Владикавказский математический журнал
Январь–март, 2004, Том 6, Выпуск 1

УДК **517.98**

О БИЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРАХ, СОХРАНЯЮЩИХ ДИЗЪЮНКТНОСТЬ

А. Г. Кусраев, С. Н. Табуев

Светлой памяти Юрия Абрамовича, доказавшего, что из дизъюнктных осколков можно делать красивые теоремы и достойную судьбу.

Показано, что порядково ограниченный билинейный оператор, действующий в векторных решетках и сохраняющий дизъюнктность, регулярен. В случае, когда решетка образов порядково полна, дано описание порядкового идеала, порожденного множеством решеточных биморфизмов в пространстве регулярных операторов. В качестве вспомогательного средства выведены формулы как общего порядкового исчисления, так и дизъюнктного исчисления Абрамовича для билинейных регулярных операторов.

Введение

Теория линейных регулярных операторов в векторных решетках вместе с широким кругом разнообразных приложений хорошо освещена в монографической литературе, см. [2–4, 6, 11–13]. При этом обращает на себя внимание тот факт, что, несмотря на серьезные продвижения в исследовании порядковой структуры линейных операторов, билинейные операторы изучены мало с точки зрения их порядковых свойств. В работе [5] была указана желательность систематического исследования билинейных положительных и регулярных операторов. В настоящей статье рассмотрены билинейные операторы, сохраняющие дизъюнктность, и изучены некоторые их структурные свойства.

Статья организована следующим образом. В первом параграфе даны необходимые для дальнейшего вспомогательные сведения. Второй параграф посвящен выводу формул для вычисления конечных и бесконечных решеточных операций для билинейных регулярных операторов. В частности, показано, что имеет место вариант порядкового исчисления, названный в [10] исчислением Абрамовича. В третьем параграфе, рассмотрены билинейные операторы, сохраняющие дизъюнктность. Четвертый параграф посвящен описанию идеала, порожденного решеточными биморфизмами.

Все необходимые сведения из теории векторных решеток можно найти в [4] и [6]. Всюду в тексте рассматриваемые векторные решетки считаются архимедовыми.

1. Предварительные сведения

В этом параграфе вводится класс регулярных билинейных операторов и соответствующая конструкция тензорного произведения векторных решеток.

1.1. Пусть E, F и G — векторные решетки. Билинейный оператор $b : E \times F \to G$ называют *положительным*, если $b(x, y) \geqslant 0$ для всех $x \in E_+$ и $y \in F_+$. Разность положительных билинейных операторов именуют *регулярным*. Как видно, билинейный оператор $b : E \times F \to G$ положителен в том и только в том случае, когда для любых $x \in E_+$ и $y \in F_+$ частичные операторы

$$b_x : y \mapsto b(x, y)\ (y \in F), \quad b_y : x \mapsto b(x, y)\ (x \in E)$$

положительны. Пусть $BL_+(E, F; G)$ и $BL^r(E, F; G)$ обозначают соответственно множества положительных и регулярных билинейных операторов из $E \times F$ в G. Тогда $BL^r(E, F; G)$ — векторное пространство, а $BL_+(E, F; G)$ — острый конус, определяющий в нем векторный порядок. Билинейный оператор назовем порядково ограниченным, если он каждое порядково ограниченное множество переводит в порядково ограниченное множество. Ясно, что билинейный регулярный оператор порядково ограничен, но обратное, вообще говоря, неверно.

1.2. *Если G пространство Канторовича, то множество регулярных билинейных операторов $BL(E, F; G)$ из $E \times F$ в G с порядком, определяемым конусом $BL_+(E, F; G)$, является пространством Канторовича.*

$\lhd$ Отображение, сопоставляющее элементу $x \in E$ частичный оператор b_x, осуществляет линейный изоморфизм между $BL^r(E, F; G)$ и $L^r(E, L^r(F, G))$. Так как при этом множества $BL_+(E, F; G)$ и $L_+(E, L^r(F, G))$ биективны, то указанное отображение является порядковым изоморфизмом упорядоченных векторных пространств. Отсюда и вытекает требуемое в силу теоремы Рисса — Канторовича, см. [4; теорема 3.1.2]. $\rhd$

1.3. Билинейный оператор $b : E \times F \to G$ называют решеточным биморфизмом, если для любых $x \in E_+$ и $y \in F_+$ частичные операторы b_x и b_y являются решеточными гомоморфизмами. Следующий результат установлен Д. Фремлином в [7].

Теорема. *Пусть E и F — векторные решетки. Тогда существуют единственная с точностью до решеточного изоморфизма векторная решетка $E \mathbin{\bar{\otimes}} F$ и решеточный биморфизм ϕ, удовлетворяющие следующим условиям:*

(1) *если G — векторная решетка и $\psi : E \times F \to G$ — решеточный биморфизм, то существует единственный решеточный гомоморфизм $T : E \mathbin{\bar{\otimes}} F \to G$ такой, что $T \circ \phi = \psi$;*

(2) *ϕ индуцирует вложение алгебраического тензорного произведения $E \otimes F$ в $E \mathbin{\bar{\otimes}} F$;*

(3) *$E \otimes F$ плотно в $E \mathbin{\bar{\otimes}} F$ в том смысле, что для произвольного $v \in E \mathbin{\bar{\otimes}} F$ существуют $x_0 \in E_+$ и $y_0 \in F_+$ такие, что при любом $\varepsilon > 0$ существует $u \in E \otimes F$, для которого $|v - u| \leqslant \varepsilon x_0 \otimes y_0$;*

(4) *если $0 < v \in E \mathbin{\bar{\otimes}} F$, то существуют такие элементы $x \in E_+$ и $y \in F_+$, что $0 < x \otimes y \leqslant v$.*

Решеточный биморфизм ϕ, фигурирующий в формулировке теоремы, принято обозначать символом $\bar{\otimes}$ или даже $\otimes$.

1.4. Если E_0 и F_0 — векторные подрешетки E и F соответственно, то тензорное произведение $E_0 \mathbin{\bar{\otimes}} F_0$ изоморфно векторной подрешетке в $E \mathbin{\bar{\otimes}} F$, порожденной множеством

$E_0 \otimes F_0$ (см. Д. Фремлин [7]). На этом основании считают просто, что $E_0 \bar{\otimes} F_0$ — подрешетка в $E \bar{\otimes} F$. Кроме того, из пункта (3) предыдущей теоремы видно, что если E_0 и F_0 — массивные подрешетки, то $E_0 \bar{\otimes} F_0$ будет массивной подрешеткой.

Д. Фремлин [7] установил также следующее важное свойство введенного им тензорного произведения векторных решеток: если E, F и G — векторные решетки, причем G полно относительно сходимости с регулятором, то для любого положительного билинейного оператора $b : E \times F \to G$ существует единственный линейный положительный оператор $T : E \bar{\otimes} F \to G$ такой, что $T\bar{\otimes} = b$. Однако имеет место несколько более сильное утверждение.

