Владикавказский математический журнал
Октябрь–декабрь, 2003, Том 5, Выпуск 4

УДК **517.927**

ВЗВЕШЕННАЯ ПРОИЗВОДНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

М. С. Бичегкуев

В работе рассматривается взвешенная производная и связанная с ней специальная форма дифференциальных уравнений. Устанавливается связь и приводимость этих уравнений к обыкновенным дифференциальным уравнениям.

§1. Взвешенная производная

Пусть $\alpha = \alpha(t)$ — положительная ограниченная однозначная функция на интервале (a,b) и пусть число $p \in [0,1]$. *Взвешенной производной* функции $f(t)$, $t \in (a,b)$, относительно функции $\alpha^p(t)$ в точке t будем называть

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\alpha^p(t+\alpha^{1-p}(t)\Delta t) f(t+\alpha^{1-p}(t)\Delta t) - \alpha^p(t) f(t)}{\Delta t} =: D_{\alpha,p} f(t). \tag{1.1}$$

Взвешенные производные фигурируют в литературе под различными названиями: обобщенная производная (при $p=0$) в [1], весовая производная в [2].

Если $\alpha(t) \neq 0$, $t \in (a,b)$, из равенства (1.1) получаем связь между взвешенной и «обычной» производными

$$\begin{aligned} D_{\alpha,p} f(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \alpha^{1-p}(t) \frac{\alpha^p(t+\alpha^{1-p}(t)\Delta t) f(t+\alpha^{1-p}(t)\Delta t) - \alpha^p(t) f(t)}{\alpha^{1-p}(t)\Delta t} \\ &= \alpha^{1-p}(t) \frac{d}{dt} \alpha^p(t) f(t). \end{aligned} \tag{1.2}$$

Для $\alpha(t_0) = 0$ при $t_0 \in (a,b)$ из (1.1) находим, что $D_{\alpha,p} f(t_0) = 0$, поэтому и в этом случае верна формула (1.2)

Если $\alpha(t) = c$ для всех $t \in (a,b)$, то взвешенная производная функции f представляет собой операцию умножения постоянной c на производную функции f.

Будем предполагать, что функция α достаточно гладкая. Тогда оператор взвешенной производной принимает вид

$$D_{\alpha,p} = \alpha \frac{d}{dt} + p\alpha'. \tag{1.3}$$

Из (1.3) для гладкой функции f имеем

$$\begin{aligned} D_{\alpha,p} f &= \alpha \frac{d}{dt} f + p\alpha' f = \alpha \frac{d}{dt} f + p[(\alpha f)' - \alpha f'] \\ &= (1-p)\alpha \frac{d}{dt} f + p \frac{d}{dt} \alpha f = (1-p) D_{\alpha,0} f + p D_{\alpha,1} f. \end{aligned}$$

Таким образом, оператор взвешенной производной $D_{\alpha,p}$ допускает следующее представление

$$D_{\alpha,p} = (1-p)D_{\alpha,0} + pD_{\alpha,1}. \tag{1.3$'$}$$

Приведем основные свойства взвешенной производной:

(1) Линейность

$$D_{\alpha,p}(c_1 f + c_2 g) = c_1 D_{\alpha,p} + c_2 D_{\alpha,p} g.$$

(2) Если c_1, c_2 — произвольные постоянные, причем $c_1 > 0$, то

$$D_{c_1\alpha,p} c_2 f = c_1 c_2 D_{\alpha,p} f.$$

(3) Если функции f и g имеют взвешенные производные $D_{\alpha,\frac{p}{2}}$, то для произведения $f\cdot g$ существует взвешенная производная $D_{\alpha,p}$, причем

$$D_{\alpha,p}(f\cdot g) = f D_{\alpha,\frac{p}{2}} g + g D_{\alpha,\frac{p}{2}} f. \tag{1.4}$$

Действительно, из (1.2) имеем

$$\begin{aligned}
D_{\alpha,p}(f\cdot g)(t) &= \alpha^{1-p}(t)\frac{d}{dt}\alpha^{p}(fg)(t) = \alpha^{1-p}(t)\frac{d}{dt}\Big(\alpha^{\frac{p}{2}}(t)f(t)\Big)\Big(\alpha^{\frac{p}{2}}(t)g(t)\Big)\\
&= \alpha^{1-p}(t)\Big(\alpha^{\frac{p}{2}}(t)f(t)\frac{d}{dt}\alpha^{\frac{p}{2}}(t)g(t) + \alpha^{\frac{p}{2}}(t)g(t)\frac{d}{dt}\alpha^{\frac{p}{2}}(t)f(t)\Big)\\
&= \alpha^{1-\frac{p}{2}}(t)f(t)\frac{d}{dt}\alpha^{\frac{p}{2}}(t)g(t) + \alpha^{1-\frac{p}{2}}(t)g(t)\frac{d}{dt}\alpha^{\frac{p}{2}}(t)f(t)\\
&= f(t)D_{\alpha,\frac{p}{2}}g(t) + g(t)D_{\alpha,\frac{p}{2}}f(t).
\end{aligned}$$

