Владикавказский математический журнал
Октябрь–декабрь, 2003, Том 5, Выпуск 4

УДК **511**

О ДЗЕТА-ПОДОБНЫХ ФУНКЦИЯХ И ВЕЩЕСТВЕННОМ СЛЕДЕ КОРНЕЙ ДЗЕТА-ФУНКЦИИ РИМАНА

Ю. Ф. Коробейник

В работе описан один класс функций, аналитических в полосе $0 < \operatorname{Re} z < 1$ и удовлетворяющих функциональному уравнению Римана. В качестве приложения полученных результатов установлен, по-видимому, новый критерий справедливости известной проблемы Римана о нулях дзета-функции.

Для произвольной области $\mathcal{G}$ в $\mathbb{C}$ обозначим символом $A(\mathcal{G})$ пространство всех однозначных аналитических в $\mathcal{G}$ функций. Пусть Π — вертикальная полоса $0 < \operatorname{Re} z < 1$.

Теорема 1. *Функция вида* $y(z) = \dfrac{e^{az}\varphi(z)}{2(z-1)\Gamma(\frac{z}{2}+1)}$, *где* $a \in \mathbb{C}$ *и* $\varphi \in A(\Pi)$, *удовлетворяет в* Π *функциональному уравнению Римана*

$$y(z) = \pi^{-1}(2\pi)^z \sin\frac{\pi z}{2}\Gamma(1-z)y(1-z) \tag{1}$$

тогда и только тогда, когда функция φ *является решением* (в Π) *функционального уравнения*

$$\varphi(z) = (\pi)^{z-\frac{1}{2}}e^{a(1-2z)}\varphi(1-z). \tag{2}$$

$\lhd$ Подставим функцию $y(z)$ указанного в теореме вида в равенство (1) и заменим последовательно это равенство равносильными ему, используя известную формулу дополнения $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi/\sin\pi z$, а также равенство $\Gamma(1+z) = z\Gamma(z)$:

$$\frac{\varphi(z)\pi e^{az}}{2(z-1)\Gamma(\frac{z}{2}+1)} = \frac{(2\pi)^z\sin\frac{\pi z}{2}\Gamma(1-z)e^{a(1-z)}\varphi(1-z)}{2(-z)\Gamma(\frac{3}{2}-\frac{z}{2})};$$

$$\varphi(z)\pi e^{2az}e^{-a}z\Gamma\left(\frac{1-z}{2}\right) = 2(2\pi)^z\sin\frac{\pi z}{2}\Gamma\left(1+\frac{z}{2}\right)\Gamma(1-z)\varphi(1-z);$$

$$\varphi(z)\pi e^{2az}e^{-a}z\Gamma\left(\frac{1-z}{2}\right) = 2(2\pi)^z\sin\frac{\pi z}{2}\frac{z}{2}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\Gamma(1-z)\frac{\Gamma(1-\frac{z}{2})}{\Gamma(1-\frac{z}{2})}\varphi(1-z);$$

$$\varphi(z)\pi e^{2az-a}\Gamma\left(\frac{1-z}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{z}{2}\right) = (2\pi)^z\Gamma(1-z)\varphi(1-z).$$

По формуле удвоения Гаусса ([1]; стр. 21) $\Gamma(\frac{1-z}{2})\Gamma(1-\frac{z}{2}) = 2^z\sqrt{\pi}\Gamma(1-z)$. Отсюда, продолжая цепь равенств, эквивалентных (1), имеем

$$\varphi(z)e^{a(2z-1)} = (\pi)^{z-\frac{1}{2}}\varphi(1-z),$$

что, в свою очередь, равносильно соотношению (2). ▷

Полагая в теореме 1 $\varphi(z) \equiv 1$, получаем

Следствие 1. *Функция* $\dfrac{e^{az}}{2(z-1)\Gamma(1+\frac{z}{2})}$ *удовлетворяет уравнению Римана* (1) *тогда и только тогда, когда* $a = \frac{1}{2}\ln\pi$.

Далее, при $a = \frac{1}{2}\ln\pi$, из теоремы 1 выводим:

Следствие 2. *Функция* $\dfrac{(\pi)^{z/2}}{2(z-1)\Gamma(1+\frac{z}{2})}\psi(z)$, *где* $\psi \in A(\Pi)$, *удовлетворяет уравнению Римана* (1) *тогда и только тогда, когда* $\psi(z) = \psi(1-z)$ *для любого* $z \in \Pi$.

Справедливо также

Следствие 3. *Функция вида* $\dfrac{e^{az}}{2(z-1)\Gamma(1+\frac{z}{2})}\varphi(z)$, *где* $a \in \mathbb{C}$, $\varphi \in A(\Pi)$ *и* $\varphi(z) = \varphi(1-z)$ *для любого* $z \in \Pi$, *удовлетворяет уравнению* (1) *тогда и только тогда, когда* $a = \frac{1}{2}\ln\pi$.