1.5. *Теорема.* *Пусть E, F и G — векторные решетки, причем G полно относительно сходимости с регулятором. Тогда отображение $T \mapsto T\bar{\otimes}$ устанавливает изоморфизм между упорядоченными векторными пространствами $L^r(E \bar{\otimes} F, G)$ и $BL^r(E, F; G)$.*

$\lhd$ Это следует из указанного выше свойства в силу отмеченного в 1.2 изоморфизма между $BL^r(E, F; G)$ и $L^r(E, L^r(F, G))$. $\rhd$

1.6. *Пусть E и F — векторные решетки, а F — K-пространство. Положительный билинейный оператор $b : E \times F \to G$ является решеточным биморфизмом тогда и только тогда, когда для любого билинейного оператора $d : E \times F \to G$, удовлетворяющего неравенствам $0 \leqslant d \leqslant b$, существует ортоморфизм $\rho \in \mathrm{Orth}(G)$ такой, что $0 \leqslant \rho \leqslant I_G$ и $d = \rho \circ b$.*

$\lhd$ Следует из 1.5 силу теоремы Кутателадзе (см. [4; 3.3.4 (1)]). $\rhd$

Сформулируем еще один результат из [5], скалярный случай ($G = \mathbb{R}$) которого установлен в [7].

1.7. *Пусть P и Q — компакты (= хаусдорфовы компактные топологические пространства), а G — произвольное K-пространство. Пусть E и F — векторные подрешетки соответственно в $C(P)$ и $C(Q)$, разделяющие точки и содержащие константы. Для любого регулярного билинейного оператора $b : E \times F \to G$ существует единственная ограниченная счетно аддитивная квазирегулярная борелевская G-значная мера $\mu := \mu_b$ на $P \times Q$ такая, что*

$$b(x, y) = \int_{P \times Q} x(s)y(t)\, d\mu(s, t) \quad \bigl(x \in E,\ y \in F\bigr).$$

Отображение $b \mapsto \mu_b$ осуществляет линейный и порядковый изоморфизм между пространством билинейных регулярных операторов $BL^r(E, F; G)$ и пространством ограниченных счетно аддитивных квазирегулярных борелевских мер $\mathrm{bqca}(Bor(P \times Q), G)$.

$\lhd$ Билинейный регулярный оператор $b : E \times F \to G$ удовлетворяет неравенству

$$|b(x, y)| \leqslant |b|(|x|, |y|) \leqslant |b|(\|x\|_\infty \mathbf{1}_P, \|y\|_\infty \mathbf{1}_Q) = |b|(\mathbf{1}_P, \mathbf{1}_Q)\|x\|_\infty \|y\|_\infty,$$

где $\|\cdot\|_\infty$ — равномерная норма, а $\mathbf{1}_P$ и $\mathbf{1}_Q$ — единичные функции на P и Q. Отсюда видно, что b допускает продолжение до билинейного регулярного оператора $\tilde{b}$, определенного на $C(P) \times C(Q)$. Оператор $\tilde{b}$ единственным образом представляется в виде $\tilde{b} = \tilde{T}\otimes$ для некоторого линейного регулярного оператора $\tilde{T} : C(P) \bar{\otimes} C(Q) \to G$. Так как $C(P) \bar{\otimes} C(Q)$ равномерно плотно в $C(P \times Q)$, то $\tilde{T}$ допускает продолжение до линейного регулярного оператора $T : C(P \times Q) \to G$, так что имеет место представление $b = T\otimes$. Остается применить теорему М. Райта, см. [4; теорема 6.2.11 (2)]. $\rhd$

2. Порядковое исчисление

Как следует из 1.2, если G пространство Канторовича, то множество регулярных билинейных операторов из $E \times F$ в G является K-пространством. В этом параграфе приведем формулы для вычисления решеточных операций в этом пространстве.

2.1. *Пусть E, F и G — векторные решетки, а $b_0 : E_+ \times F_+ \to G$ — оператор, аддитивный и положительно однородный по каждому из аргументов. Тогда существует и притом единственный билинейный оператор $b : E \times F \to G$, продолжающий b_0. При этом b положителен в том и только в том случае, когда $b_0(E_+ \times F_+) \subset G_+$.*

$\lhd$ Для $x \in E$, $y \in F$ билинейный оператор b определяется формулой

$$b(x,y) := b_0(x^+, y^+) - b_0(x^-, y^+) - b_0(x^+, y^-) + b_0(x^-, y^-).$$

Элементарное доказательство того, что оператор b билинеен, почти дословно повторяет рассуждения из [9] для случая $E = F$ и $G = \mathbb{R}$. $\rhd$

2.2. *Пусть $k(i) \in \mathbb{N}$ и $x, y_i^1, \dots, y_i^{k(i)} \in E_+$ таковы, что $x = y_i^1 + \dots + y_i^{k(i)}$ для каждого $i = 1, \dots, n$. Тогда существует набор элементов $(x_l)_{l=1}^N \subset E_+$, где $N := \prod_{i=1}^n k(i)$, такой, что справедливы следующие утверждения:*

(1) $x_1 + \dots + x_N = x$;

(2) *для каждого $i = 1, \dots, n$ существует функция $\theta_i : \{1, \dots, N\} \to \{1, \dots, k(i)\}$ такая, что*

$$y_i^j = \sum_{\{l:\, \theta_i(l)=j\}} x_l \qquad (j := 1, \dots, k(i));$$

(3) *если $y_i^s \perp y_i^t$ для всех $i = 1, \dots, n$ и $1 \leqslant s, t \leqslant k(i)$, $s \neq t$, то элементы из набора $(x_l)_{l=1}^N$ попарно дизъюнктны.*

$\lhd$ Доказательство опирается на следующую форму леммы о двойном разбиении (ср. [4; 1.3.3 (3)]): Если $u_1, \dots, u_n \in E_+$ и $v_1, \dots, v_m \in E_+$, причем $u_1 + \dots + u_n = v_1 + \dots + v_m$, то существует двойная конечная последовательность $(w_{i,j})_{i=1,j=1}^{n,m}$ элементов $w_{i,j} \in E_+$ такая, что

$$\sum_{i=1}^n w_{i,j} = v_j \quad (j = 1, \dots, m), \qquad \sum_{j=1}^m w_{i,j} = u_i \quad (i = 1, \dots, n).$$

Требуемое устанавливается индукцией по n. При $n = 2$ имеем $y_1^1 + \dots + y_1^{k(1)} = y_2^1 + \dots + y_2^{k(2)}$, следовательно, по лемме о двойном разбиении (при $n := k(1)$ и $m := k(2)$) можно подобрать $w_{i,j} \in E_+$ так, что

$$\sum_{i=1}^{k(1)} w_{i,j} = y_2^j \quad (j := 1, \dots, k(2)), \qquad \sum_{j=1}^{k(2)} w_{i,j} = y_1^i \quad (i := 1, \dots, k(1)).$$

