгебры $\mathbb{B}$, причем главные идеалы $[\mathbf{0}, b_\xi]$ «α_ξ-однородны» в определенном смысле.

6.3. Если класс линейных нерасширяющих операторов заменить на класс аддитивных нерасширяющих операторов, то эквивалентность А (1) $\leftrightarrow$ А (4) в теореме А уже не выполняется. Более того, в любом расширенном K-пространстве существуют нерасширяющие аддитивные неограниченные операторы. Это связано с тем, что ни в какой булевозначной модели неверно $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})} \models \mathcal{R} = \mathbb{Q}^{\wedge}$.

6.4. Свойство функции λ, установленное в 5.4, принято называть *абсолютной определимостью.* Е. И. Гордон [5] называет непрерывную функцию абсолютно определимой, если она обладает аналогичным свойством. Абсолютно определимыми являются функции e^x, $\ln x$, $\sin x$, $\cos x$. В частности, эти же функции существуют внутри булевозначного универсума, как функции из $\mathcal{R}$ в $\mathcal{R}$ и служат продолжениями по непрерывности соответствующих функций $\exp^{\wedge}(\cdot)$, $\ln^{\wedge}(\cdot)$, $\sin^{\wedge}(\cdot)$ и $\cos^{\wedge}(\cdot)$, действующих из $\mathbb{R}^{\wedge}$ в $\mathbb{R}^{\wedge}$. Практически все функции, имеющие конструктивное определение, абсолютно определимы.

6.5. Рассмотрим нерасширяющий оператор $S : \mathcal{R}{\downarrow} \to \mathcal{R}{\downarrow}$, удовлетворяющий экспоненциальному функциональному уравнению Коши $S(x+y) = S(x)S(y)$ для любых $x, y \in \mathcal{R}{\downarrow}$. Если, кроме того, S удовлетворяет условию $S(\lambda x) = S(x)^\lambda$ при любых $0 < \lambda \in \mathbb{R}$ и $x \in \mathcal{R}{\downarrow}$, то будем говорить, что оператор S *экспоненциален.* Если σ — подъем S, то σ экспоненциален внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, поэтому в классе функций, ограниченных сверху на ненулевом интервале, либо $\sigma = 0$, либо $\sigma(x) = e^{cx}$ $(x \in \mathcal{R})$ для некоторого $c \in \mathcal{R}$. Отсюда выводится, что условия А (1–4) теоремы А равносильны следующему:

А (5) *любой нерасширяющий экспоненциальный оператор в* $\mathbb{B}(\mathbb{R}) := \mathcal{R}{\downarrow}$ *порядково ограничен* (*и, следовательно, имеет вид* $S(x) = e^{cx}$ $(x \in \mathcal{R}{\downarrow})$ *при некотором* $c \in \mathcal{R}{\downarrow}$*, или тождественно равен нулю*).

6.6. Аналогичная ситуация возникает, если отображение S удовлетворяет логарифмическому функциональному уравнению Коши $S(xy) = S(x) + S(y)$ для любых $0 \ll x, y \in \mathcal{R}{\downarrow}$ и условию $S(x^\lambda) = \lambda S(x)$ при любых $\lambda \in \mathbb{R}$ и $x \gg 0$. (Соотношение $0 \ll x$ означает, что $0 \leqslant x$ и $x^{\perp\perp} = \mathcal{R}{\downarrow}$.) Такое отображение назовем *логарифмическим.* Тем самым, еще одно эквивалентное условие можно сформулировать так:

А (6) *любой нерасширяющий логарифмический оператор в* $\mathbb{B}(\mathbb{R}) := \mathcal{R}{\downarrow}$ *порядково ограничен* (*и, следовательно, имеет вид* $S(x) = c \ln x$ $(0 \ll x \in \mathcal{R}{\downarrow})$ *при некотором* $c \in \mathcal{R}{\downarrow}$.

6.7. Вместо разложения числа в цепную дробь в § 4 можно было бы использовать двоичное разложение. Но тогда пришлось бы строить биекцию $\mathcal{P}(\omega)$ на некоторое множество действительных чисел и пользоваться 2.8 (3) вместо 2.8 (2).

Литература

1. Абрамович Ю. А., Векслер А. И., Колдунов А. В. Операторы, сохраняющие дизъюнктность // Докл. АН СССР.—1979.—Т. 248, № 5.—С. 1033–1036.

2. Абрамович Ю. А., Векслер А. И., Колдунов А. В. Операторы, сохраняющие дизъюнктность, их непрерывность и мультипликативное представление // Линейные операторы и их приложения: Межвуз. сб. науч. тр.—Л.: ЛГПИ, 1981.—С. 3–34.
3. Вулих Б. З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств.—М.: ГИФМЛ, 1961.—407 с.
4. Ацел Я., Домбр Ж. Функциональные уравнения с несколькими переменными.—М.: Физматлит, 2003.—432 с.
5. Гордон Е. И. Элементы булевозначного анализа.—Горький: Изд-во Горьк. ун-та, 1991.—91 с.
6. Гутман А. Е. Банаховы расслоения в теории решеточно нормированных пространств // Линейные операторы, согласованные с порядком.—Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 1995.—С. 63–211.
7. Кусраев А. Г. Мажорируемые операторы.—М.: Наука, 2003.—619 с.
8. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Булевозначный анализ.—Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 1999.—383 с.; Англ. пер.: Dordrecht: Kluwer, 1999.—322 p.
9. Сикорский Р. Булевы алгебры.—М.: Мир, 1969.—375 с.
10. Aliprantis C. D., Burkinshaw O. Positive Operators.—New York: Acad. press, 1985.—xvi, 367 p.
11. Abramovich Yu. A., Wickstead A. W. The regularity of order bounded operators into $C(K)$. II // Quart. J. Math. Oxford. Ser. 2.—1993.—V. 44.—P. 257–270.
12. Bell J. L. Boolean-valued Models and Independence Proofs in Set Theory.—New York etc.: Clarendon press, 1985.—xx, 165 p.
13. Gutman A. E. Locally one-dimensional K-spaces and σ-distributive Boolean algebras // Siberian Adv. Math.—1995.—V. 5, № 2.—P. 99–121.
14. Gutman A. E. Disjointness preserving operators // Vector Lattices and Integral Operators / Ed. S. S. Kutateladze.—Dordrecht etc.: Kluwer, 1996.—P. 361–454.
15. McPolin P. T. N., Wickstead A. W. The order boundedness of band preserving operators on uniformly complete vector lattices // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.—1985.—V. 97, № 3.—P. 481–487.
16. Wickstead A. W. Representation and duality of multiplication operators on Archimedean Riesz spaces // Compositio Math.—1977.—V. 35, № 3.—P. 225–238.

Статья поступила 16 августа 2004 г.

Кусраев Анатолий Георгиевич, д. ф.-м. н.
г. Владикавказ, Институт прикладной математики
и информатики ВНЦ РАН
E-mail: `kusraev@alanianet.ru`