Функцию вида $h_a^W(z) := \dfrac{e^{az}}{2(z-1)\Gamma(1+\dfrac{z}{2})}W(z)$ назовем *дзета-подобной*, если $a \in \mathbb{C}$, $W \in A(\mathbb{C})$ и W — каноническое произведение, построенное по множеству нулей с такими свойствами:

1) все нули W лежат в Π;

2) пусть z_0 — произвольный нуль W кратности n_0; тогда $\bar{z}_0$ и $1-z_0$ (а, следовательно, и $1-\bar{z}_0$) — нули W той же кратности;

3) если $\{z_k\}_{k\in\Phi}$ — все нули W (Φ — конечное или счетное множество) и n_k — кратность нуля z_k, $k \geqslant 1$, то $\sum_{k\in\Phi} \dfrac{n_k}{|z_k|^{1+\varepsilon}} < \infty$ для любого $\varepsilon > 0$.

Положим

$$\Phi_1 = \left\{k \in \Phi :\ \operatorname{Re} z_k = \frac{1}{2}\right\}; \quad \Phi_2 = \left\{k \in \Phi :\ \operatorname{Re} z_k = \sigma_k \neq \frac{1}{2}\right\};$$

$$\Phi_3 = \left\{k \in \Phi_1 :\ z_k = \frac{1}{2} + i\lambda_k,\ 0 < \lambda_k < +\infty\right\};$$

$$\Phi_4 = \left\{k \in \Phi_2 :\ z_k = \sigma_k + i\lambda_k,\ 0 < \sigma_k < \frac{1}{2},\ 0 < \lambda_k < +\infty\right\};$$

$$S_1^W = \sum_{k\in\Phi_3}\left(\frac{1}{z_k} + \frac{1}{\bar{z}_k}\right)n_k;$$

$$S_2^W = \sum_{k\in\Phi_4}\left(\frac{1}{z_k} + \frac{1}{\bar{z}_k} + \frac{1}{1-z_k} + \frac{1}{1-\bar{z}_k}\right)n_k;$$

$$V_1(z) = \prod_{k\in\Phi_3}\left[\left(1-\frac{z}{z_k}\right)\left(1-\frac{z}{\bar{z}_k}\right)\right]^{n_k};$$

$$V_2(z) = \prod_{k\in\Phi_4}\left[\left(1-\frac{z}{z_k}\right)\left(1-\frac{z}{\bar{z}_k}\right)\left(1-\frac{z}{1-z_k}\right)\left(1-\frac{z}{1-\bar{z}_k}\right)\right]^{n_k}.$$

Имеем $W(z)=V_1(z)V_2(z)e^{(S_1^W+S_2^W)z}$ для любого $z\in\mathbb{C}$. Далее, для тех же z

$$\begin{aligned}V_1(1-z)&=\prod_{k\in\Phi_3}\left[\left(1-\frac{1-z}{\frac12+i\lambda_k}\right)\left(1-\frac{1-z}{\frac12-i\lambda_k}\right)\right]^{n_k}\\&=\prod_{k\in\Phi_3}\left(\frac{i\lambda_k-\frac12+z}{\frac12+i\lambda_k}\right)^{n_k}\left(\frac{-i\lambda_k-\frac12+z}{\frac12-i\lambda_k}\right)^{n_k}\\&=\prod_{k\in\Phi_3}\left(\frac{-i\lambda_k+\frac12-z}{\frac12-i\lambda_k}\right)^{n_k}\left(\frac{\frac12+i\lambda_k-z}{\frac12+i\lambda_k}\right)^{n_k}\\&=\prod_{k\in\Phi_3}\left(1-\frac{z}{\frac12-i\lambda_k}\right)^{n_k}\left(1-\frac{z}{\frac12+i\lambda_k}\right)^{n_k}=V_1(z).\end{aligned}$$

Аналогично показывается, что $V_2(z)=V_2(1-z)$ для всех $z\in\mathbb{C}$. Таким образом, если $h_a^W(z)$ — дзета-подобная функция, то $W(z)=V(z)e^{bz}$, где $V(z)\in A(\mathbb{C})$, $V(z)=V(1-z)$ для любого $z\in\mathbb{C}$ и $b=S_1^W+S_2^W$. Согласно следствию 3 имеем:

Следствие 4. *Если* $h_a^W(z):=\dfrac{e^{az}}{2(z-1)\Gamma(1+\frac{z}{2})}W(z)$ *— дзета-подобная функция, то она удовлетворяет уравнению Римана* (1) *тогда и только тогда, когда* $S_1^W+S_2^W+a=\frac12\ln\pi$.

Заметим, что если h_a^W — дзета-подобная функция, то множества Φ_1 и Φ_2 (подавно Φ_3 и Φ_4) не более, чем счетны; при этом $\Phi=\Phi_1\cup\Phi_2$ и множество Φ_j при $j=1,2$ может содержать конечное число номеров или даже быть пустым.