Пусть $N := N_2 := k(1)k(2)$ и для $1 \leqslant l \leqslant N$ положим $x_l := w_{i,j}$ при $l := (i-1)k(2) + j$ $(i = 1, \dots, k(1), j = 1, \dots, k(2))$ (т. е. элементы матрицы $\|w_{i,j}\|$ нумеруются подряд, строка за строкой). Функции $\theta_1 : \{1, \dots, N\} \to \{1, \dots, k(1)\}$, $\theta_2 : \{1, \dots, N\} \to \{1, \dots, k(2)\}$ определим условиями: $\theta_1(l) := j$ и $\theta_2(l) := i$, если $l = (i-1)k(2) + j$. Тогда $(x_l)_{l=1}^N$, θ_1 и θ_2, удовлетворяют условиям (1) и (2). При этом очевидно, что если $y_i^s \perp y_i^t$ для $i = 1, 2$

и $1 \leqslant s,t, \leqslant k(i)$, $s \neq t$, то и набор $(x_l)_{l=1}^N$ состоит из попарно дизъюнктных элементов, т. е. выполнено (3).

Предположим теперь, что требуемое утверждение верно для $n-1>2$ и докажем его справедливость для n. Итак, существуют набор элементов $(x'_l)_{l=1}^{N_{n-1}} \subset E_+$ и функции $\theta'_i : \{1,\dots,N_{n-1}\} \to \{1,\dots,k(i)\}$, где $N := N_{n-1} := k(1)\dots k(n-1)$, такие, что $y_n^1+\dots+y_n^{k(n)} = x'_1+\dots+x'_{N_{n-1}}$ и $y_i^j = \sum_{\theta'_i(l)=j} x'_l$ $(j=1,\dots,k(i),\ i=1,\dots,n-1)$. В силу леммы о двойном разбиении (при $n := N_{n-1}$ и $m := k(n)$) найдутся элементы $w_{i,j} \in E$ такие, что

$$\sum_{i=1}^{N_{n-1}} w_{i,j} = y_n^j \quad (j=1,\dots,k(n)), \qquad \sum_{j=1}^{k(n)} w_{i,j} = x'_i \quad (i=1,\dots,N_{n-1}).$$

Занумеруем элементы $w_{i,j}$ в одну последовательность (x_l), где $1 \leqslant l \leqslant N_n := N_{n-1}k(n)$, так же, как и выше, т. е. положим $x_l := w_{i,j}$ при $l := (i-1)k(n)+j$ $(i=1,\dots,N_{n-1};\ j=1,\dots,k(n))$. Из рекуррентной формулы $N_n = N_{n-1}k(n)$ видно, что $N := N_n = \prod_{i=1}^n k(i)$. Далее, заметим, что

$$\sum_{l=1}^N x_l = \sum_{i=1}^{N_{n-1}} \sum_{j=1}^{k(n)} w_{i,j} = \sum_{i=1}^{N_{n-1}} x'_i = x,$$

т. е. $(x_l)_{l=1}^N$ — разложение элемента x. Очевидно, что θ_n определяется условием: $\theta_n(l)=j$ при $l=(i-1)k(n)+j$, $i=1,\dots,N_{n-1}$. Чтобы определить θ_i при $i<n$, выразим y_i^j через $w_{i,j}$, используя уже имеющиеся функции θ'_i:

$$y_i^j = \sum_{\theta'_i(l)=j} x'_l = \sum_{\theta'_i(l)=j} \sum_{s=1}^{k(n)} w_{l,s} = \sum_{\substack{\theta'_i(l)=j \\ 1\leqslant s\leqslant k(n)}} x_{(l-1)k(n)+s}.$$

Таким образом, следует положить $\theta_i(p)=j$ в том случае, если $p(l-1)k(n)+s$, $\theta'_i(l)=j$ и $1 \leqslant s \leqslant k(n)$. Тогда выполняется (2).

Наконец, если $y_i^1,\dots,y_j^{k(i)}$ попарно дизъюнктны при всех $i=1,\dots,n$, то в силу индукционного предположения элементы $x'_1,\dots,x'_{N_{n-1}}$ попарно дизъюнктны. Но тогда, как мы видели выше, индукционный шаг, состоящий в применении леммы о двойном разбиении, также приводит к попарно дизъюнктному набору элементов. $\rhd$

Всюду далее в 2.3–2.7 E и F — векторные решетки, а G —K-пространство.

2.3. *Для любых элементов $x \in E_+$, $y \in F_+$ и операторов $b_1,\dots,b_l \in BL^r(E,F;G)$ имеют место следующие формулы:*

$$(b_1 \vee \dots \vee b_l)(x,y) = \sup\left\{ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m b_{k(i,j)}(x_i,y_j) \right\},$$

$$(b_1 \wedge \dots \wedge b_l)(x,y) = \inf\left\{ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m b_{k(i,j)}(x_i,y_j) \right\},$$

где точные границы берутся по всем $n,m \in \mathbb{N}$, $k : \{1,\dots,n\}\times\{1,\dots,m\} \to \{1,\dots,l\}$ и наборам $x_1,\dots,x_n \in E_+$, $y_1,\dots,y_m \in F_+$, удовлетворяющим условиям $\sum_{i=1}^n x_i = x$, $\sum_{i=1}^n y_j = y$.

$\lhd$ Доказательство проведем при $l = 2$. Пусть $b_x^1, b_x^2 : E \to L^r(F,G)$ — частичные операторы для билинейных операторов b_1, b_2, т. е. $b_x^j := (b_j)_x$, $j := 1,2$. Воспользуемся изоморфизмом пространств $BL^r(E,F;G)$ и $L^r(E, L^r(F,G))$ и применим теорему Рисса — Канторовича (см. [4; теорема 3.1.2]):

$$(b_1 \vee b_2)(x,y) = (b_x^1 \vee b_x^2)(y) = \sup\Big\{(b_{x_1}^1 + b_{x_2}^2) :\ x_1 + x_2 = x;\ x_1, x_2 \in E_+\Big\}(y)$$
$$= \sup\left\{ \sum_{j=1}^m (b_{x_j^1}^1 + b_{x_j^2}^2)(y_j) :\ x_j^1 + x_j^2 = x;\ x_j^1,\ x_j^2 \in E_+,\right.$$
$$\left. y = y_1 + \dots + y_m;\ y_1, \dots, y_m \in F_+ \right\}.$$

Для всех наборов пар x_j^1, x_j^2 таких, что $x = x_j^1 + x_j^2$, согласно 2.2 можно подобрать разложение $x = \sum_{i=1}^n x_i$ такое, что каждый элемент x_j^k, где $k = 1$ или $k = 2$, можно представить как сумму из элементов этого разложения. Заменив x_j^k на соответствующие суммы из разложения (x_i) получим требуемую формулу

$$(b_1 \vee b_2)(x,y) = \sup\left\{ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m b_k(x_i, y_j) \right\}.$$

Вторая формула доказывается аналогично. $\rhd$

2.4. *Для любых $x \in E_+$, $y \in F_+$, $b \in BL^r(E,F;G)$ справедливы следующие формулы:*

$$b^+(x,y) = \sup\left\{ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \varepsilon(i,j) b(x_i, y_j) \right\},$$

$$b^-(x,y) = -\inf\left\{ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \varepsilon(i,j) b(x_i, y_j) \right\},$$

где точные границы берутся по всем $n, m \in \mathbb{N}$, $\varepsilon : \{1,\dots,n\} \times \{1,\dots,m\} \to \{0,1\}$ и наборам $x_1,\dots,x_n \in E_+$, $y_1,\dots,y_m \in F_+$, удовлетворяющим условиям $\sum_{i=1}^n x_i = x$ и $\sum_{j=1}^m y_j = y$.