Замечание 1.1. Формулу (1.4) можно обобщить также следующим образом. Пусть $m, n \geqslant 1$ и $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = 1$. Если f имеет взвешенную производную $D_{\alpha,\frac{p}{m}}$, а g — $D_{\alpha,\frac{p}{n}}$, то взвешенную производную $D_{\alpha,p}$ произведения $(f\cdot g)$ можно представить в виде

$$D_{\alpha,p}(f\cdot g) = g D_{\alpha,\frac{p}{m}} f + f D_{\alpha,\frac{p}{n}} g.$$

(4) Если f имеет взвешенные производные $D_{\alpha,\frac{p}{2^k}}$, $k = 1,\ldots,n-1$, то f^n имеет взвешенную производную $D_{\alpha,p}$, причем справедливо равенство

$$D_{\alpha,p} f^n = f^{n-1}\bigg(\sum_{k=1}^{n-2} D_{\alpha,\frac{p}{2^k}} f + 2D_{\alpha,\frac{p}{2^{n-1}}} f\bigg).$$

В частности, при $p = 0$, полагая $D_\alpha = D_{\alpha,0}$, имеем

$$D_\alpha f^n = n f^{n-1} D_\alpha f.$$

(5) Если $m \geqslant 0$ и $k \geqslant 0$, то справедливы равенства

$$\alpha^m D_{\alpha,p} f = D_{\alpha^{m+1},\frac{p}{m+1}} f,$$

$$D_{\alpha,p}(\alpha^k f) = D_{\alpha^k,\frac{k+p}{k+1}} f.$$

Взвешенные производные высшего порядка определим по формуле

$$D^m_{\alpha,p} = D^{m-1}_{\alpha,p}(D_{\alpha,p}), \quad m \geqslant 1.$$

Используя равенство (1.2) для них получаем следующее представление:

$$D^m_{\alpha,p} = \alpha^{-p} D^m_\alpha \alpha^p, \tag{1.5}$$

где оператор $D^m_\alpha = \underbrace{\left(\alpha\dfrac{d}{dt}\right)\left(\alpha\dfrac{d}{dt}\right)\ldots\left(\alpha\dfrac{d}{dt}\right)}_{m\ \text{раз}} = \left(\alpha\dfrac{d}{dt}\right)^m$.

Предложение 1.1 (формула Лейбница)**.** *Пусть f и g имеют взвешенные производные $D_{\alpha,\frac{p}{2}}$ до порядка n включительно. Тогда для n-ой производной $D_{\alpha,p}$ справедлива формула Лейбница*

$$D^n_{\alpha,p}(f\cdot g) = \sum_{k=0}^{n} C^k_n D^k_{\alpha,\frac{p}{2}} f \cdot D^{k-n}_{\alpha,\frac{p}{2}} g, \tag{1.6}$$

где $C^k_n = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-k+1)\ldots(n-k+1)}{k!}$ — число сочетаний из k по n.

Предложение 1.2. *Пусть β — положительная дифференцируемая функция на интервале (a,b) и $0 \leqslant q \leqslant 1$. Тогда взвешенная производная $D_{\beta,q}$ допускает представление через $D_{\alpha,p}$, а именно, справедливо равенство*

$$D_{\beta,q} = \frac{\beta}{\alpha} D_{\alpha,p} + \beta h(\beta^q, \alpha^p), \tag{1.7}$$

где функция

$$h(\beta^q, \alpha^p) = \left(\ln\frac{\beta^q}{\alpha^p}\right)'. \tag{1.8}$$

$\lhd$ Пользуясь представлением оператора $D_{\beta,q}$ в виде $D_{\beta,q} = \beta\frac{d}{dt} + q\beta'$, получаем

$$D_{\beta,q} = \frac{\beta}{\alpha}\left(\alpha\frac{d}{dt} + p\alpha' - p\alpha' + q\beta'\right) = \frac{\beta}{\alpha}D_{\alpha,p} - \frac{q\beta'\alpha - p\alpha'\beta}{\alpha} = \frac{\beta}{\alpha}D_{\alpha,p} + \beta h(\beta^q,\alpha^p).$$

Предложение доказано. $\rhd$

Следствие 1.1. *Пусть m, n — натуральные числа, тогда*

$$D^m_{\beta,q} D^n_{\alpha,p} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^m D^{n+m}_{\alpha,p} + \sum_{k=1}^{m} a_k(t) D^{n+m-k}_{\alpha,p},$$

где $a_k(t)$ — функции, зависящие от $\alpha(t)$, $\beta(t)$ и их производных.