Кроме того,

$$S_1^W=\sum_{k\in\Phi_3}\frac{4n_k}{1+4\lambda_k^2};\qquad S_2^W=\sum_{k\in\Phi_4}2\left(\frac{\sigma_k}{\sigma_k^2+\lambda_k^2}+\frac{1-\sigma_k}{\lambda_k^2+(1-\sigma_k)^2}\right)n_k.$$

Как легко проверить,

$$S_1^W=2\sum_{k\in\Phi_3}n_k\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z_k}\right);\qquad S_2^W=2\sum_{k\in\Phi_4}n_k\left(\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z_k}\right)+\mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-z_k}\right)\right).$$

Поэтому выражение $S_1^W+S_2^W$ естественно назвать вещественным следом корней функции h_a^W (в Π).

Безусловно, самым важным примером дзета-подобной функции является сама дзета-функция Римана. Действительно, согласно формуле (6) из [2; гл. II, стр. 40]

$$\zeta(z)=\frac{e^{bz}}{2(z-1)\Gamma(1+\frac{z}{2})}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_k}\right)^{n_k}e^{\frac{zn_k}{z_k}},$$

где $b=\ln 2\pi-1-\frac{\gamma}{2}$, γ — постоянная Эйлера — Маскерони ($\gamma\approx 0,5772$) и z_k — все попарно различные нетривиальные нули $\zeta(z)$, т. е., нули отличные от $-2m, m=1,2,\dots$; все они лежат, как известно (см. [2]), в полосе Π.

Согласно результату Харди от 1914 года (см., например, [2; гл. X, п. 2]) множество Φ_1 (подавно Φ) для функции $\zeta(z)$ бесконечно. Что же касается множества Φ_2, то согласно знаменитой гипотезе Римана, в случае функции $h_a^W(z)=\zeta(z)$ оно должно быть пустым. В связи с этим определенный интерес представляет

Теорема 2. *Пусть* z_k $(k = 1, 2, \dots)$ *— нуль* $\zeta(z)$ *кратности* n_k*, лежащий на прямой* L*:* $\mathrm{Re}\, z = \frac{1}{2}$*. Гипотеза Римана справедлива тогда и только тогда, когда* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{n_k}{|z_k|^2} = \delta$*, где* $\delta := 1 + \frac{\gamma}{2} - \ln 2 - \frac{1}{2} \ln \pi$.

$\lhd$ Пусть

$$W_0(z) := \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_k}\right)^{n_k};$$

$$S_1^{W_0} := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n_k}{|z_k|^2}; \qquad S_2^{W_0} := 2 \sum_{k \in \Phi_4} \left[\frac{\sigma_k}{\sigma_k^2 + \lambda_k^2} + \frac{1 - \sigma_k}{(1 - \sigma_k)^2 + \lambda_k^2}\right],$$

где $z_k = \sigma_k + i\lambda_k$, $\sigma_k = \frac{1}{2}$, $\forall k \in \Phi_3 = \{1, 2, \dots\}$ и $\sigma_k \in (0, \frac{1}{2})$, $\lambda_k > 0$, $\forall k \in \Phi_4$.

Согласно следствию 4 $S_1^{W_0} + S_2^{W_0} = \delta$. Очевидно, что $S_2^{W_0} = 0 \Leftrightarrow S_1^{W_0} = \delta$. Далее, так как каждое слагаемое в сумме

$$S_2^{W_0} := 2 \sum_{k \in \Phi_4} \left[\frac{\sigma_k}{\sigma_k^2 + \lambda_k^2} + \frac{1 - \sigma_k}{(1 - \sigma_k)^2 - \lambda_k^2}\right] n_k$$

положительно, то $S_2^{W_0} = 0$ тогда и только тогда, когда все слагаемые этой суммы отсутствуют, т. е., когда все нули $\zeta(z)$ в полосе Π лежат на прямой L. $\rhd$

Доказанный критерий вряд ли можно назвать эффективным. Однако он указывает на одно, принципиально важное, по нашему мнению обстоятельство. Именно, для проверки справедливости гипотезы Римана достаточно знать лишь те (но все те!) нули $\zeta(z)$, которые лежат на L (точнее, достаточно знать значение одной их характеристики, а именно, величины $S_1^{W_0}$).

Заметим еще, что легко привести пример дзета-подобной функции, для которой гипотеза Римана несправедлива, но которая удовлетворяет уравнению Римана. Для этого достаточно, например, взять любую дзета-подобную функцию, у которой множество Φ_2 непусто и содержит конечное число номеров (и, следовательно, $V_2(z)$ — многочлен), причем $S_1^W + S_2^W + a = \frac{1}{2} \ln \pi$.

Литература

1. *Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н.* Курс современного анализа. ч. II. Трансцендентные функции.—М.: ГИФМЛ, 1963.—515 с.
2. *Титчмарш Е. К.* Теория дзета-функции Римана.—М: Изд-во ИЛ, 1953.—407 с.

Статья поступила 8 декабря 2003 г.

Коробейник Юрий Федорович, д. ф.-м. н.
г. Ростов-на-Дону, Лаборатория математических исследований
ИПМИ ВНЦ РАН и ЮРГУЭС; кафедра математического анализа РГУ.
E-mail: kor@math.rsu.ru