Владикавказский математический журнал
Апрель–июнь, 2004, Том 6, Выпуск 2

УДК **515.174.5**

КОММУТАТИВНАЯ АЛГЕБРА СКАЛЯРНЫХ КВАТЕРНИОНОВ

А. В. Смирнов

Рассмотрены гиперкомплексные числа образующие четырехмерное пространство полностью скалярных кватернионов. Соответствующая дополнительная алгебра построена в качестве невекторного расширения над полем комплексных чисел. Подобно обычным комплексным числам эта коммутативная алгебра 4-го ранга обладает свойствами деления, сопряжения, извлечения корня и факторизации наряду с прямым аналогом формулы Эйлера. Показано, что вращения представимы в этой алгебре без нарушения коммутативности. Некоторые из непосредственных приложений включают физику пучков, ускорителей и теорию волн.

1. Введение

Обычный кватернион был введен как векторное расширение над полем комплексных чисел [1, 2]. Его векторная часть представляет из себя обобщенную мнимую часть и образует трехмерное кватернион-векторное пространство. Хотя кватернионы и не входят в стандартный математический аппарат, они нашли многочисленные применения в вычислительной математике (например, обработка изображений) и многих областях физики включая специальную теорию относительности и оптику, теории элементарных частиц и астрофизику, теорию поля и механику. Например, в физике пучков заряженных частиц кватернионы весьма эффективны в решении проблемы транспортировки спина [3, 4].

Нередко в аналитических исследованиях и моделях мы сталкиваемся с выражениями, содержащими как комплексные числа, так и (2×2)-матрицы. Матричное представление, однако, может иметь и более удобные альтернативы. Квантовая механика, к примеру, может быть элегантно сформулирована с помощью геометрической алгебры. В некоторых других ситуациях более удобно иметь дело с преобразованиями полностью скалярных выражений, чем с традиционными кватернионами — носителями векторных свойств. В общем случае могут встречаться также и комплексные функции. Соответствующие практические случаи включают, например, анализ собственных мод некоторых граничных задач [5, 6], транспортировку пучка заряженных частиц и его динамику в ускорителях [7] и вакуумных электронных приборах [8, 9]. Можно предположить, что пространство псевдоскалярных чисел может неявно включать и элементарные матричные преобразования через расширенные свойства скалярных кватернионов. Это пространство суть объединение двух независимых полей обычных комплексных чисел (ассоциированных, например, с временной и пространственными координатами).

Л. Левин фактически одним из первых применил скалярные гиперкомплексные величины для анализа электромагнитных волн распространяющихся в различных волноводных структурах [6]: с диэлектриком и намагниченным ферритом, поверхностной анизотропией и гофрами. Он ввел феноменологически дополнительную мнимую единицу (см. (1.1)) чтобы различить комплексные числа, отвечающие за различные свойства временной переменной (и/либо продольной фазовой координаты) — с одной стороны, и пространственных (либо поперечных/угловых) переменных — с другой стороны. Соответствующие мнимые единицы образуют коммутативную группу:

$$i^2 = -1,\ j^2 = -1,\ ij = ji \neq -1 \text{ или } \sqrt{-1}. \tag{1.1}$$

Используя этот подход, Л. Левин получил компактное скалярное дисперсионное уравнение для нормальных мод с четырехкомпонентными комплексными числами. Дальнейшее развитие этого метода [10, 11] позволило строго охарактеризовать самосогласованную систему, в которой пучок взаимодействует с замедляющей структурой и соленоидальным полем. Было показано [10], что обычный матричный подход дает эквивалентное решение системы дисперсионных уравнений и приводит в конечном итоге к точно тем же значениям инкремента и порогового тока регенеративной поперечной неустойчивости «обрыва пучка». Однако использование скалярных кватернионов значительно упрощает выкладки и дает гораздо более прозрачное физическое решение. Например, коллективная частота $\tilde{\nu}$, найденная алгебраически из единственного гиперкомплексного дисперсионного уравнения, имеет четкий смысл своих компонентов: $\mathrm{Re}_i\,\mathrm{Re}_j\tilde{\nu}$ — расстройка коллективной частоты по отношению к собственной частоте; $\mathrm{Im}_i\,\mathrm{Im}_j\tilde{\nu}$ — угловая скорость вращения вырожденной коллективной дипольной моды; а $\mathrm{Im}_i\,\mathrm{Re}_j\tilde{\nu} \pm \mathrm{Im}_j\,\mathrm{Re}_i\tilde{\nu}$ дают инкременты право- и левополяризованных коллективных мод гиромагнитной неустойчивости. Заметим, что в работе [7] отсутствие дополнительной мнимой единицы привело к некорректному смешиванию между различными степенями свободы и ошибочному результату для порогового тока неустойчивости «обрыва пучка» в присутствии поперечного движения.