Предложение 1.3. *Пусть γ, β — положительные дифференцируемые функции на интервале (a,b), а r, $q \in [0,1]$. Тогда*

$$D_{\gamma,r} D_{\beta,q} D_{\alpha,p} = \frac{\gamma\beta}{\alpha^2} D^3_{\alpha,p} + a_2(t) D^2_{\alpha,p} + a_1(t) D_{\alpha,p}, \tag{1.9}$$

где функции $a_1(t)$, $a_2(t)$ определяются формулами

$$a_2(t) = \frac{\gamma\beta}{\alpha}\Big[h(\beta,\alpha^{1-p}) + h(\gamma^r,\alpha^p) + h(\beta^q,\alpha^p)\Big],$$

$$a_1(t) = \gamma\beta\Big[h(\gamma^r,\alpha^p)\cdot h(\beta^q,\alpha^p) + \frac{1}{\alpha}D_{\alpha,p} h(\beta^q,\alpha^p)\Big].$$

$\triangleleft$ Из равенства (1.7), с учетом (1.8), имеем

$$\begin{aligned}D_{\gamma,r}D_{\beta,q}D_{\alpha,p} &= \left[\frac{\gamma}{\beta}D^2_{\beta,q}+\gamma h(\gamma^r,\beta^q)D_{\beta,q}\right]D_{\alpha,p} = \left[\frac{\gamma}{\beta}D_{\beta,q}+\gamma h(\gamma^r,\beta^q)\right]D_{\beta,q}D_{\alpha,p}\\ &= \left[\frac{\gamma}{\beta}D_{\alpha,p}+\gamma h(\gamma^r,\beta^q)\right]\left[\frac{\beta}{\alpha}D^2_{\alpha,p}+\beta h(\beta^q,\alpha^p)D_{\alpha,p}\right]\\ &= \frac{\gamma\beta}{\alpha}D^3_{\alpha,p}+\left[\frac{\gamma}{\alpha}D_{\alpha,p}\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\gamma\beta}{\alpha}h(\gamma^r,\alpha^p)+\frac{\gamma\beta}{\alpha}h(\beta^q,\alpha^p)\right]D^2_{\alpha,p}\\ &+\left[\alpha\beta h(\gamma^r,\alpha^p)+\frac{\gamma\beta}{\alpha}D_{\alpha,p}h(\beta^q,\alpha^p)\right]D_{\alpha,p}.\end{aligned}$$

Теперь используя равенство $D_{\alpha,p}\frac{\beta}{\alpha} = \beta h(\beta,\alpha^{1-p})$, получим справедливость равенства (1.9). $\triangleright$

Предложение 1.4. *Если функции α и f имеют производные до порядка m включительно, то справедливо равенство*

$$D^m(D_{\alpha,p}f)=\sum_{k=0}^{m}C^k_m D_{\alpha^{(k)},p}f^{(m-k)},$$

где D^m — оператор «обычного» дифференцирования.

$\triangleleft$ Пусть $m=1$ и рассмотрим разность

$$\begin{aligned}(D_{\alpha,p}f)'-D_{\alpha,p}f' &= \left(\alpha\frac{d}{dt}f+p\alpha' f\right)-\left(\alpha\frac{d^2}{dt^2}f+p\alpha f'\right)\\ &= \alpha\frac{d^2}{dt^2}f+\alpha'\frac{d}{dt}f+p\alpha'' f-\alpha\frac{d^2}{dt^2}f+p\alpha'\frac{d}{dt}f=\alpha'\frac{d}{dt}f+p\alpha'' f=D_{\alpha',p}f.\end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$(D_{\alpha,p}f)'=D_{\alpha,p}f'+D_{\alpha',p}f.$$

Предположим теперь, что равенство (1.5) доказано для $m-1$. Тогда

$$\begin{aligned}D^m(D_{\alpha,p}f) &= \left[(D_{\alpha,p}f)^{(m-1)}\right]'=\sum_{k=0}^{m-1}C^k_{m-1}\left(D_{\alpha^{(k)},p}f^{(m-1-k)}\right)'\\ &= \sum_{k=0}^{m-1}C^k_{m-1}\left[D_{\alpha^{(k+1)},p}f^{(m+1-k)}+D_{\alpha^{(k)},p}f^{(m-k)}\right]\\ &= \sum_{k=0}^{m-1}C^k_{m-1}D_{\alpha^{(k+1)},p}f^{(m-1-k)}+\sum_{k=0}^{m-1}C^k_{m-1}D_{\alpha^{(k)},p}f^{(m-k)}\\ &= C^{m-1}_{m-1}D_{\alpha^{(m)},p}f+\sum_{k=1}^{m-1}(C^k_{m-1}+C^{k-1}_{m-1})D_{\alpha^{(k)},p}f^{(m-k)}+C^0_{m-1}D_{\alpha,p}f^{(m)}\\ &= \sum_{k=0}^{m}C^k_m D_{\alpha^{(k)},p}f^{(m-k)}.\end{aligned}$$

Мы объединили слагаемые, содержащие одинаковые производные и воспользовались равенством $C^k_m+C^{k-1}_{m-1}=C^k_m$. $\triangleright$

Предложение 1.5. *Справедлива следующая рекурентная формула*

$$D_{\alpha^{(k)},p} = \frac{\alpha^{(k)}}{\alpha^{(k-1)}} D_{\alpha^{(k-1)},p} + p\alpha^{(k-1)}\Big(- \frac{\alpha^{(k)}}{\alpha^{(k-1)}}\Big)', \quad k \geqslant 1. \tag{1.11}$$