$\lhd$ Эти формулы содержаться в 2.3 как частные случаи. $\rhd$

2.5. *Для любого оператора $b \in BL^r(E,F;G)$ справедливы формулы:*

$$|b|(x,y) = \sup\left\{ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |b(x_i, y_j)| :\ x_i \in E,\ y_j \in F,\right.$$
$$\left. \sum_{i=1}^n |x_i| = x,\ \sum_{j=1}^m |y_j| = y;\ n, m \in \mathbb{N} \right\} \qquad (x \in E_+,\quad y \in F_+);$$

$$|b(x,y)| \leqslant |b|(|x|, |y|) \quad (x \in E,\ y \in F).$$

$\lhd$ Вторая формула является очевидным следствием первой. Обозначим правую часть первой формулы буквой g. Из 2.3 следует, что

$$|b|(x,y) = b \vee (-b)(x,y) = \sup\left\{ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (-1)^{k(i,j)} b(x_i, y_j),\ x = \sum_{i=1}^n x_i,\ y = \sum_{j=1}^m y_j \right\},$$

где супремум берется по $n, m \in \mathbb{N}$, функциям $k : \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\} \to \{1, 2\}$ и наборам $x_1, \dots, x_n \in E_+$, $y_1, \dots, y_m \in F_+$, следовательно, $|b|(x, y) \leqslant g$.

Докажем обратное неравенство. Возьмем фиксированную сумму

$$g' := \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} |b(x_i, y_j)| \leqslant g.$$

Если заменить в ней x_i и y_j парами x_i^+, x_i^- и y_j^+, y_j^- и воспользоваться неравенством треугольника, то получим другую сумму g'' того же вида, причем $g' \leqslant g'' \leqslant g$. Таким образом, в указанной сумме можем считать $x_i \geqslant 0$ и $y_j \geqslant 0$. Рассмотрим теперь две суммы $g(k)$ и $g(k')$, фигурирующие в приведенной выше формуле для вычисления $|b|(x, y)$. Если функции $k, k' : \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\} \to \{1, 2\}$ подобрать так, что $k(1, 1) = 1$, $k'(1, 1) = 2$ и $k(i, j) = k'(i, j)$ при $i \neq 1$, $j \neq 1$, то $g(k) = -b(x_1, y_1) + g_0$ и $g(k') = b(x_1, y_1) + g_0$. Отсюда $g(k) \vee g(k') = |b(x_1, y_1)| + g_0 \leqslant |b|(x, y)$. Повторив эти рассуждения для суммы $g_0 = \sum_{i=2}^{n} \sum_{j=2}^{m} (-1)^{k(i,j)} b(x_i, y_j) + (-1)^{k(1,2)} b(x_1, y_2) + (-1)^{k(2,1)} b(x_2, y_1)$, получим $|b(x_1, y_1)| + |b(x_1, y_2)| + |b(x_2, y_1)| + g_0' \leqslant |b|(x, y)$, где $g_0' = \sum_{i=2}^{n} \sum_{j=2}^{m} b(x_i, y_j)$. Таким образом, индукция по i и j приводит к неравенству $g' \leqslant |b|(x, y)$, следовательно, $g = \sup g' \leqslant |b|(x, y)$. $\rhd$

Первая формула из 2.5 для функционалов была установлена Д. Фремлином в [8].

2.6. *Для любых $x \in E_+$, $y \in F_+$ и порядково ограниченного множества $\mathcal{B} \subset BL^r(E, F; G)$ имеют место следующие формулы:*

$$(\sup \mathcal{B})(x, y) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} b_{k(i,j)}(x_i, y_j) \right\},$$

$$(\inf \mathcal{B})(x, y) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} b_{k(i,j)}(x_i, y_j) \right\},$$

где точные границы берутся по всем номерам $n, m, l \in \mathbb{N}$, функциям $k : \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\} \to \{1, \dots, l\}$, наборам $x_1, \dots, x_n \in E_+$, $y_1, \dots, y_m \in F_+$, удовлетворяющим условиям $\sum_{i=1}^{n} x_i = x$, $\sum_{i=1}^{m} y_j = y$, и произвольным наборам $b_1 \dots, b_l \in \mathcal{B}$.

$\lhd$ Это утверждение вытекает из 2.3 и из того факта, что точные границы направленной в соответствующем смысле, т. е. вверх или вниз, сети билинейных регулярных операторов вычисляются поточечно. $\rhd$

2.7. *Если векторные решетки E и F обладают сильным свойством Фрейденталя, то точные границы в* 2.3–2.6 *можно считать по всем дизъюнктным разбиениям элементов $x \in E_+$ и $y \in F_+$.*

$\lhd$ Докажем утверждение для супремума $b_1 \vee b_2$. Для этого воспользуемся исчислением Абрамовича [1], в котором точные границы берутся по дизъюнктным разбиениям аргумента [4; 3.1.6 (1)]. Пусть $b_x^1, b_x^2 : E \to L^r(F, G)$ — частичные операторы для билинейных операторов b_1, b_2. Тогда

$$(b_1 \vee b_2)_x = \sup \left\{ b_{x_1}^1 + b_{x_2}^2,\ x_1 + x_2 = x,\ x_1, x_2 \in E_+ \right\}.$$

Согласно [4; 3.1.6] этот супремум может быть вычислен на дизъюнктных парах x_1, x_2, т. е.

$$\sup \left\{ (b_{x_1}^1 + b_{x_2}^2) : x_1 + x_2 = x,\, x_1, x_2 \in E_+,\, x_1 \perp x_2 \right\}.$$

Вновь привлекая [4; 3.1.6], заметим, что при подсчете супремума можно ограничиться дизъюнктным разбиением y:

$$\sup\left\{\sum_{j=1}^{m}(b^1_{x^1_j}+b^2_{x^2_j})(y_j) : x^1_j+x^2_j=x;\, x^1_j,x^2_j\geqslant 0, x^1_j\perp x^2_j,\ j=1,\dots,m,\right.$$
$$\left.\sum_{j=1}^{m}y_j=y,\ y_k\perp y_l\ (k\neq l)\right\}=\sup\left\{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}b_k(x_i,y_j)\right\}.$$

Из 2.2 (3) следует, что $x_k \perp x_l$ для $(k\neq l)$. Инфимум и модуль доказываются аналогично. $\rhd$

3. Операторы, сохраняющие дизъюнктность

Здесь введем билинейные операторы, сохраняющие дизъюнктность, и покажем, что для этого класса операторов порядковая ограниченность влечет регулярность.