Коммутативная алгебра для соответствующих гиперкомплексных чисел была введена в [10] для приложений физики пучков и ускорителей. Она была определена как замкнутое обобщение над различными i- и j-полями комплексных чисел, которые образуют коммутативную алгебру 4-го ранга с делением и основными атрибутами обычных комплексных чисел. В этой статье мы приводим основные свойства и простейшее аналитическое продолжение. Мы подразумеваем эквивалентными такие термины как: «четырехкомпонентное число», «гиперкомплексное число» и «скалярный кватернион».

2. Элементарные свойства коммутативной алгебры четырехкомпонентных чисел

Выпишем четырехкомпонентное комплексное число, которое выглядит здесь идентичным обычному кватерниону:

$$\tilde{a} = \alpha_0 + i\alpha_1 + j\alpha_2 + ij\alpha_3, \tag{2.1}$$

где компоненты α_0, α_1, α_2, α_3 вещественны; i, j — независимые мнимые единицы, и ij — составная мнимая единица.

Мы рассматриваем в данной работе гиперкомплексные числа (1.1), (2.1) как обладающие коммутативностью и ассоциативностью, дистрибутивностью и замкнутостью по отношению к умножению и делению.

В частности, произведение двух простых комплексных чисел из различных i- и j-пространств образует скалярный кватернион:

$$(a + ib) \cdot (c + jd) = \alpha_0 + i\alpha_1 + j\alpha_2 + ij\alpha_3, \tag{2.2}$$

где $\alpha_0 = ac$, $\alpha_1 = bc$, $\alpha_2 = ad$, $\alpha_3 = bd$.

Можно рассматривать пространства обычных комплексных чисел как двухмерные проекции пространства гиперкомплексных чисел. Поэтому естественно переопределить операторы реальной и мнимой частей следующим образом:

$$\mathrm{Re}_i\,\tilde{a} = \alpha_0 + j\alpha_2,\ \mathrm{Im}_i\,\tilde{a} = \alpha_1 + j\alpha_3, \tag{2.3}$$

где индексы i и j обозначают соответствующее пространство-проекцию как область действия соответствующей операции.

Рассмотрим теперь матрицы Паули

$$\hat{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

как операторы действующие, например, только в j-пространстве. Тогда, полагая, что $\tilde{a}$ есть матрица-столбец $\begin{pmatrix} \mathrm{Re}_j\tilde{a} \\ \mathrm{Im}_j\tilde{a} \end{pmatrix}$, мы можем перейти к нашему псевдоскалярному пространству используя следующие правила подстановки:

$$\hat{\sigma}_1\tilde{a} \to j\tilde{a}^{*j}, \quad \hat{\sigma}_2\tilde{a} \to -\tilde{a}, \quad \hat{\sigma}_3\tilde{a} \to \tilde{a}^{*j}, \tag{2.4}$$

т. е. матричные операторы могут быть представлены формально как $\hat{\sigma}_1 \to j(\cdot)^{*j}$, $\hat{\sigma}_2 \to -1$, и $\hat{\sigma}_3 \to (\cdot)^{*j}$.

