Владикавказский математический журнал
Октябрь–декабрь, 2003, Том 5, Выпуск 4

УДК **517.98**

СВОЙСТВА СХОДИМОСТИ ПО МЕРЕ НА ЙОРДАНОВЫХ АЛГЕБРАХ

И. Г. Ганиев, А. К. Каримов

В работе продолжается изучение свойств топологии сходимости по мере на йордановых алгебрах. Дается явный вид метрики на йордановой алгебре, которая определяет топологию сходимости по мере.

В работах [1–3] было введено понятие OJ-алгебры и изучены свойства этих алгебр. В частности, OJ-алгебру можно рассматривать как объект, описывающий в аксиоматической форме пространство измеримых элементов относительно JBW-алгебры. В [1, 2] рассматривалась также топология сходимости по мере, в частности, в [1] доказано, что в этой топологии OJ-алгебра является топологическим кольцом. В [2] рассмотрена $\mathbb{R}$ топология на OJ-алгебрах, описаны условия ее существования, единственности и метризуемости.

В настоящей работе продолжается изучение свойств топологии сходимости по мере на йордановых алгебрах. Дается явный вид метрики на йордановой алгебре, которая определяет топологию сходимости по мере. В случае алгебр фон Неймана аналогичный вопрос рассматривался в работе [6].

Пусть $(A, \|\cdot\|)$ — JBW-алгебра с точным нормальным конечным следом τ, $S(A)$ — OJ-алгебра измеримых элементов относительно A (см. [1]).

Определение 1. Элемент $a \in S(A)$ назовем *τ-измеримым* если в спектральном разложении $a = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda\, de_\lambda$ идемпотенты ${e_\lambda}^\perp$ и $e_{-\lambda}$ имеют конечную меру т. е. $\tau({e_\lambda}^\perp) < \infty$ и $\tau(e_{-\lambda}) < \infty$ при некотором λ. Через $K(A)$ обозначим множество всех τ-измеримых элементов из $S(A)$.

Определение 2. Для любого $a \in K(A)$ значения функции

$$a(\alpha) = \inf\{\lambda \in [0, \infty] : \tau(1 - e_\lambda) \leqslant \alpha\} \ (\alpha > 0),$$

где $|a| = \int\limits_{0}^{\infty} \lambda\, de_\lambda$, $|a| = \sqrt{a^2}$, называются *обобщенными s-числами* элемента a. Через «$\circ$» обозначим йорданово произведение в $S(A)$.

Предложение 1. *Имеют место следующие утверждения:*

(1) *функция $a(\alpha)$ невозрастающая, непрерывная справа и*

$$\lim_{\alpha \downarrow 0} a(\alpha) = \|a\| \in [0, \infty], \ \ a \in K(A);$$

(2) *для любой строго возрастающей непрерывной функции* g *на* $[0,\infty)$ *такой, что* $g(0)\geqslant 0$ *имеет место*

$$g(|a|)(\alpha)=g(|a|(\alpha)),$$

при всех $a\in K(A)$, $\alpha>0$;

(3) $a(\alpha)=0$ *для* $\alpha\geqslant\tau(\operatorname{supp}|a|)$ *и для любого* $a\in K(A)$;

(4) $a(\alpha)=|a|(\alpha)$ *и* $(\beta a)(\alpha)=|\beta|a(\alpha)$, *где* $a\in K(A)$, $\beta\in\mathbb{R}$, $\alpha>0$;

(5) $(a+b)(\alpha+\beta)\leqslant a(\alpha)+b(\beta)$ *для всех* $a,b\in K(A)$ *и* $\alpha,\beta>0$;

(6) $a(\alpha)\leqslant b(\alpha)$, *если* $0\leqslant a\leqslant b$, $\alpha>0$;

(7) $(a\circ b)(\alpha)\leqslant\|b\|a(\alpha)$ *для всех* $a\in K(A)$, $b\in A$.