3.1. Говорят, что билинейный оператор $b : E\times F\to G$ сохраняет дизъюнктность, если для произвольных $x\in E$ и $y\in F$ выполняется:

$$x_1\perp x_2 \implies b(x_1,y)\perp b(x_2,y),$$

$$y_1\perp y_2 \implies b(x,y_1)\perp b(x,y_2).$$

Как видно, билинейный оператор сохраняет дизъюнктность в том и только в том случае, если для любых $x\in E$ и $y\in F$ дизъюнктность сохраняют линейные операторы $b_x : F\to G$ и $b_y : E\to G$. Положительный билинейный оператор, сохраняющий дизъюнктность, будет решеточным биморфизмом, так как операторы b_x и b_y являются решеточными гомоморфизмиами при $x\geqslant 0$ и $y\geqslant 0$.

3.2. *Билинейный оператор $b : E\times F\to G$ сохраняет дизъюнктность в том, и только в том случае, когда $|b(x,y)|=|b(|x|,|y|)|$ для всех $x\in E$ и $y\in F$.*

$\lhd$ Доказательство аналогично линейному случаю (см. [4; теорема 3.3.1 (5)]). Если билинейный оператор b сохраняет дизъюнктность, то $b(x^+,y)\perp b(x^-,y)$ и $b(x,y^+)\perp b(x,y^-)$ для всех $x\in E$ и $y\in F$. Следовательно, используя эквивалентность соотношений $x\perp y$ и $|x+y|=|x-y|$ (см. [4; предложение 3.3.1 (1)]), выводим

$$|b(x,y)|=|b(x^+,y)-b(x^-,y)|=|b(x^+,y)+b(x^-,y)|=|b(|x|,y)|$$
$$=|b(|x|,y^+)-b(|x|,y^-)|=|b(|x|,y^+)+b(|x|,y^-)|=|b(|x|,|y|)|.$$

Обратное устанавливается так же, как и в линейном случае. Действительно, если $y_1\perp y_2$ и b удовлетворяет указанному условию, то

$$|b(x,y_1)+b(x,y_2)|=|b(|x|,|y_1+y_2|)|=|b(|x|,|y_1-y_2|)|=|b(x,y_1)-b(x,y_2)|.\ \rhd$$

Напомним хорошо известную теорему М. Мейера о линейных операторах, сохраняющих дизъюнктность, см. [4; теорема 3.3.1 (5)].

3.3. *Теорема.* *Пусть E и F — векторные решетки, а $T : E\to F$ — порядково ограниченный оператор, сохраняющий дизъюнктность. Тогда T имеет положительную часть T^+, отрицательную часть T^- и модуль $|T|$, являющиеся решеточными гомоморфизмами. Более того, $T^+x=(Tx)^+$ и $T^-x=(Tx)^-$ для $0\leqslant x\in E$ и $|Tx|=|T|(|x|)$ для $x\in E$.*

Аналогичный результат имеет место и для билинейных операторов.

3.4. *Теорема.* *Пусть E, F и G — векторные решетки, а $b : E \times F \to G$ порядково ограниченный билинейный оператор, сохраняющий дизъюнктность. Тогда b имеет положительную часть b^+, отрицательную часть b^- и модуль $|b|$, являющиеся решеточными биморфизмами. Более того, $b^+(x,y) = b(x,y)^+$ и $b^-(x,y) = b(x,y)^-$ при $0 \leqslant x \in E, 0 \leqslant y \in F$, и $|b|(|x|,|y|) = |b(x,y)|$ для произвольных $x \in E$ и $y \in F$. В частности, b регулярен.*

$\lhd$ Покажем, что определенный указанным образом оператор $b^+ : E_+ \times F_+ \to G$ аддитивен. Пусть $x = x_1 + x_2$, $0 \leqslant x_1, x_2 \in E$ и $y \in F_+$. Учитывая, что частичный оператор $b_y : E \to G$ сохраняет дизъюнктность и порядково ограничен, можем к нему применить теорему 3.3, откуда выводим

$$b^+(x_1,y) + b^+(x_2,y) := b(x_1,y)^+ + b(x_2,y)^+ = (b_y x_1)^+ + (b_y x_2)^+ = (b_y)^+ x_1 + (b_y)^+ x_2 =$$

$$= (b_y)^+(x_1 + x_2) = b_y(x_1 + x_2)^+ = b(x_1 + x_2, y)^+ =: b^+(x_1 + x_2, y).$$

Таким образом оператор b^+ аддитивен и, очевидно, положительно однороден. Согласно 3.1 b^+ допускает единственное продолжение до положительного билинейного оператора на $E \times F$ (которую обозначаем тем же символом). Кроме того ясно, что b^+ сохраняет дизъюнктность, следовательно, является решеточным гомоморфизмом. Так как $b^- = (-b)^+$ и $-b$ сохраняет дизъюнктность, то b^- — решеточный биморфизм. При этом $b = b^+ - b^-$.

Положим $|b| := b^+ - b^-$. Поскольку $b^+(x,y) \perp b^-(x,y)$, то учитывая 3.2, выводим:

$$\begin{aligned}|b|(|x|,|y|) &= b^+(|x|,|y|) + b^-(|x|,|y|) = |b^+(x,y)| + |b^-(x,y)| \\ &= |b^+(x,y) + b^-(x,y)| = |b^+(x,y) - b^-(x,y)| = |b(x,y)|.\end{aligned}$$

Итак, $||b|(x,y)| = |b^+(x,y) + b^-(x,y)| = |b|(|x|,|y|)$ и в силу 3.2 $|b|$ — решеточный биморфизм. Ясно также, что $b^+ = b \vee 0$ и $b^- = (-b) \vee 0$. $\rhd$

3.5. *Для порядково ограниченного билинейного оператора $b : E \times F \to G$. равносильны утверждения:*

(1) *b_x и b_y сохраняют дизъюнктность положительных элементов при $x \in E_+$ и $y \in F_+$;*

(2) *b_x и b_y сохраняют дизъюнктность для всех $x \in E$, $y \in F$;*

(3) *$b(x_1,y_1) \perp b(x_2,y_2)$ при условии, что либо $x_1 \perp x_2$, либо $y_1 \perp y_2$.*

$\lhd$ Импликации (3) $\Longrightarrow$ (2) $\Longrightarrow$ (1) очевидны, причем здесь порядковая ограниченность не нужна. Для доказательства (1) $\Longrightarrow$ (3) предположим, что $y_1 \perp y_2$. Тогда, учитывая 3.4, получим

$$\begin{aligned}|b(x_1,y_1)| \wedge |b(x_2,y_2)| &= |b|(|x_1|,|y_1|) \wedge |b|(|x_2|,|y_2|) \\ &\leqslant |b|(|x_1| + |x_2|,|y_1|) \wedge |b|(|x_1| + |x_1|,|y_2|) \\ &= |b|(|x_1| + |x_2|,|y_1| \wedge |y_2|) = 0.\end{aligned}$$