Подобно алгебре спиновых матриц из (2.4) мы имеем аналогичные соотношения:

$$\hat{\sigma}_1\hat{\sigma}_2\hat{\sigma}_3\hat{\sigma}_4\tilde{a} = \hat{\sigma}_1\hat{\sigma}_2\tilde{a} = -j\hat{\sigma}_3\tilde{a}; \quad \hat{\sigma}_2\hat{\sigma}_3\tilde{a} = -j\hat{\sigma}_1\tilde{a}; \quad \hat{\sigma}_3\hat{\sigma}_1\tilde{a} = -j\hat{\sigma}_2\tilde{a}.$$

Отличие заключается в том, что операторы (2.4) коммутативны в псевдоскалярном пространстве. Таким образом, произвольный матричный (2×2)-оператор $\hat{U}$ в j-пространстве может быть представлен, например, в таком виде:

$$\hat{U} \equiv \rho\hat{E} - j(\lambda\hat{\sigma}_1 + \mu\hat{\sigma}_2 + \nu\hat{\sigma}_3) \to \rho + j\mu + (\lambda - j\nu)(\cdot)^{*j},$$

где $\hat{E}$ — единичная (2×2)-матрица, $\rho^2+\lambda^2+\mu^2+\nu^2 = \det\hat{U}$, а ρ, λ, μ, ν — вещественные числа, описывающие связанный с j-пространством оператор $\hat{U}$.

Чтобы обобщить действие матричного (2×2)-оператора вместе с соответствующим представлением вращений на все (i,j)-гиперпространство мы можем заменить формально комплексную единицу j на i в $\hat{U}$ и $\hat{\sigma}_2$ (т. е. $\hat{\sigma}_2 \to ij$):

$$\hat{U} = \rho\hat{E} - i(\lambda\hat{\sigma}_1 + \mu\hat{\sigma}_2 + \nu\hat{\sigma}_3) \to \rho + j\mu - (ij\lambda + i\nu)(\cdot)^{*j}. \tag{2.5}$$

Если $\hat{U}$ унимодулярная матрица и $\rho^2+\lambda^2+\mu^2+\nu^2 = 1$, то (2.5) представляет вращения в четырехмерном (i,j)-пространстве.

Перед тем, как перейти к определению полной длины в этом гиперпространстве, определим частичный детерминант в каждом из пространств-проекций:

$$\det_i\tilde{a} = (\mathrm{Re}_i\tilde{a})^2 + (\mathrm{Im}_i\tilde{a})^2 = \tilde{a}\cdot\tilde{a}^{i*} \equiv |\tilde{a}|_i^2 = \alpha_0^2 + \alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2 + 2j(\alpha_0\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3). \tag{2.6}$$

Из правила коммутативности (1.1) и определений (2.1), (2.3), (2.6) вытекают следующие очевидные тождества:

$$\begin{aligned}
&\tilde a\cdot\tilde b=\tilde b\cdot\tilde a,\\
&\mathrm{Re}_i\mathrm{Re}_j\tilde a=\mathrm{Re}_j\mathrm{Re}_i\tilde a=\alpha_0\equiv\mathrm{Re}_{ij}\tilde a=\mathrm{Re}_{ji}\tilde a\equiv\mathrm{Re}\tilde a,\\
&\mathrm{Im}_i\mathrm{Re}_j\tilde a=\mathrm{Re}_j\mathrm{Im}_i\tilde a=\alpha_1,\\
&\mathrm{Im}_i\mathrm{Im}_j\tilde a=\mathrm{Im}_j\mathrm{Im}_i\tilde a=\alpha_3\equiv\mathrm{Im}_{ij}\tilde a=\mathrm{Im}_{ji}\tilde a\equiv\mathrm{Im}\tilde a,\\
&(\tilde a^{*i})^{*j}\equiv\tilde a^{*i*j}=\tilde a^{*j*i}\equiv(\tilde a^{*j})^{*i}=\alpha_0-i\alpha_1-j\alpha_1+ij\alpha_3,\\
&\tilde a+\tilde a^{*i}=2\mathrm{Re}_i\tilde a,\quad \tilde a-\tilde a^{*i}=2i\mathrm{Im}_i\mathrm{Re}_j\tilde a+2j\mathrm{Re}_i\mathrm{Im}_j\mathrm{Re}_i\tilde a,\\
&(\tilde a+\tilde a^{*i*j})+C.C._i=(\tilde a+\tilde a^{*i*j})+C.C._j=4\mathrm{Re}_i\mathrm{Re}_j\tilde a\equiv4\mathrm{Re}\tilde a,\\
&\det_i\det_j\tilde a\equiv\left||\tilde a|_j^2\right|_i^2=\left||\tilde a|_i^2\right|_j^2\equiv\det_j\det_i\tilde a.
\end{aligned}\tag{2.7}$$