(8) *если* $a\in A$, $a\geqslant 0$, *то* $\tau(a)=\int\limits_0^\infty a(\alpha)\,d\alpha$, *в частности,*

$$\|a\|_p=\left(\int\limits_0^\infty a^p(\alpha)\,d\alpha\right)^{1/p};$$

(9) *если* $a,b\in A$, *то*

$$\int\limits_0^t f((a+b)(\alpha))\,d\alpha\leqslant\int\limits_0^t f(a(\alpha)+b(\alpha))\,d\alpha\ \ (t>0)$$

для любой возрастающей непрерывной выпуклой функции f;

(10) *если* f *возрастающая вогнутая функция на* $[0,\infty]$ *и* $f(0)=0$, *то*

$$\int\limits_0^t f((a+b)(\alpha)\,d\alpha\leqslant\int\limits_0^t f(a(\alpha))\,d\alpha+\int\limits_0^t f(b(\alpha))\,d\alpha.$$

$\lhd$ (9): Рассмотрим JBW-алгебру $J(a,b)$, порожденную элементами a и b. По предложению 3.9 [3, стр. 26] она изоморфна обратимой JW-алгебре. Тогда след τ можно продолжить до обертывающей $J(a,b)$ алгебры фон Неймана $W(J(a,b))$. Из единственности спектрального семейства следует, что s-числа для элементов a и b в $W(J(a,b))$ и в $J(a,b)$ совпадают, поэтому требуемое неравенство, справедливое в $W(J(a,b))$ в силу [4], верно и в $J(a,b)$.

Остальные утверждения предложения 1 доказываются аналогично. $\rhd$

Определение 3 (см. [1]). Топологией сходимости по мере на $K(A)$ называется отделимая векторная топология t, в которой базис окрестностей нуля образуют множества вида $N(\varepsilon,\delta)$ $(\varepsilon,\delta>0)$, где

$$N(\varepsilon,\delta)=\bigl\{a\in K(A):\exists p\in\nabla,U_pa\in A,\|U_pa\|\leqslant\varepsilon,\tau(p^\perp)\leqslant\delta\bigr\}.$$

Здесь $U_p:K(A)\to K(A)$ — линейное отображение, определяемое равенством

$$U_xy=2x\circ(x\circ y)-x^2\circ y.$$

∇ — булева алгебра всех идемпотентов в A. Если A специальна, то $U_xy=xyx$, где xy — ассоциативное произведение элементов x и y.

Сходимость в топологии t обозначим как $a_n\xrightarrow{t}a$ и назовем ее сходимостью по мере.

Предложение 2 (см. [5]). *Если $a_n, a \in K(A)$, то справедливы утверждения:*

(i) $a_n \xrightarrow{t} a$ *тогда и только тогда, когда* $(a_n - a)(\alpha) \to 0 \quad (\alpha > 0)$;

(ii) *если* $a_n \xrightarrow{t} a$, *то* $f(a_n) \xrightarrow{t} f(a)$ *для любой действительной непрерывной функции* f.

Отделимую векторную топологию ω на $K(A)$ будем называть $\mathbb{R}$-*топологией*, если выполняются следующие условия:

I. (1) для любой окрестности нуля W существует окрестность нуля $V \subset W$ такая, что из $0 \leqslant x \leqslant y \in V$, следует $x \in V$;

(2) если $y \in V$, $s^2 = \mathbf{1}$, $p \in \nabla$, то $U_s(y) \in V$ и $U_p(y) \in V$ (такие окрестности V называют нормальными), где $\mathbf{1}$ — единица алгебры $K(A)$;

II. для любой сети идемпотентов $\{e_\alpha\}$, убывающей к нулю, $e_\alpha \xrightarrow{\omega} 0$;

III. если $\{e_\alpha\} \subset \nabla$, $e_\alpha \xrightarrow{\omega} 0$, то для любой сети $\{x_\alpha\}$ элементов из $K(A)$ сеть $\{x_\alpha \circ e_\alpha\}$ сходится к нулю в топологии ω.

Предложение 3 (см. [2]). *В топологической OJ-алгебре $(K(A), \omega)$ справедливы утверждения:*

(1) $\mathbb{R}$-*топология ω совпадает с топологией сходимости по мере;*

(2) *ω метризуема тогда и только тогда, когда $K(A)$ счетного типа.*

Теорема 1. *Отображение $\rho : A \times A \to [0, \infty)$, определенное равенством*

$$\rho(x, y) = \tau\left(\frac{|x - y|}{\mathbf{1} + |x - y|}\right)$$

является метрикой на A.