$\lhd$ Пользуясь представлением взвешенной производной (1.3) получаем

$$D_{\alpha^{(k)},p} = \alpha^{(k)}\frac{d}{dt} + p\alpha^{(k+1)} = \frac{\alpha^{(k)}}{\alpha^{(k-1)}}\Big[\alpha^{(k-1)}\frac{d}{dt} + p\alpha^{(k)}\Big]$$
$$+ p\alpha^{(k+1)} - p\frac{(\alpha^{(k)})^2}{\alpha^{(k-1)}} = \frac{\alpha^{(k)}}{\alpha^{(k-1)}} D_{\alpha^{(k-1)},p} + p\alpha^{(k-1)}\Big(\frac{\alpha^{(k)}}{\alpha^{(k-1)}}\Big)'.$$

Предложение доказано. $\rhd$

Следствие 1.2. *Если α — k-раз дифференцируемая функция, то*

$$D_{\alpha^{(k)},p} = \frac{\alpha^{(k)}}{\alpha} D_{\alpha,p} + p\alpha^{(k)} \sum_{i=1}^{k} \Big(\ln \frac{\alpha^{(i)}}{\alpha^{(i-1)}}\Big)'.$$

$\lhd$ Последовательно применяя предложение 1.5, получим

$$\begin{aligned}
D_{\alpha^{(k)},p} =& \frac{\alpha^{(k)}}{\alpha^{(k-1)}}\Big[\frac{\alpha^{(k-1)}}{\alpha^{(k-2)}} D_{\alpha^{(k-2)},p} + p\alpha^{(k-2)}\Big(\frac{\alpha^{(k-1)}}{\alpha^{(k-2)}}\Big)'\Big] + p\alpha^{(k-1)}\Big(\frac{\alpha^{(k)}}{\alpha^{(k-1)}}\Big)' \\
&= \frac{\alpha^{(k)}}{\alpha^{(k-2)}} D_{\alpha^{(k-2)},p} + p\alpha^{(k-2)}\frac{\alpha^{(k)}}{\alpha^{(k-2)}}\Big(\frac{\alpha^{(k-1)}}{\alpha^{(k-2)}}\Big)' + p\alpha^{(k-1)}\Big(\frac{\alpha^{(k)}}{\alpha^{(k-1)}}\Big)' \\
&= \frac{\alpha^{(k)}}{\alpha^{(k-3)}} D_{\alpha^{(k-3)},p} + p\alpha^{(k-3)}\Big(\frac{\alpha^{(k-2)}}{\alpha^{(k-3)}}\Big)' + p\alpha^{(k-2)}\frac{\alpha^{(k)}}{\alpha^{(k+1)}}\Big(\frac{\alpha^{(k-1)}}{\alpha^{(k-2)}}\Big)' \\
&+ p\alpha^{(k)}\Big(\frac{\alpha^{(k)}}{\alpha^{(k-1)}}\Big)' = \frac{\alpha^(k)}{\alpha} D_{\alpha,p} + p\alpha^{(k)} \sum_{i=1}^{n} \Big(\ln \frac{\alpha^{(i)}}{\alpha^{(i-1)}}\Big)'. \ \rhd
\end{aligned}$$

Предложение 1.6. *Пусть α — дифференцируема на интервале (a, b) и m — произвольное натуральное число. Тогда*

$$D_t D^m_{\alpha,p} = \sum_{k=1}^{m} D^{k-1}_{\alpha,p} D_{\alpha',p} D^{m-k}_{\alpha,p} + D^m_{\alpha,p} D_t. \tag{1.12}$$

$\lhd$ Непосредственно из предложения 1.4 имеем

$$\begin{aligned}
D_t D^m_{\alpha,p} &= D_t D_{\alpha,p}(D^{m-1}_{\alpha,p}) = D_{\alpha',p} D^{m-1}_{\alpha,p} + D_{\alpha',p} D_t D^{m-1}_{\alpha,p} \\
&= D_{\alpha',p} D^{m-1}_{\alpha,p} + D_{\alpha,p} D_{\alpha',p} D^{m-2}_{\alpha,p} + D^2_{\alpha,p} D_t D^{m-2}_{\alpha,p} \\
&= D_{\alpha',p} D^{m-1}_{\alpha,p} + D_{\alpha,p} D_{\alpha',p} D^{m-2}_{\alpha,p} + D^2_{\alpha,p}(D_{\alpha',p} + D_{\alpha,p} D_t) D^{m-3}_{\alpha,p} \\
&= D_{\alpha',p} D^{m-1}_{\alpha,p} + D_{\alpha,p} D_{\alpha',p} D^{m-2}_{\alpha,p} + D^2_{\alpha,p} D_{\alpha',p} D^{m-3}_{\alpha,p} + \cdots + D^{m-1}_{\alpha,p} D_t D_{\alpha,p} \\
&= \sum_{k=1}^{m} D^{k-1}_{\alpha,p} D_{\alpha',p} D^{m-k}_{\alpha,p} + D^m_{\alpha,p} D_t. \ \rhd
\end{aligned}$$

Связь между обычной производной второго порядка и взвешенной производной устанавливает

Предложение 1.7. *Если α — дифференцируемая функция, то*

$$\alpha^2\frac{d^2}{dt^2} = D_{\alpha,p}^2 - (1+2p)\alpha' D_{\alpha,p} - p\alpha^2\left[\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)' + (1-p)\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^2\right]. \tag{1.13}$$