Приведенные до сих пор правила и соотношения описывают простое скалярное объединение — суперпозицию двух полей комплексных чисел. Эти соотношения могут оказаться полезными для некоторых типичных задач за счет приведения к удобной алгебраической форме (например, в теориях волноводов [6], кильватерных полей [5], поляриметрии и аналитическом представлении магнитостатических полей [12]). Однако, чтобы построить полную алгебру гиперкомплексного пространства, она должна быть замкнута по отношению к операциям умножения и деления, возведения в степень и извлечения корня.

Для этого мы постулируем дополнительные к (1.1) правила:

$$ij=ji\neq\pm1,\quad i\cdot ij=-j,\quad ji\cdot j=-i,\quad i^2j^2=(ji)^2=1.\tag{2.8}$$

Остальные свойства скалярных кватернионов и соответствующие функциональные аналитические продолжения могут быть выведены из (1.1, 2.8) подобно теории обычных комплексных чисел. Например, нетрудно видеть, что:

$$1/ij=ij;\quad\sqrt{1}=\pm1,\ \pm ij;\quad ij=\exp(\pm(i+j)\pi/2),\tag{2.9}$$

т. е. в этой алгебре 4-го ранга квадратный корень имеет четыре значения.
Другой пример — правило умножения гиперкомплексных чисел $\tilde a$ и $\tilde b=\beta_0+i\beta_1+j\beta_2+ij\beta_3$:

$$\begin{aligned}\tilde a\cdot\tilde b=\alpha_0\beta_0+\alpha_3\beta_3-\alpha_1\beta_1-\alpha_2\beta_2+i(\alpha_1\beta_0+\alpha_0\beta_1-\alpha_3\beta_3-\alpha_2\beta_3)&\\
+j(\alpha_2\beta_0+\alpha_0\beta_2-\alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_3)+ij(\alpha_3\beta_0+\alpha_2\beta_1+\alpha_1\beta_2+\alpha_0\beta_3).&\end{aligned}$$

3. Сопряжение и абсолютное значение, деление и гиперполюса

Определим полное сопряжение как расширение, построенное на частичных сопряжениях:

$$\tilde a^*=\tilde a^{*i}\tilde a^{*j}\tilde a^{*i*j}.\tag{3.1}$$

Приведем здесь дополнительно несколько полезных тождеств и неравенств для сопряженных чисел и их компонент:

$$\tilde a+\tilde a^{*i}\tilde a^{*j}+\tilde a^{*i*j}=4\mathrm{Re}_i\,\mathrm{Re}_j\tilde a,$$

$$\tilde{a}^{*i*j}\tilde{a} = \alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 2ij(\alpha_3\alpha_3 - \alpha_1\alpha_1), \tag{3.2}$$
$$\tilde{a} + \tilde{a}^{*i*j} \neq 2\mathrm{Re}\,\tilde{a}, \quad \tilde{a} + \tilde{a}^* \neq 2\mathrm{Re}\,\tilde{a}.$$

Естественный способ определить полный детерминант (определитель) через частичные детерминанты (2.6):

$$\begin{aligned}\det\tilde{a} = \det_i\det_j\tilde{a} \equiv \left||\tilde{a}|_j^2\right|_i^2 \equiv \tilde{a}\tilde{a}^{*i}\tilde{a}^{*j}\tilde{a}^{*i*j} = \tilde{a}\cdot\tilde{a}^*\\ = (\alpha_0^2 + \alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2)^2 + 4(\alpha_0\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3)^2.\end{aligned} \tag{3.3}$$

Можно заметить, что определитель (3.3) может обращаться в нуль для некоторых ненулевых компонент α_n. Мы будем называть соответствующие числа полюсами (гиперполюсами или гипернулями). Мы имеем дело с таким полюсом, например, когда $|\alpha_0| = |\alpha_3| \neq 0$ при $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, либо когда $|\alpha_1| = |\alpha_2| \neq 0$ при $\alpha_0 = \alpha_3 = 0$.