$\lhd$ Проверим аксиомы метрики.

1) Очевидно, что $\rho(x, y) \geqslant 0$. Если $\rho(x, y) = 0$, то в силу точности τ получим, что $\dfrac{|x - y|}{\mathbf{1} + |x - y|} = 0$, т. е. $x = y$. Обратно, если $x = y$, то, очевидно, $\rho(x, y) = 0$.

2) Очевидно.

3) Пусть $x, y \in A$, тогда $\rho(x, y) = \tau\left(\dfrac{|x - y|}{\mathbf{1} + |x - y|}\right) = \int\limits_0^\infty \left(\dfrac{|x - y|}{\mathbf{1} + |x - y|}\right)(\alpha)\, d\alpha$. Так как функция $f(t) = \dfrac{t}{1 + t}$ возрастает, непрерывна на $[0, +\infty)$ и $f(0) = 0$, то из предложения 1 (2) следует, что

$$\rho(x, y) = \int\limits_0^\infty \frac{|x - y|(\alpha)}{1 + |x - y|(\alpha)}\, d\alpha = \int\limits_0^\infty \frac{(x - y)(\alpha)}{1 + (x - y)(\alpha)}\, d\alpha = \int\limits_0^\infty \frac{(x - z + z - y)(\alpha)}{1 + (x - z + z - y)(\alpha)}\, d\alpha.$$

Далее, из утверждения (10) предложения 1 следует, что

$$\rho(x, y) \leqslant \int\limits_0^\infty \frac{(x - z)(\alpha)}{1 + (x - z)(\alpha)}\, d\alpha + \int\limits_0^\infty \frac{(z - y)(\alpha)}{1 + (z - y)(\alpha)}\, d\alpha = \rho(x, z) + \rho(y, z).$$

Теорема доказана. $\rhd$

Через t_1 обозначим отделимую топологию в A, порожденную метрикой ρ. Покажем, что t_1 наделяет A структурой топологического векторного пространства. Так как $\rho((x - y), 0) = \rho(x, y)$, то операция сложения непрерывна в топологии t_1. Пусть $\lambda_n \to \lambda$, $\lambda_n, \lambda \in \mathbb{R}$, $x \in A$. Тогда

$$\rho((\lambda_n - \lambda)x, 0) = |\lambda_n - \lambda|\tau\left(\frac{|x|}{\mathbf{1} + |\lambda_n - \lambda||x|}\right) \leqslant |\lambda_n - \lambda|\tau(|x|) \to 0.$$

Следовательно, $\lambda_n x \xrightarrow{t_1} \lambda x$. Пусть $x_n \xrightarrow{t_1} 0$, $x_n \in A$, $\lambda_n \in \mathbf{1}$, $|\lambda_n| \leqslant 2^m$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Тогда

$$\rho(\lambda_n x_n, 0) = \tau\left(\frac{|\lambda_n||x_n|}{\mathbf{1} + |\lambda_n||x_n|}\right) \leqslant \tau\left(\frac{2^m|x_n|}{\mathbf{1} + 2^m|x_n|}\right) \leqslant 2^m \tau\left(\frac{|x_n|}{\mathbf{1} + |x_n|}\right) \to 0,$$

т. е. $\lambda_n x_n \xrightarrow{t_1} 0$.

Аналогично, если $x_n \xrightarrow{t_1} x$, то $\lambda x_n \xrightarrow{t_1} \lambda x$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}$.

Отсюда и из равенства $\lambda_n x_n - \lambda x = \lambda(x_n - x) + (\lambda_n - \lambda)x + (\lambda_n - \lambda)(x_n - x)$ следует, что операция умножения на скаляр непрерывна в топологии t_1.