Если $x_1 \perp x_2$, то рассуждения аналогичны. $\rhd$

3.6. *Пусть E, F и G — векторные решетки. Для произвольного порядково ограниченного билинейного оператора $b : E \times F \to G$, сохраняющего дизъюнктность, существует единственный линейный оператор $T : E \bar{\otimes} F \to G$, сохраняющий дизъюнктность, такой, что $b = T\otimes$. Более того, $b^+ = T^+\otimes$, $b^- = T^-\otimes$ и $|b| = |T|\otimes$.*

$\lhd$ В самом деле, согласно 3.3, операторы b^+ и b^- являются решеточными биморфизмами, а по теореме Фремлина (см. 1.3 (1)) допускают факторизацию $b^+ = S_1\otimes$ и $b^- = S_2\otimes$ для некоторых решеточных гомоморфизмов $S_1, S_2 : E \bar{\otimes} F \to G$. Если

$$u := \sum_{k=1}^{n} x_k \otimes y_k, \quad e := \sum_{k=1}^{n} |x_k|, \quad f := \sum_{k=1}^{n} |y_k|,$$

то $|u| \leqslant ne \otimes f$, следовательно, $|S_1(u)| = S_1(|u|) \leqslant nS_1(e \otimes f) = nb^+(e, f) = b(e, f)^+$; аналогично, $|S_2(u)| \leqslant b(e, f)^-$. Тем самым, $S_1(u) \perp S_2(u)$, $u \in E\otimes F$. Используя 1.3 (3), легко видеть, что последнее утверждение выполняется и для всех $u \in E \otimes F$, т. е. операторы S_1 и S_2 сильно дизъюнктны. Положим $T := S_1 - S_2$ и заметим, что оператор T сохраняет дизъюнктность в силу указанного свойства сильной дизъюнктности операторов S_1 и S_2. Очевидно также, что $b = T\otimes$, $T^+ = S_1$, $T^- = S_2$ и $|b| = (S_1 + S_2)\otimes$. $\rhd$

3.7. В заключение параграфа перечислим несколько простых следствий теорем 1.3, 1.6 и 3.4, предполагая, что E, F и G — векторные решетки, причем G порядково полна. Пусть $d : E \times F \to G$ — порядково ограниченный билинейный оператор, сохраняющий дизъюнктность, и $\phi := |g|$. Тогда ϕ — решеточный биморфизм из $E \times F$ в G.

(1) *Предположим, что $G = \phi(E\times F)^{\perp\perp}$. Тогда отображение $\pi \mapsto \pi\circ\phi$ обуществляет изоморфизм булевой алгебры порядковых проекторов $\mathfrak{P}(G)$ и булевой алгебры осколков $\mathfrak{E}(\phi)$ оператора ϕ.*

(2) *Полоса $\{\phi\}^{\perp\perp}$ состоит из операторов сохраняющих дизъюнктность. Операторы b_1 и b_2 из полосы $\{\phi\}^{\perp\perp}$ дизъюнктны тогда и только тогда, когда дизъюнктны их образы* $\mathrm{im}(b_1)$ *и* $\mathrm{im}(b_2)$.

В максимальном расширении mG зафиксируем структуру умножения, которая определяется однозначно выбором порядковой единицы. Пусть $BL^{\phi}(E, F; G)$ — множество всех регулярных билиненыйх операторов $b : E \times F \to G$, для которых выполняется включение $b \in \{\phi\}^{\perp\perp}$, где b и ϕ — рассматриваются как операторы из E в mG. Обозначим $G' := \big\{g \in mG : g \cdot \phi(E \times F) \subset G\big\}$.

(3) *Множество G' является порядковым идеалом в mG, который линейно и порядково изоморфен K-пространству $BL^{\phi}(E, F; G)$. Такой изоморфизм осуществляется сопоставлением элементу $g \in G'$ оператора b_g по формуле*

$$b_g(x, y) = g \cdot \phi(x, y) \quad (x \in E,\ y \in F).$$

Для полного аналитического описания порядково ограниченных операторов, сохраняющих дизъюнктность, остается найти представление решеточного биморфизма φ в духе [4; глава 5].

4. Полидизъюнктные операторы

В текущем параграфе дается описание порядкового идеала, порожденного билинейными операторами, сохраняющими дизъюнктность. Всюду в этом параграфе E, F и G — архимедовы векторные решетки, причем G — K-пространство.

4.1. Скажем, что наборы элементов $\{x_0, x_1, \dots, x_n\} \subset E$ и $\{y_0, y_1, \dots, y_n\} \subset F$ *бидизъюнктны*, если для любых номеров $0 \leqslant i, j \leqslant n$, $i \neq j$, либо $x_i \perp x_j$, либо $y_i \perp j_j$. Билинейный оператор $b \in BL^r(E, F; G)$ назовем *n-дизъюнктным*, если для любых бидизъюнктных наборов $\{x_0, x_1, \dots, x_n\} \subset E$ и $\{y_0, y_1, \dots, y_n\} \subset F$ выполняется соотношение

$$|b(x_0, y_0)| \wedge |b(x_1, y_1)| \wedge \dots \wedge |b(x_n, y_n)| = 0.$$

Из 3.4 видно, что в классе порядково ограниченных операторов 1-дизъюнктный оператор — в точности оператор, сохраняющий дизъюнктность.

Следующая наша цель — показать, что всякий билинейный регулярный n-дизъюнктный оператор представим в виде суммы n билинейных регулярных операторов, сохраняющих дизъюнктность. Для этого потребуются некоторые вспомогательные факты.

4.2. *Билинейный оператор $b \in BL^r(E, F; G)$ будет n-дизъюнктным в том и только в том случае, если его модуль $|b|$ n-дизъюнктен.*

$\lhd$ Достаточность очевидна из 2.5. Допустим, что оператор $b \in BL^r(E, F; G)$ n-дизъюнктен. Возьмем бидизъюнктные наборы элементов $\{e_0, e_1, \dots, e_n\} \subset E_+$ и $\{f_0, f_1, \dots, f_n\} \subset F_+$ и положим $g_k := \sup\big\{|b(u,v)| : |u| \leqslant e_k,\ |v| \leqslant f_k\big\}$. Если $|u_k| \leqslant e_k$ и $|v_k| \leqslant f_k$, то наборы $\{u_0, u_1, \dots, u_n\}$ и $\{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ бидизъюнктны, следовательно, $|b(u_0, v_0| \wedge |b(u_1, v_1)| \wedge \dots \wedge |b(u_n, v_n)| = 0$. Переход к супремуму в последнем равенстве по всем $u_0, u_1, \dots, u_n$ и $v_0, v_1, \dots, v_n$ указанного вида дает $g_0 \wedge g_1 \wedge \dots \wedge g_n = 0$. Если $|x_1| + \dots + |x_m| \leqslant e_k$ и $|y_1| + \dots + |y_m| \leqslant f_k$, то $\sum_{l=1}^m |b(x_l, y_l)| \in \{g_k\}^{\perp\perp}$, значит, $|b|(e_k, f_k) \in \{g_k\}^{\perp\perp}$ в соответствии с первой формулой из 2.5. Итак,

$$|b|(e_0, f_0) \wedge |b|(e_1, f_1) \wedge \dots \wedge |b|(e_n, f_n) \in \{g_0\}^{\perp\perp} \cap \{g_1\}^{\perp\perp} \cap \dots \cap \{g_n\}^{\perp\perp} = \{0\},$$