В отличие от частичных детерминантов, полные детерминанты вещественны и неотрицательны. Поэтому мы определяем абсолютную величину (или норму) скалярного кватерниона через арифметический корень 4-го порядка:

$$|\tilde{a}| \equiv N(\tilde{a}) = \sqrt[4]{\det\tilde{a}} \equiv \sqrt[4]{\tilde{a}\tilde{a}^{*i}\tilde{a}^{*j}\tilde{a}^{*i*j}} = \sqrt[4]{\left||\tilde{a}|_j^2\right|_i^2}. \tag{3.4}$$

Заметим, что числа $i \pm j$, $1 \pm ij$ имеют нулевую норму (или гипердлину). Как мы увидим ниже, числа $2\pi(i \pm j)$ и $\pi(i \pm j)$ являются гиперпериодами для гиперболических функций $\mathrm{ch}(\tilde{x})$, $\mathrm{sh}(\tilde{x})$ и $\mathrm{th}(\tilde{x})$, $\mathrm{ctg}\,h(\tilde{x})$ так же, как $2\pi(1 \pm ij)$ и $\pi(1 \pm ij)$ являются гиперпериодами для тригонометрических функций $\cos(\tilde{x})$, $\sin(\tilde{x})$ и $\mathrm{tg}(\tilde{x})$, $\mathrm{ctg}(\tilde{x})$ соответственно.

Полный детерминант, введенный выше, можно использовать непосредственно для отыскания обратной величины гиперкомплексного числа с ненулевой нормой:

$$\tilde{a}^{-1} \equiv \frac{1}{\tilde{a}} = \frac{\tilde{a}^*}{\det\tilde{a}}. \tag{3.5}$$

Можно получить (3.5) и через последовательные преобразования в пространствах-проекциях, применяя соответствующие правила, приведенные выше:

$$\frac{1}{\tilde{a}} = \frac{\tilde{a}^{*j}}{|\tilde{a}|_j^2} \equiv \frac{\tilde{a}^{*i}}{|\tilde{a}|_i^2} \equiv \frac{\tilde{a}^{*i}}{\tilde{a}\cdot\tilde{a}^{*i}} = \frac{\tilde{a}^{*i}\cdot(\tilde{a}\tilde{a}^{*i})^{*j}}{\tilde{a}\tilde{a}^{*i}\cdot(\tilde{a}\tilde{a}^{*i})^{*j}} = \frac{\tilde{a}^{*i}\tilde{a}^{*j}\tilde{a}^{*i*j}}{\tilde{a}\tilde{a}^{*i}\tilde{a}^{*j}\tilde{a}^{*i*j}} = \frac{\tilde{a}^*}{|\tilde{a}|^4}.$$

Обращенные гипернули можно интерпретировать как гипербесконечности ij-алгебры.

4. Формула Эйлера, факторизация и извлечение корня

Перед тем как определить извлечение корня для произвольного скалярного кватерниона рассмотрим два частных случая.

Первый случай относится к произведению двух комплексных чисел $a + ib$ и $c + jd$ принадлежащих к i- и j-пространствам соответственно (см. (2.2)). Для такого гиперчисла мы имеем $\alpha_0\alpha_3 = \alpha_1\alpha_1$, т. е. соответствующая (2×2)-матрица, составленная из его компонентов α_0, α_1, α_1, α_3, вырождена.