◁ Представляя вторую взвешенную производную в виде

$$D_{\alpha,p}^2 = \left(\alpha\frac{d}{dt} + p\alpha'\right)\left(\alpha\frac{d}{dt} + p\alpha'\right),$$

получим

$$\begin{aligned}
D_{\alpha,p}^2 &= \alpha^2\frac{d^2}{dt^2} + \alpha\alpha'\frac{d}{dt} + p\alpha\alpha'' + p\alpha\alpha'\frac{d}{dt} + p^2\alpha'^2 \\
&= \alpha^2\frac{d^2}{dt^2} + (1+2p)\alpha'\frac{d}{dt} + p\alpha\alpha'' + p^2\alpha'^2 \\
&= \alpha^2\frac{d^2}{dt^2} + (1+2p)\alpha' D_{\alpha,p} + p\left[\frac{\alpha\alpha'' - \alpha'^2}{\alpha^2}\right]\alpha^2 - p^2\alpha'^2 + p\alpha'^2 \\
&= \alpha^2\frac{d^2}{dt^2} + (1+2p)\alpha' D_{\alpha,p} + p\alpha^2\left[\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)' + (1-p)\left(\frac{\alpha'^2}{\alpha}\right)'\right].
\end{aligned}$$

Предложение доказано. ▷

Следствие 1.3. *Для производной $D_\alpha = (\alpha\frac{d}{dt})$ справедливо представление*

$$\left(\alpha\frac{d}{dt}\right)^2 = D_\alpha^2 = D_{\alpha,p}^2 - 2p\alpha' D_{\alpha,p} - p\alpha^2\left[\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right) + (1-p)\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^2\right].$$

§2. Оператор взвешенной замены переменной

Пусть $\alpha = \alpha(t)$ — положительная функция, определенная на отрезке $[a,b]$ и α^{-1} интегрируема на $[a,b]$. Положим

$$x = \varphi(t) = \int_{t_0}^{t}\frac{d\xi}{\alpha(\xi)}. \tag{2.1}$$

Обозначим через $t = \psi(x)$ функцию, обратную к $x = \varphi(t)$, а через $G_{\alpha,p}$ и $G_{\alpha,-p}$ $(0 \leqslant p \leqslant 1)$ (см. [2]) операторы, определенные на функциях $f(x)$ и $g(x)$ формулами

$$G_{\alpha,p}^{t\to x}[f(x)] = G_{\alpha,p}[f](x) = \alpha^p(t)f(t)\big|_{t=\psi(x)}, \tag{2.2}$$

$$G_{\alpha,-p}^{x\to t}[g(t)] = G_{\alpha,-p}[g](t) = \alpha^{-p}(t)g(x)\big|_{x=\varphi(t)}. \tag{2.3}$$

Ясно, что

$$G_{\alpha,p}G_{\alpha,-p} = I = G_{\alpha,-p}G_{\alpha,p}, \tag{2.4}$$

где I — тождественный оператор.

Предложение 2.1. *Для любого натурального числа n справедлива формула*

$$G_{\alpha,p}[D_{\alpha,p}^n] = \frac{d^n}{dx^n}G_{\alpha,p}, \tag{2.5}$$

устанавливающая связь между оператором взвешенной производной и «обычной» производной.

$\lhd$ Пусть $n = 1$. Тогда из определения функций $x = \varphi(t)$, $t = \psi(x)$ и с учетом равенства

$$\psi'(x) = \alpha(\psi(x))$$

для гладкой функции f имеем

$$G_{\alpha,p}[D_{\alpha,p}f] = \alpha^p(t)\alpha^{1-p}(t)\frac{d}{dt}\alpha^p(t)f(t)\Big|_{t=\psi(x)} = \alpha(\psi(x))\frac{d}{dx}G_{\alpha,p}[f]\cdot\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dx}G_{\alpha,p}[f].$$

Отсюда непосредственно имеем

$$G_{\alpha,p}[D^n_{\alpha,p}f] = G_{\alpha,p}[D_{\alpha,p}(D_{\alpha,p})] = \frac{d}{dx}G_{\alpha,p}[D^{n-1}_{\alpha,p}f] = \frac{d}{dx}G_{\alpha,p}[D^{n-2}_{\alpha,p}f] = \cdots = \frac{d^n}{dx^n}G_{\alpha,p}[f].$$

Предложение доказано. $\rhd$

Следствие 2.1. *Имеет место равенство*

$$G_{\alpha,p}[D^n_{\alpha,p} + D^{n-1}_{\alpha,p} + \cdots + D_{\alpha,p}] = (D^n_x + D^{n-1}_x + \cdots + D_x)G_{\alpha,p}. \tag{2.6}$$