Предложение 4. *Топология t_1 на A является $\mathbb{R}$ топологией.*

$\lhd$ I. (1): Пусть $0 \leqslant x \leqslant y$ и $\rho(y, 0) < \varepsilon$. Так как функция $f(\alpha) = \frac{\alpha}{1 + \alpha}$ возрастающая, а след τ положителен, то

$$\rho(x, 0) = \tau\left(\frac{x}{\mathbf{1} + x}\right) = \int\limits_0^\infty \frac{|x|(\alpha)}{1 + |x|(\alpha)}\, d\alpha \leqslant \int\limits_0^\infty \frac{|y|(\alpha)}{1 + |y|(\alpha)}\, d\alpha = \rho(y, 0) < \varepsilon.$$

(2): Так как любая двухпорожденная подалгебра специальна, то при $\rho(y, 0) < \varepsilon$, $p \in \nabla$ выполнены равенства

$$\rho(U_p x, 0) = \tau\left(\frac{|pxp|}{\mathbf{1} + |pxp|}\right) = \int\limits_0^\infty \frac{(pxp)(\alpha)}{1 + (pxp)(\alpha)}\, d\alpha$$

$$\leqslant \int\limits_0^\infty \frac{\|p\|^2 x(\alpha)}{1 + \|p\|^2 x(\alpha)}\, d\alpha = \tau\left(\frac{|x|}{\mathbf{1} + |x|}\right) = \rho(x, 0) < \varepsilon.$$

Аналогично, если $s^2 = \mathbf{1}$, то $\rho(U_s x, 0) < \varepsilon$.

II: Пусть $e_\alpha \downarrow 0$. Тогда $\rho(e_\alpha, 0) = \tau\left(\dfrac{e_\alpha}{\mathbf{1} + e_\alpha}\right) = \frac{1}{2}\tau(e_\alpha) \to 0$, т. е. $e_\alpha \xrightarrow{t_1} 0$.

III: Пусть $\{e_\alpha\} \subset \nabla$, $e_\alpha \xrightarrow{t_1} 0$, т. е. $\rho(e_\alpha, 0) \to 0$. Тогда

$$\frac{1}{2}\tau(e_\alpha) = \tau\left(\frac{e_\alpha}{\mathbf{1} + e_\alpha}\right) \to 0, \text{ т. е. } \tau(e_\alpha) \to 0.$$

Так как

$$0 \leqslant \frac{|x_\alpha \circ e_\alpha|}{\mathbf{1} + |x_\alpha \circ e_\alpha|} \leqslant \mathbf{1},$$

то для $x_\alpha \in A$ будет

$$0 \leqslant \frac{e_\alpha |x_\alpha \circ e_\alpha| e_\alpha}{\mathbf{1} + |x_\alpha \circ e_\alpha|} \leqslant e_\alpha \mathbf{1} e_\alpha = e_\alpha.$$

Отсюда выводим

$$\rho(x_\alpha \circ e_\alpha, 0) = \tau\left(\frac{|x_\alpha \circ e_\alpha|}{\mathbf{1} + |x_\alpha \circ e_\alpha|}\right) = \tau\left(\frac{e_\alpha |x_\alpha \circ e_\alpha| e_\alpha}{\mathbf{1} + |x_\alpha e_\alpha|}\right) \leqslant \tau(e_\alpha) \to 0,$$

т. е. $x_\alpha \circ e_a \xrightarrow{t_1} 0$. Следовательно, t_1 является $\mathbb{R}$ топологией на A.

Из предложений 3 и 4 следует, что топологии t и t_1 совпадают на A.

Известно (см. [1]), что A плотно в OJ-алгебре $K(A)$ τ-измеримых элементов, присоединенных к A, относительно топологии сходимости по мере, т. е. можно считать, что

$K(A)$ есть замыкание A в топологии t. Поэтому ρ продолжается до метрики $\tilde{\rho}$ на $K(A)$, порождающей топологию t.