Отметим, что этот простой случай соответствует матричному (2×2)-оператору (либо вращению), примененному к «плоскому» вектору (т. е. обычному комплексному числу) принадлежащему к i-пространству ($\mathrm{Im}_j = 0$). Действительно, из (3.3, 2.2) мы имеем $|\tilde{a}| = \sqrt{\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2} = \sqrt{a^2c^2 + b^2c^2 + a^2d^2 + b^2d^2}$, а из (2.5): $\hat{U} \to \rho - i\nu + j\mu - ij\lambda$, полагая кватернион $\{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ пропорциональным $\{\rho, -\nu, \mu, -\lambda\}$.

Очевидно, что в этом случае корень n-го порядка извлекается тривиально:

$$\sqrt[n]{\tilde{a}} = \sqrt[n]{(a+ib)\cdot(c+jd)} = \sqrt[n]{|\tilde{a}|}\exp\left[(i\operatorname{arctg} b/a + j\operatorname{arctg} d/c + 2\pi(ki+lj))/n\right], \tag{4.1}$$

где $k, l = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ натуральные числа.

Таким образом, период экспоненциальной функции в нашем гиперпространстве есть $2\pi(ki+lj)$. В общем случае это дает n^2 значений для $\sqrt[n]{\tilde{a}}$.

Другой интересный случай есть гиперкомплексное число, представленное лишь двумя компонентами: $\tilde{A} = a + ijd$. Из (2.8) и разложения Тейлора можно получить основную формулу экспоненциального представления такого числа:

$$\exp(ij\varphi) = \operatorname{ch}\varphi + ij\operatorname{sh}\varphi. \tag{4.2}$$

При $|d/a| \neq 1$ имеет место следующее представление:

$$\tilde{A} = a + ijd = |a^2 - d^2|\exp\left(ij\operatorname{arcth}\frac{d}{a}\right). \tag{4.3}$$

Заметим, что число $\operatorname{arcth} d/a$ вещественно при $|d/a| < 1$, в противном случае оно комплексно либо в i-, либо в j-пространстве. Существует и дополнительное, «симметричное» представление в (i, j)-пространстве при $|d/a| > 1$:

$$\tilde{A} = ij(d + ija) = ij|a^2 - d^2|\exp\left(ij\operatorname{arcth}\frac{a}{d}\right) = |a^2 - d^2|\exp\left((i+j)\frac{\pi}{2} + ij\operatorname{arcth}\frac{a}{d}\right). \tag{4.4}$$

Мы использовали в (4.4) следующее гиперкомплексное представление:

$$\operatorname{arcth} x \underset{|x|>1}{\longrightarrow} -(i+j)\frac{\pi}{2} + \operatorname{arcth}\frac{1}{x}, \tag{4.5}$$

которое есть гиперрасширение известной формулы $\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}\operatorname{sgn} x - \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$. Таким образом, область значений обратного гиперболического тангенса расширена в пространство скалярных кватернионов.

Используя (4.3) мы можем извлечь корень из простого двухкомпонентного кватерниона $\tilde{B} = \tilde{A}^2 = b + ijc$:

$$\sqrt[n]{\tilde{B}} = \sqrt[n]{|\tilde{B}|}\exp\left(\frac{2\pi(ki+lj)}{n} + \frac{1}{n}ij\operatorname{arcth}\left(\frac{c}{b}\right)\right), \tag{4.6}$$

где $|c/b| \neq 1$ и $k, l = \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

Предположив, что $\tilde{B} = \tilde{A}^2$, можно провести проверочное сравнение для $\tilde{A} \equiv a + ijd$ и $\sqrt{\tilde{B}}$. Подставляя в (4.6) $b = a^2 + d^2$ и $c = 2ad$ мы имеем:

$$\sqrt{\tilde{B}} = \pm|a^2 - d^2|\cdot\left(\operatorname{ch}\frac{\varphi}{2} + ij\operatorname{sh}\frac{\varphi}{2}\right), \quad \text{где} \quad \varphi = \operatorname{arcth}\left(\frac{2ad}{a^2+d^2}\right). \tag{4.7}$$

Простые преобразования гиперболических функций в (4.7) дают:

$$\sqrt{(a+ijd)^2} = \begin{pmatrix} \pm a \pm ijd \\ \pm d \pm ija \end{pmatrix}, \tag{4.8}$$

где различные комбинации знаков дают восемь значений для радикала $\sqrt{\tilde{b}}$. Однако только четыре из них линейно независимы в смысле (2.9), в то время как остальные получены путем умножения на ij.