Следствие 2.2. *Для любых $n \in \mathbb{N}$ и p, $q \in [0,1]$ при $p \geqslant q$ имеем*

$$G_{\alpha,p}[D^n_{\alpha,q}] = G_{\alpha,p-q}[D^n_x G_{\alpha,p}]. \tag{2.7}$$

Предложение 2.2. *Для оператора $D_{\alpha,q}D_{\alpha,p}$ $(q \neq p)$ справедливо представление*

$$D_{\alpha,q}D_{\alpha,p} = D^2_{\alpha,p} + (q-p)\alpha'(t)D_{\alpha,p}. \tag{2.8}$$

$\lhd$ Из предложения 2.1 и равенства (2.4) имеем

$$\begin{aligned}
G_{\alpha,-q}G_{\alpha,q}[D_{\alpha,q}D_{\alpha,p}] &= G_{\alpha,-q}[D_xG_{\alpha,q}[D_{\alpha,p}]] = G_{\alpha,-q}[D_x(\alpha^{q-p}(\psi(x))D_xG_{\alpha,p})]\\
&= G_{\alpha,-q}[\alpha^{q-p}(\psi(x))D^2_xG_{\alpha,p} + (q-p)\alpha^{q-p}(\psi(x))\alpha'(\psi(x))D_xG_{\alpha,p}]\\
&= G_{\alpha,-q}[\alpha^{q-p}(\psi(x))G_{\alpha,p}[D^2_{\alpha,p}] + (q-p)\alpha^{q-p}(\psi(x))\cdot\alpha'(\psi(x))G_{\alpha,p}[D_{\alpha,p}]]\\
&= G_{\alpha,q}[G_{\alpha,q}[D^2_{\alpha,p}]] + G_{\alpha,-q}G_{\alpha,q}[(q-p)\alpha'(t)D_{\alpha,p}] = D^2_{\alpha,p} + (q-p)\alpha'(t)D_{\alpha,p}. \ \rhd
\end{aligned}$$

Предложение 2.3. *Для натурального числа $n \geqslant 1$ справедлива формула*

$$G_{\alpha,p}[D^n_t] = D^n_{\beta,p}G_{\alpha,p}, \tag{2.9}$$

где функция $\beta(x)$ определяется равенством $\beta(x) = 1/(\alpha(\psi(x)))$.

$\lhd$ Доказательство проведем по индукции. Пусть $n = 1$. Тогда из определения оператора $G_{\alpha,p}$ (2.2) и равенства (1.3) имеем

$$\begin{aligned}
G_{\alpha,p}[D_ty] &= G^{t\to x}_{\alpha,p}\left[\frac{1}{\alpha(t)}D_{\alpha,p}y - p\frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)}y\right] = \frac{1}{\alpha(\psi(x))}G_{\alpha,p}[D_{\alpha,p}y] - p\frac{\alpha'(\psi(x))}{\alpha(\psi(x))}G_{\alpha,p}[y]\\
&= \frac{1}{\alpha(\psi(x))}D_xG_{\alpha,p}[y] + pD_x\left(\frac{1}{\alpha(\psi(x))}\right)\cdot G_{\alpha,p}[y] = D_{\frac{1}{\alpha(\psi(x))},p}G_{\alpha,p}[y] = D_{\beta,p}G_{\alpha,p}[y].
\end{aligned}$$

Пусть формула (2.9) справедлива для $n-1$, тогда

$$G_{\alpha,p}[D^n_ty] = G_{\alpha,p}[D^{n-1}_t(D_ty)] = D^{n-1}_{\beta,p}G_{\alpha,p}[D_ty] = D^{n-1}_{\beta,p}(D_{\beta,p}G_{\alpha,p}[y]) = D^n_{\beta,p}G_{\alpha,p}[y].$$

Предложение доказано. $\rhd$

Следствие 2.3. *Имеет место равенство*

$$G_{\alpha,p}[D_t^n + D_t^{n-1} + \dots + D_t] = [D_{\beta,p}^n + D_{\beta,p}^{n-1} + \dots + D_{\beta,p}]G_{\alpha,p}. \tag{2.10}$$

Замечание 2.1. Пусть $G_{\beta,p}$ — оператор взвешенной замены переменной, тогда из (2.9) имеем

$$G_{\beta,p}^{x\to z}[G_{\alpha,p}^{t\to x}[D_t^n y]] = D_z^n G_{\beta,p}^{x\to z}[G_{\alpha,p}^{t\to x}[y]]$$

или

$$G_{\beta,p}^{x\to z}[G_{\alpha,p}^{t\to x}[D_t^n y]] = D_z^n y(\psi(\psi_1(z))), \tag{2.11}$$

где ψ_1 — обратная к функции $z = \varphi_1(x) = \int_{x_0}^x \alpha(\psi(\xi))\,d\xi$.