Предложение 5. *Пусть $a_n \in A$, $\|a_n\| \leqslant 1$, $a_n \xrightarrow{t} a$. Тогда $\tau(a_n) \to \tau(a)$.*

$\lhd$ Пусть $a = 0$, $\varepsilon > 0$. Тогда существуют номер $n(\varepsilon)$ и $p \in \nabla$ такие, что $\tau(p^{\perp}) < \frac{\varepsilon}{2}$ и $\|U_p a_n\| < \frac{\varepsilon}{2}$ для всех $n > n(\varepsilon)$. Если $a_n = |a_n| \circ s_n$ полярное разложение a_n, где s_n — симметрия в A (т. е. $s_n^2 = \mathbf{1}, \|s_n\| = 1$), то

$$\begin{aligned}|\tau(a_n)| &\leqslant \tau(|a_n|) = \tau(|a_n| \circ p + |a_n| \circ p^{\perp}) = \tau(a_n \circ s_n \circ p) + \tau(a_n \circ s_n \circ p^{\perp}) \\ &\leqslant \|s_n\| \tau(U_p a_n) + \|a_n\| \|s_n\| \tau(p^{\perp}) \leqslant \|U_p a_n\| + \tau(p^{\perp}) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,\end{aligned}$$

т. е. $\tau(a_n) \to 0$ при $n \to \infty$.

Теорема 2. *Метрика $\tilde{\rho}$ имеет вид*

$$\tilde{\rho}(x,y) = \tau\left(\frac{|x-y|}{\mathbf{1} + |x-y|}\right) \qquad (x, y \in K(A)).$$

$\lhd$ Пусть $x, y \in K(A)$ и $x_n, y_n \in A$, такие что $x_n \xrightarrow{\tilde{\rho}} x$, $y_n \xrightarrow{\tilde{\rho}} y$. Тогда $x_n \to x$, $y_n \to y$ в $\mathbb{R}$-топологии. Из предложения 2 следует, что

$$\frac{|x_n - y_n|}{\mathbf{1} + |x_n - y_n|} \xrightarrow{t} \frac{|x-y|}{\mathbf{1} + |x-y|},$$

т. е.

$$\frac{|x_n - y_n|}{\mathbf{1} + |x_n - y_n|} \xrightarrow{\tilde{\rho}} \frac{|x-y|}{\mathbf{1} + |x-y|}.$$

Так как $0 \leqslant \dfrac{|x_n - y_n|}{\mathbf{1} + |x_n - y_n|} \leqslant \mathbf{1}$, то в силу предложения 5

$$\tau\left(\frac{|x_n - y_n|}{\mathbf{1} + |x_n - y_n|}\right) \to \tau\left(\frac{|x-y|}{\mathbf{1} + |x-y|}\right).$$

Из

$$\tilde{\rho}(x,y) = \lim_n \rho(x_n, y_n) = \lim_n \tau\left(\frac{|x_n - y_n|}{\mathbf{1} + |x_n - y_n|}\right) = \tau\left(\frac{|x-y|}{\mathbf{1} + |x-y|}\right)$$

следует, что

$$\tilde{\rho}(x,y) = \tau\left(\frac{|x-y|}{\mathbf{1} + |x-y|}\right).$$

Теорема доказана. $\rhd$

Пусть A-обратимая JW-алгебра (т. е. йордонова алгебра ограниченных самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве), τ-точный нормальный конечный след на A, $K(A)$ — OJ-алгебра τ-измеримых операторов, присоединенных к A, $W(A)$-обертывающая алгебра фон Неймана для A. Продолжение τ до $W(A)$ является точным нормальным конечным следом τ_1 (см. [3]). Через $K(W)$ обозначим кольцо τ_1-измеримых операторов присоединенных к алгебре $W(A)$. Ясно что, $K(A) \subset K(W)$.

Следствие. *Пусть $x_n, x \in K(A)$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$. Тогда x_n сходится по мере к x в $K(A)$ тогда и только тогда, когда x_n сходится по мере к x в $K(W)$.*

Теорема 3. *Метрика $\tilde{\rho}$ обладает следующими свойствами:*

(1) *$\tilde{\rho}(x + y, 0) = \tilde{\rho}(x, 0) + \tilde{\rho}(y, 0)$, где $x, y \in A^{+} = \{x \in A : x \geqslant 0\}$, $xy = 0$;*

(2) $\tilde{\rho}(\lambda e,0)=\dfrac{2|\lambda|}{1+|\lambda|}\tilde{\rho}(e,0)$, $\lambda\in\mathbb{R}$, $e\in\nabla$;