стало быть, $|b|(e_0, f_0) \wedge \dots \wedge |b|(e_n, f_n) = 0$. $\rhd$

4.3. *Пусть P и Q — компакты, а E, F — векторные подрешетки соответственно в $C(P)$ и $C(Q)$, разделяющие точки и содержащие константы. Билинейный регулярный функционал $b : E \times F \to \mathbb{R}$ является n-дизъюнктным тогда и только тогда, когда носитель представляющей меры μ: $P \times Q \to \mathbb{R}$ из 1.7 содержит не более n точек.*

$\lhd$ В силу 4.2 можем считать без ограничения общности, что функционал b положителен. Пусть регулярная борелевская мера μ представляет функционал b в соответствие с 1.7. Предположим, что носитель $\operatorname{supp}(\mu)$ содержит $n+1$ точку $(p_0, q_0), \dots, (p_n, q_n) \in P \times Q$. Для $i := 0, \dots, n$ подберем открытые множества $U_i \subset P$ и $V_i \subset Q$ так, что множество $U_i \times V_i$ содержит только одну из указанных точек, а именно (p_i, q_i), и для любых различных индексов $0 \leqslant i, j \leqslant n$ либо $U_i \cap U_j = \varnothing$, либо $V_i \cap V_j = \varnothing$. По теореме Урысона существуют непрерывные функции $u_i : P \to \mathbb{R}$ и $v_i : Q \to \mathbb{R}$ такие, что $u_i(p_i) = 1$, $v_i(q_i) = 1$, причем u_i и v_i равны нулю на множествах $P \setminus U_i$ и $Q \setminus V_i$ соответственно. По теореме Стоуна — Вейерштрасса E и F плотны в $C(P)$ и $C(Q)$, поэтому для любого $0 < \varepsilon < 1/2$ можно подобрать такие функции $x_{i,\varepsilon} \in E$ и $y_{i,\varepsilon} \in F$, что $\|u_i - x_{i,\varepsilon}\|_\infty \leqslant \varepsilon$ и $\|v_i - y_{i,\varepsilon}\|_\infty \leqslant \varepsilon$. Положим теперь $x_i := (x_{i,\varepsilon} - \varepsilon \mathbf{1}_P)^+$ и $y_i := (y_{i,\varepsilon} - \varepsilon \mathbf{1}_Q)^+$, где $\mathbf{1}_S$ — функция, тождественно равная единице на S. Тогда $x_i(p_i) > 1 - 2\varepsilon$, $y_i(q_i) > 1 - 2\varepsilon$ и эти функции тождественно равны нулю на множествах $P \setminus U_i$ и $Q \setminus V_i$ соответственно. Как видно, наборы $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ и $\{y_0, y_1, \dots, y_n\}$ бидизъюнктны, следовательно, для некоторого номера $0 \leqslant j \leqslant n$ будет $|b(x_j, y_j)| = 0$. Множество $W := \{(p, q) \in P \times Q : x_j(p) > 1/2 - \varepsilon,\ y_j(q) > 1/2 - \varepsilon\}$ является открытой окрестностью точки (p_j, q_j), причем

$$0 = b(x_j, y_j) = \int_{P \times Q} x_j(s) y_j(t)\, d\mu(s, t) \geqslant (1/2 - \varepsilon)^2 \mu(W).$$

Итак, $\mu(W) = 0$, следовательно, точка (p_j, q_j) не может входить в носитель μ. $\rhd$

4.4. *Пусть E, F и G — векторные решетки, причем G — K-пространство. Пусть b — билинейный регулярный оператор из $E \times F$ в G, а T — линейный регулярный оператор из $E \,\bar{\otimes}\, F$ в G такой, что $b = T\otimes$. Тогда b будет n-дизъюнктным в том и только в том случае, когда оператор T n-дизъюнктен.*

$\lhd$ Достаточность очевидна. Для доказательства необходимости предположим, что билинейный регулярный оператор b n-дизъюнктен. Вновь в силу 4.2 можем считать без ограничения общности, что оператор b положителен. Возьмем набор попарно дизъюнктных элементов $u_0, u_1, \dots, u_n \in E \bar{\otimes} F$. Как видно из 1.3 (3), элементы $u_0, u_1, \dots, u_n$ содержатся в порядковом идеале, порожденном элементом $x_0 \otimes y_0$ при подходящих $x_0 \in E_+$ и $y_0 \in F_+$. Пусть E_0 и F_0 обозначают порядковые идеалы в E и F, порожденные элементами x_0 и y_0 соответственно. Согласно 1.4 элементы $u_0, u_1, \dots, u_n$ входят в $E_0 \bar{\otimes} F_0$. Пусть G_0 — порядковый идеал в G, порожденный элементом $b(x_0, y_0)$. Если b_0 и T_0 — ограничения b и T на $E_0 \times F_0$ и $E_0 \bar{\otimes} F_0$ соответственно, то b_0 и T_0 действуют в G_0 и $b_0 = T_0 \otimes$. Возьмем теперь произвольный решеточный гомоморфизм $h : G_0 \to \mathbb{R}$. Билинейный регулярный функционал $h \circ b_0 : E_0 \times F_0 \to \mathbb{R}$ n-дизъюнктен, и согласно 4.3 $h \circ b_0 = l \otimes$ для некоторого n-дизъюнктного положительного функционала l на $E_0 \bar{\otimes} F_0$. С другой стороны $h \circ b_0 = (h \circ T_0) \otimes$, и в силу утверждения об единственности из 1.3 (1), будет $l = h \circ T_0$. Итак, функционал $h \circ T_0$ n-дизъюнктен, поэтому

$$0 = \bigwedge_{k=0}^{n} \big|(h \circ T_0)(u_k)\big| = h\bigg(\bigwedge_{k=0}^{n} \big|T_0(u_k)\big|\bigg).$$

Так как на G_0 имеется достаточное число решеточных гомоморфизмов, то $\big|T_0(u_0)\big| \wedge \big|T_0(u_1)\big| \wedge \dots \wedge \big|T_0(u_n)\big| = 0$, что и требовалось. $\rhd$

4.5. Пусть b — положительный билинейный регулярный оператор из $E \times F$ в G. Введем множество билинейных регулярных операторов $\mathscr{Z}(b)$ и отображение $\boldsymbol{|} \cdot \boldsymbol{|} : \mathscr{Z}(b) \to \mathrm{Orth}(F)$ следующим образом:

$$\begin{gathered}\mathscr{Z}(b) := \{d \in BL^r(E, F; G) : (\exists \rho \in \mathrm{Orth}(G)_+)\,(|d| \leqslant \rho \circ b)\},\\ \boldsymbol{|} d \boldsymbol{|} := \inf\{\rho \in \mathrm{Orth}(F)_+ : |d| \leqslant \rho \circ b\} \quad (d \in \mathscr{Z}(b)).\end{gathered}$$

Так же, как и в [4; предложение 5.2.4 (1)] устанавливается, что $(\mathscr{Z}(b), \boldsymbol{|} \cdot \boldsymbol{|}, \mathrm{Orth}(G))$ представляет собой решетку Банаха — Канторовича.