§3. Уравнения с взвешенными производными

1. Рассмотрим уравнения вида

$$D_{\alpha,p}^n y + a_1 D_{\alpha,p}^{n-2} y + a_2 D_{\alpha,p}^{n-2} y + \dots + a_{n-1} D_{\alpha,p} y + a_n y = 0, \tag{3.1}$$

где a_k $(k = 1, \dots, n)$ — постоянные. Уравнения такого вида (при $p = 0$ и $\alpha(t) = t$) встречаются, например, в теории установившихся капиллярно-гравитационных волн конечной амплитуды [3]. Применяя к (3.1) преобразование $G_{\alpha,p}$, с учетом следствия 2.1, получим обыкновенное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$D_x^n G_{\alpha,p}[y] + a_1 D_x^{n-1} G_{\alpha,p}[y] + \dots + a_{n-1} D_x G_{\alpha,p}[y] + a_n G_{\alpha,p}[y] = 0, \tag{3.2}$$

где функция $G_{\alpha,p}[y]$ определяется формулой (2.2). Положим $G_{\alpha,p}[y] = e^{kx}$. Тогда получим характеристическое уравнение (3.2)

$$k^n + a_1 k^{n-1} + \dots + a_{n-1} k + a_n = 0.$$

Если $k_1, \dots, k_n$ — корни характеристического уравнения, то уравнение (3.1) имеет частные решения

$$y = \alpha^{-p} \exp\left(k_i \int_{t_0}^t \frac{ds}{\alpha(s)}\right), \quad i = 1, \dots, n.$$

2. Из следствия 2.3 получаем, что любое линейное дифференциальное уравнение

$$(D_t^n + a_1(t) D_t^{n-1} y + \dots + a_{n-1}(t) D_t + a_n(t)) y(t) = f(t)$$

приводимо к уравнению с взвешенными производными

$$(D_{\beta,p}^n + a_1(\psi(x)) D_{\beta,p}^{n-1} + \dots + a_{n-1}(\psi(x)) D_{\beta,p} + a_n(\psi(x))) G_{\alpha,p}[y] = G_{\alpha,p}[f].$$

3. Пусть $\alpha = \alpha(t)$ и $\beta = \beta(t)$ — непрерывные положительные функции на отрезке $[c, d]$ и числа $p, q \in [0, 1]$.

Введем следующие обозначения

$$\begin{gathered} u_0(t) := \frac{1}{\alpha^p(t)}; \quad u_1(t) := \frac{1}{\alpha^p(t)} \int_{a_1}^t \frac{d\xi}{\beta^q(\xi)\alpha^{1-p}(\xi)}; \\ u_k := \frac{1}{\alpha^p(t)} \int_{a_k}^t \frac{d\xi}{\beta^q(\xi)\alpha^{-1p}(\xi)} \int_{a_k}^\xi \frac{u_{k-2}(\xi)}{\beta^{1-q}(\xi)}\,d\xi \quad (k = 2, 3 \dots). \end{gathered} \tag{3.3}$$

Легко видеть, что для любого $k = 1, 2, \ldots$ справедливы равенства

$$D_{\beta,q} D_{\alpha,p} u_{2k} = u_{2k+2}, \tag{3.4}$$

$$D_{\beta,q} D_{\alpha,p} u_{2k+1} = u_{2k-1}. \tag{3.5}$$

Рассмотрим следующие ряды

$$K_{\alpha,\beta}(t) = u_0(t) + u_2(t) + \cdots + u_{2k}(t) + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} u_{2k}(t), \tag{3.6}$$

$$S_{\alpha,\beta}(t) = u_1(t) + u_3(t) + \cdots + u_{2k+1} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} u_{2k+1}(t). \tag{3.7}$$

Теорема 3.1. *Пусть для последовательности чисел $\{a_k\}$ найдутся числа c', d' и натуральное число n_0 такие, что $a_k \in (c', d')$ при $k > n_0$. Обозначим через $a' = \min\{a_k : 1 \leqslant k \leqslant n_0\}$ и $a'' = \max\{a_k : 1 \leqslant k \leqslant n_0\}$. Если функции $\alpha(t)$, $\beta(t)$ положительны и непрерывны на некотором отрезке $[c, d]$, содержащем точки a', a'', c', d', то ряды (3.6) и (3.7) абсолютно и равномерно сходятся, по крайней мере, на отрезке $[c', d']$ и допускают взвешенное дифференцирование (по крайней мере для $t \in (c', d')$), причем*

$$D_{\beta,q} D_{\alpha,p} K_{\alpha,\beta}(t) = K_{\alpha,\beta}(t), \tag{3.8}$$

$$D_{\beta,q} D_{\alpha,p} S_{\alpha,\beta}(t) = S_{\alpha,\beta}(t). \tag{3.9}$$

$\lhd$ Покажем, что общее решение уравнения со взвешенными производными $D_{\beta,q}$ и $D_{\alpha,p}$ вида

$$D_{\beta,q} D_{\alpha,p} y = y \tag{3.10}$$

представимо в виде

$$y = C_1 K_{\alpha,\beta}(t) + C_2 S_{\alpha,\beta}(t), \tag{3.11}$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Действительно, линейная зависимость функции $K_{\alpha,\beta}$ и $S_{\alpha,\beta}$ очевидна в случае $a_2 = a_k$ для $k > 2$ на отрезке $[a_k, d]$. Тогда имеем

$$K_{\alpha,\beta}(a_2) = \frac{1}{\alpha^p(t)}, \quad D_{\alpha,p} K_{\alpha,\beta}(a_2) = 0, \quad D_{\alpha,p} S_{\alpha,\beta}(a_2) = 1.$$