(3) $\tilde{\rho}(x\circ e,0)\leqslant\dfrac{2\|x\|}{1+\|x\|}\tilde{\rho}(e,0)$, $x\in A$, $e\in\nabla$;

(4) *если* $a\in A$, $x\in K(A)$, *то существует такое натуральное число* n, *что* $\tilde{\rho}(a\circ x,0)\leqslant 2^n\tilde{\rho}(x,0)$;

(5) *если* $s\in A$ *и* $s^2=\mathbf{1}$, *то* $\tilde{\rho}(U_sx,U_sy)=\tilde{\rho}(x,y)$.

$\lhd$ (1): Пусть $x,y\in A^+$, $x\circ y=0$. Тогда $x\circ(\mathbf{1}+x+y)=x+x^2=x\circ(\mathbf{1}+x)$ и $y\circ(\mathbf{1}+x+y)=y+y^2=y\circ(\mathbf{1}+y)$. Отсюда

$$\frac{x}{\mathbf{1}+x}=\frac{x}{\mathbf{1}+x+y},\quad \frac{y}{\mathbf{1}+y}=\frac{y}{\mathbf{1}+x+y},$$

$$\frac{x+y}{\mathbf{1}+x+y}=\frac{x}{\mathbf{1}+x}+\frac{y}{\mathbf{1}+y}.$$

Следовательно,

$$\tilde{\rho}(x+y,0)=\tau\left(\frac{x+y}{\mathbf{1}+x+y}\right)=\tau\left(\frac{x}{\mathbf{1}+x}\right)+\tau\left(\frac{y}{\mathbf{1}+y}\right)=\tilde{\rho}(x,0)+\tilde{\rho}(y,0).$$

(2): Так как $(|\lambda|e)/(\mathbf{1}+|\lambda|)=(|\lambda|e)/(\mathbf{1}+|\lambda|e)$ и $\tau(e)=2\rho(e,0)$, то

$$\tilde{\rho}(\lambda e,0)=\tau\left(\frac{|\lambda|e}{\mathbf{1}+|\lambda|e}\right)=\tau\left(\frac{|\lambda|}{\mathbf{1}+|\lambda|}e\right)=\frac{|\lambda|}{\mathbf{1}+|\lambda|}\tau(e)=\frac{2|\lambda|}{\mathbf{1}+|\lambda|}\tilde{\rho}(e,0).$$

(3): Пусть $x\in A$ и $e\in\nabla$. Тогда

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}(x\circ e,0)&=\tau\left(\frac{|x|\circ e}{\mathbf{1}+|x|\circ e}\right)=\int\limits_0^\infty\left(\frac{|x|\circ e}{\mathbf{1}+|x|\circ e}\right)(\alpha)\,d\alpha=\int\limits_0^\infty\frac{(x\circ e)(\alpha)}{1+(x\circ e)(\alpha)}\,d\alpha\\&\leqslant\int\limits_0^\infty\frac{\|x\|e(\alpha)}{1+\|x\|e(\alpha)}\,d\alpha=\int\limits_0^\infty\frac{(\|x\|e)(\alpha)}{1+(\|x\|e)(\alpha)}\,d\alpha=\int\limits_0^\infty\left(\frac{\|x\|e}{\mathbf{1}+\|x\|e}\right)(\alpha)\,d\alpha\\&=\tau\left(\frac{\|x\|e}{\mathbf{1}+\|x\|e}\right)=\tilde{\rho}(\|x\|e,0)=\frac{2\|x\|}{1+\|x\|}\tilde{\rho}(e,0).\end{aligned}$$

(4): Пусть $a\in A$, $x\in K(A)$. Выберем такое натуральное число n, что $\|a\|\leqslant 2^n$. Тогда