4.6. *Теорема.* *Пусть E, F и G — векторные решетки, причем G — K-пространство. Пусть b — билинейный регулярный оператор из $E \times F$ в G. Равносильны следующие утверждения:*

(1) *b — n-дизъюнктный оператор;*

(2) *для любого набора из $n+1$ положительного оператора $b_0, \dots, b_n \in BL^r(E, F; G)$, удовлетворяющего условию $|b| = b_0 + \dots + b_n$, существуют наборы операторов $\{b_{k,l} : k, l := 0, 1, \dots, n\}$ и $\{\sigma_l : l = 0, 1, \dots, n\}$ такие, что совместна система условий:*

$$\begin{gathered}0 \leqslant \sigma_l \in \mathrm{Orth}(F), \quad 0 \leqslant b_{k,l} \in BL^r(E, F; G), \quad b_{k,k} = 0,\\ \sum_{l=0}^{n} \sigma_l = I_F, \quad \sum_{k=0}^{n} b_{k,l} = |b|, \quad \sum_{l=0}^{n} \sigma_l b_{k,l} = b_k \quad (k, l = 0, 1, \dots, n);\end{gathered}$$

(3) *для любого дизъюнктного набора из $n+1$ оператора $b_0, \dots, b_n \in BL^r(E, F; G)$, удовлетворяющего условию $|b| = b_0 + \dots + b_n$, существует набор ортоморфизмов $\sigma_0, \dots, \sigma_n \in \mathrm{Orth}(F)_+$ такой, что $\sigma_0 + \dots + \sigma_n = I_F$ и $\sigma_k \circ b_k = 0$ $(k = 0, 1, \dots, n)$;*

(4) *для любого дизъюнктного набора из $n+1$ оператора $b_0, \dots, b_n \in BL^r(E, F; G)$, удовлетворяющего условию $|b| = b_0 + \dots + b_n$, существует разбиение единицы $\pi_0, \dots, \pi_n$ в $\mathfrak{P}(F)$ такое, что $\pi_k \circ b_k = 0$ $(k = 0, \dots, n)$;*

(5) *b представляет собой метрически n-разложимый элемент решетки Банаха — Канторовича $\mathcal{Z}(b)$.*

$\triangleleft$ Доказательство следует из [4; теоремы 5.2.5], так как согласно 4.4 при изоморфизме из 1.5 n-дизъюнктный билинейный оператор переходит в n-дизъюнктный линенйый оператор. $\triangleright$.

4.7. Теперь основные результаты настоящего параграфа следуют непосредственно из 4.6.

(1) ***Теорема.*** *Билинейный регулярный оператор будет n-дизъюнктным в том и только в том случае, если он представим в виде суммы n билинейных регулярных операторов, сохраняющих дизъюнктность.*

$\triangleleft$ Достаточно применить 4.6 (5) и [4; теорема 2.1.11]. $\triangleright$

Билинейный оператор, n-дизъюнктный при некотором $n \in \mathbb{N}$, будем называть *полидизъюнктным.* Как видно из 4.4 и 1.5 билинейный регулярный оператор полидизъюнктен лишь, в том случае, когда он факторизуется через полидизьюнктный линейный регулярный оператор.

(2) ***Теорема.*** *Порядковый идеал в $BL^r(E, F; G)$, порожденный множеством всех решеточных биморфизмов, совпадает с множеством всех билинейных регулярных полидизъюнктных операторов.*

$\triangleleft$ Следует из (1) и 1.6. $\triangleright$

Литература

1. *Абрамович Ю. А.* Инъективные оболочки нормированных структур // Докл. АН СССР.—1971.—Т. 197, № 4.—С. 743–745.
2. *Вулих Б. З.* Введение в теорию полуупорядоченных пространств.—М.: ГИФМЛ, 1961.—407 с.
3. *Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г.* Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах.—М.; Л.: Гостехиздат, 1950.—548 с.
4. *Кусраев А. Г.* Мажорируемые операторы.—М.: Наука, 2003.—619 с.
5. *Кусраев А. Г., Шотаев Г. Н.* О билиненых мажорируемых операторах // В сб.: Исследования по комплексному анализу, теории операторов и математическому моделированию / под ред. Ю. Ф. Коробейника и А. Г. Кусраева. Владикавказ: Изд-во ВНЦ РАН, 2004.— С. 241–262.
6. *Aliprantis C. D., Burkinshaw O.* Positive operators.—New York: Acad. press, 1985.—xvi+367 p.
7. *Fremlin D. H.* Tensor product of Archimedean vector lattices // Amer. J. Math.—1972.—V. 94.—P. 777–798.
8. *Fremlin D. H.* Tensor products of Banach lattices // Math. Ann.—1974.—V. 211.—P. 87–106.
9. *van Gaans O. W.* The Riesz part of a positive bilinear from // In: Circumspice.—Nijmegen: Katholieke Universiteit Nijmegen, 2001.—P. 19–30.
10. *Kusraev A. G., Kutateladze S. S.* On the calculus of order bounded operators.—Новосибирск: Наука, 2003.—14 с.—(Препринт / РАН, Сиб. отд-ние. Ин-т мат-ки; № 123).
11. *Schaefer H. H.* Banach lattices and positive operators.—Berlin etc.: Springer, 1974.—xi+376 p.
12. *Schwarz H.-V.* Banach lattices and operators.—Leipzig: Teubner, 1984.—208 p.
13. *Zaanen A. C.* Riesz spaces. V. 2.—Amsterdam etc.: North-Holland, 1983.—720 p.

Статья поступила 10 февраля 2004 г.

Кусраев Анатолий Георгиевич, д. ф.-м. н.
г. Владикавказ, Институт прикладной
математики и информатики ВНЦ РАН
E-mail: `kusraev@alanianet.ru`

Табуев Сослан Наполеонович
г. Владикавказ, Институт прикладной
математики и информатики ВНЦ РАН
E-mail: `stabuev@alanianet.ru`