В общем случае, когда $|\tilde{A}| \neq 0$, мы можем обобщить формулу Эйлера следующим образом:

$$\tilde{A} \equiv a + ib + jc + ijd = \exp(\alpha_0 + i\alpha_1 + j\alpha_1 + ij\alpha_3) \equiv \exp(\tilde{a}), \tag{4.9}$$

где соотношение между $\tilde{A}$ и $\tilde{a}$ может быть найдено из системы:

$$\alpha_0 = \ln\left|\tilde{A}\right| \quad \text{и} \quad \left\{\begin{array}{l} b_N = \sin\alpha_1 \cos\alpha_1 \operatorname{ch}\alpha_3 - \cos\alpha_1 \sin\alpha_1 \operatorname{sh}\alpha_3, \\ c_N = \cos\alpha_1 \sin\alpha_1 \operatorname{ch}\alpha_3 - \sin\alpha_1 \cos\alpha_1 \operatorname{sh}\alpha_3, \\ d_N = \sin\alpha_1 \sin\alpha_1 \operatorname{ch}\alpha_3, \end{array}\right. \tag{4.10}$$

где $b_N = b/|\tilde{A}|$, $c_N = c/|\tilde{A}|$ и $d_N = d/|\tilde{A}|$ являются нормализованными компонентами.

Подобно трехмерному вращению, представленному обычным кватернионом [1], (4.9)–(4.10) представляют вращение α_1, α_1, α_3 в псевдоскалярном гиперпространстве. Вырожденный случай (2.2), (4.1) можно интерпретировать по аналогии с подвесом Кардана (когда $\alpha_3 = 0$ в (4.9)).

Заметим, что в отличие от обычных комплексных чисел и случаев (2.2), (2.5), (4.1), нормализованные компоненты b_N, c_N, d_N в общем случае могут изменяться по всей вещественной области от $-\infty$ до $+\infty$.

Можно привести (4.10) к алгебраической системе двух неизвестных $\operatorname{tg}\alpha_1$ и $\operatorname{tg}\alpha_1$:

$$\left\{\begin{array}{l} \operatorname{tg}^2\alpha_1 - \operatorname{tg}^2\alpha_1 = \left(b_N^2 - c_N^2\right)\left(1 + \operatorname{tg}^2\alpha_1\right)\left(1 + \operatorname{tg}^2\alpha_2\right), \\ b_N \operatorname{tg}^2\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_1 + c_N \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}^2\alpha_1 = d_N\left(\operatorname{tg}^2\alpha_1 - \operatorname{tg}^2\alpha_2\right) \end{array}\right. \tag{4.11}$$

и

$$\alpha_3 = \ln(\sin(\alpha_1 + \alpha_2)/(c_N + b_N)). \tag{4.12}$$

Система (4.11) может быть решена в явном виде, однако полученные нами выражения символьными методами оказались чрезвычайно громоздкими, чтобы привести их здесь.

Чтобы обеспечить в (4.12) $\sin(\alpha_1 + \alpha_2)/(c_N + b_N) > 0$, можно всегда выбрать подходящие решения (4.11) в виде $\alpha_{1,2} + \pi m$ благодаря периодичности тангенса. При $b = -c$ формально мы имеем особенность в (4.12). Однако эта особенность устранима путем комплексного сопряжения (4.9)–(4.12) (в i- или j-пространстве) и применения сопряжения снова (в том же пространстве) к результату, полученному в правой части.