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}(a\circ x,0)&=\tau\left(\frac{|a\circ x|}{\mathbf{1}+|a\circ x|}\right)=\int\limits_0^\infty\frac{|a\circ x|}{\mathbf{1}+|a\circ x|}(\alpha)\,d\alpha=\int\limits_0^\infty\frac{|a\circ x|(\alpha)}{1+|a\circ x|(\alpha)}\,d\alpha\\&\leqslant\int\limits_0^\infty\frac{2^nx(\alpha)}{1+2^nx(\alpha)}\,d\alpha\leqslant 2^n\int\limits_0^\infty\frac{x(\alpha)}{1+x(\alpha)}\,d\alpha=2^n\tilde{\rho}(x,0).\end{aligned}$$

(5): Так как

$$|U_sx|^2=|sxs|^2=(sxs)\circ(sxs)=s|x|^2s=s|x||x|s=s|x|s\circ s|x|s=(U_s|x|)^2,$$

то $|U_sx|=U_s|x|$. Поэтому

$$\tilde{\rho}(U_sx,U_sy)=\tau\left(\frac{|U_sx-U_sy|}{\mathbf{1}+|U_sx-U_sy|}\right)=\int\limits_0^\infty\left(\frac{|U_sx-U_sy|}{\mathbf{1}+|U_sx-U_sy|}\right)(\alpha)\,d\alpha$$

$$= \int\limits_0^\infty \left(\frac{|U_s(x-y)|}{\mathbf{1}+|U_s(x-y)|}\right)(\alpha)\,d\alpha = \int\limits_0^\infty \left(\frac{U_s|x-y|}{\mathbf{1}+U_s|x-y|}\right)(\alpha)\,d\alpha$$

$$= \int\limits_0^\infty \left(\frac{s|x-y|s}{\mathbf{1}+s|x-y|s}\right)(\alpha)\,d\alpha = \int\limits_0^\infty (s|x-y|s)\circ((s^2+s|x-y|s)^{-1})(\alpha)\,d\alpha$$

$$= \int\limits_0^\infty (s|x-y|s)\circ((s(\mathbf{1}+|x-y|)s)^{-1})(\alpha)\,d\alpha = \int\limits_0^\infty ((s|x-y|s)\circ(s(\mathbf{1}+|x-y|)^{-1}s))(\alpha)\,d\alpha$$

$$= \int\limits_0^\infty (s|x-y|(\mathbf{1}+|x-y|)^{-1}s)(\alpha)d\alpha = \int\limits_0^\infty \left(s\frac{|x-y|}{\mathbf{1}+|x-y|}s\right)(\alpha)\,d\alpha$$

$$= \tau\left(s\frac{|x-y|}{\mathbf{1}+|x-y|}s\right) = \tau\left(\frac{|x-y|}{\mathbf{1}+|x-y|}\right) = \tilde{\rho}(x,y).$$

Теорема доказана. ▷

Авторы благодарны профессору В. И. Чилину за полезное обсуждение результатов.

Литература

1. *Аюпов Ш. А.* Интегрирование на йордановых алгебрах // Изв. АН СССР. Сер. Матем.—1983.—Т. 47, № 1.—С. 3–25.
2. *Аюпов Ш. А., Усманов Ш. М.* Порядок и топология в йордановых алгебрах.—М., 1980.—75 с. Деп. в ВИНИТИ № 4232-80.
3. *Аюпов Ш. А.* Классификация и представление упорядоченных йордановых алгебр.—Ташкент: Фан, 1986.—124 с.
4. *Fack T., Kosaki H.* Generalized s-numbers of τ-measurable operators // Pac. J. Math.—1986.—V. 123, № 2.—P. 269–300.
5. *Каримов А. К.* Субаддитивные меры на йордановых алгебрах // Узб. мат. журн.—1993.—№ 4.—С. 42–47.
6. *Ганиев И., Чилин В. И.* Измеримые расслоения $*$-алгебр измеримых операторов // Узб. мат. журн.—2001.—№ 1.— С. 8–13.

Статья поступила 25 августа 2003 г.

Ганиев Иномжан Гуломжанович, д. ф.-м. н.
Узбекистан, г. Ташкент,
Ташкентский институт инженеров железнодорожного транспорта
E-mail: inam@comuz.uz

Каримов Абдусалом Кодиралиевич, к. ф.-м. н.
Узбекистан, г. Ташкент,
Ташкентский институт текстильной и легкой промышленности