Для извлечения корня можно предложить и другой способ разложения скалярного кватерниона (2.2) на сомножители:

$$\alpha_0 + i\alpha_1 + j\alpha_1 + ij\alpha_3 = (a + ib)\cdot(c + jd)\cdot(e + ijf), \tag{4.13}$$

где a, b, c, d, e, f вещественны. Положим в (4.13) для простоты, что $\alpha_0 = 1 = a = c = e$. Тогда (4.13) приводит к следующей алгебраической системе:

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha_3 = bd(1 - bdf) + f, \\ \alpha_2 = d(1 - bdf) - bf, \\ \alpha_1 = b(1 - bdf) - df. \end{array}\right. \tag{4.14}$$

Решения $\{b, d, f\}$ системы (4.14) выражаются в явном виде гораздо более компактно, чем решение системы (4.11). Можно показать, что решения (4.14) существуют всегда и они вещественны. Для одного из решений существует особенность (например, при $\alpha_1 + \alpha_1\alpha_3 = 0$), которая является устранимой. Таким образом, скалярный ненулевой ($|\tilde{a}| \neq 0$) кватернион представим элементарными (комплексными) сомножителями и из него можно извлечь корень в соответствии с (4.13), (4.9), либо (4.1) или (4.6).

5. Обсуждение

Следующими шагами в разработке скалярных кватернионов могут стать гиперкомплексные функции, их дифференцирование и интегрирование, конформные отображения и аналитические продолжения функций комплексного переменного с расширением в рассмотренное здесь гиперпространство. Мы называем это пространство псевдоскалярным, так как оно сочетает представление вращений со свойствами комплексных чисел. Поэтому можно ожидать дальнейшего развития и новых приложений этой ij-алгебры, особенно в физике пучков, лазеров, плазмы, высоких энергий, а также космологии.

6. Благодарности

Автор выражает свою признательность проф. Г. В. Воскресенскому за критические обсуждения работы [10].

Литература

1. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике / Пер. с англ. под общ. ред. И. Г. Арамановича.—М.: Наука, 1974.—832 с.
2. Hamaker J. P. Understanding radio polarimetry // Astron. Astrophys. Suppl. Ser.—2000.—V. 143.—P. 515–534; http://aanda.u-strasbg.fr:2002/ articles/aas/ps/2000/09/h1201.ps.gz
3. Hoffstaetter G. H. Successive approximations for charged particle motion // In arXiv:physics / 0006008.—Jun 2000.—V. 1, № 5.
4. Heinemann K., Hoffstatter G. H. Official DESY Report // In Physical Review E, 54.—1996, 4240; 96-078.
5. Smirnov A. V. in Nuclear Instruments and Methods in Physics Research, NIM A, 469 (1) (2001) 21
6. Левин Л. Теория волноводов / Пер. с англ. под ред. Вольмана В. И.—М.: Радио и связь, 1981.—312 р.
7. Бурштейн Э. Л., Воскресенский Г. В. Ускорители электронов с интенсивными пучками.—М.: Атомиздат, 1973.—192 с.
8. Вайнштейн Л. А., Солнцев В. А. Лекции по сверхвысокочастотной электронике.—М.: Советское радио, 1970.—400 с.
9. Вайнштейн Л. А., Вакман Д. Е. Разделение частот в теории колебаний и волн.—М.: Наука, 1983.—288 с.
10. Смирнов А. В. Исследование эффектов взаимодействия пучка с полями основной и несимметричных волн в неоднородных секциях ЛУЭ на бегущей волне: Дис. ... канд. физ.-мат. наук.—Москва: Московский инженерно-физический институт, 1985.—171 с.
11. Smirnov A. V., Yu D. in Proc. of Particle Accelerator Conf. (PAC2001), IL., Chicago, 18-22 June (2001) 2293
12. Smirnov A. V. in Proc. of Particle Accelerator Conference (PAC‘97), Vancouver, B.C., Canada, 12–16 May (1997) 894; Nucl. Instrum. and Meth. NIM A349 (1994)295

Статья поступила 15 декабря 2003 г.

Смирнов Алексей Владимирович, к. ф.-м. н.
DULY Research Inc., Rancho Palos Verdes, CA 90275, USA;
E-mail: alexei_sav@mail.ru