Для функции (3.11) получим

$$y(a_2) = C_1 \alpha^{-p}(a_2) + C_2 \alpha^{-p}(a_2) \int_{a_1}^{a_2} \beta^{-q}(\xi) \alpha^{\beta-1}(\xi)\, d\xi,$$

$$y'(a_2) = C_1 \biggl(-\frac{p\alpha'(a_2)}{\alpha^{p+1}(a_2)} \biggr) + C_2 \biggl(-\frac{p\alpha'(a_2)}{\alpha^p(a_2)} \int_{a_1}^{a_2} \beta^{-q}(\xi) \alpha^{p-1}(\xi)\, d\xi + \beta^{-q}(a_2) \alpha^{-1}(a_2) \biggr)$$

$$\times \begin{vmatrix} \alpha^{-p}(a_2) & \alpha^{-p}(a_2) \int_{a_1}^{a_2} \beta^{-q}(\xi) \alpha^{p-1}(\xi)\, d\xi \\ -p\alpha'(a_2) \alpha^{-p-1}(a_2) & -p\alpha'(a_2) \alpha^{-p}(a_2) \int_{a_1}^{a_2} \beta^{-q}(\xi) \alpha^{-p+1}(\xi)\, d\xi + \beta^{-q}(a_2) \alpha^{-1}(a_2) \end{vmatrix}$$

$$= \alpha^{-p-1}(a_2) \beta^{-q}(a_2) \neq 0.$$

Следовательно, формула (3.11) дает общее решение уравнения (3.10) при произвольных постоянных C_1 и C_2.

4. Рассмотрим уравнение вида

$$D_t^2 y + a_1(t) D_t y + a_0(t) y = 0, \tag{3.12}$$

где a_1, a_0 — любые непрерывные функции. Имеет место

Теорема 3.2. *Любое уравнение* (3.12) *может быть представимо в виде* (3.10), *если функция* α *удовлетворяет уравнению*

$$\alpha'' + (1+p)\alpha' + \left(a_1(t) - \frac{1}{p}a_0(t) - \left(\exp\left(\int_{t_0}^t a_1(\xi)\,d\xi\right)\right)^{\frac{1}{(p+1)q}}\right) = 0, \tag{3.13}$$

функция β *— равенству*

$$\beta = \alpha^{-1}\exp\left(\int_{t_0}^t a_1(\xi)\,d\xi\right)^{\frac{1}{(p+1)q}}, \tag{3.14}$$

а числа $p \in (0,1]$, $q \in [0,1]$ *— фиксированы.*

$\lhd$ Используя представление (1.3) взвешенной производной, получим

$$\begin{aligned} D_{\beta,q}D_{\alpha,p}y &= (\beta D_t + q\beta')(\alpha D_t y + p\alpha' y) \\ &= \alpha\beta D_t^2 y + [(1+p)\beta\alpha' + q\beta'\alpha]D_t y + (pq\alpha'\beta' + p\beta\alpha'')y. \end{aligned}$$

Тогда уравнение (3.10) принимает вид

$$D_t^2 y + \left((1+h)\frac{\alpha'}{\alpha} + q\frac{\beta'}{\beta}\right)D_t y + \left(pq\frac{\alpha'\beta'}{\alpha\beta} + p\frac{\alpha''}{\alpha} - \frac{1}{\alpha\beta}\right)y = 0. \tag{3.15}$$

Сравнивая (3.15) и (3.16), получаем

$$a_1(t) = (1+p)\frac{\alpha'}{\alpha} + q\frac{\beta'}{\beta} = \left(\ln(\alpha^{1+p}\cdot\beta^q)\right)'; \tag{3.16}$$

$$a_0(t) = pq\frac{\alpha'}{\alpha}\cdot\frac{\beta'}{\beta} + p\frac{\alpha''}{\alpha} - \frac{1}{\alpha\beta}. \tag{3.17}$$

Из равенства (3.14) имеем

$$\alpha\cdot\beta = \left[\exp\left(\int_{t_0}^t a_1(\xi)\,d\xi\right)\right]^{\frac{1}{(p+1)q}}.$$

Учитывая равенство

$$\frac{\beta'}{\beta} = \frac{1}{q}\left[a_1(t) + (1+p)\frac{\alpha'}{\alpha}\right],$$

вытекающее из (3.16), замечаем, что

$$a_0(t) = pa_1(t) + p(1+p)\frac{\alpha'}{\alpha} + p\frac{\alpha''}{\alpha} - \left[\exp\left(\int_{t_0}^t a_1(\xi)\,d\xi\right)\right]^{-\frac{1}{(p+1)q}}$$

или

$$\alpha'' + (1+p)\alpha' + \left[a_1(t) - \frac{1}{p}a_0(t) - \left(\exp\left(\int_{t_0}^{t} a_1(\xi)\,d\xi\right)\right)^{-\frac{1}{(p+1)q}}\right]\alpha = 0. \qquad (3.18)$$

Таким образом, для нахождения функций α и β получим систему

$$\begin{cases} \alpha'' + (1+p)\alpha' + \left[a_1(t) - \frac{1}{p}a_0(t) - \left(\exp\left(\int_{t_0}^{t} a_1(\xi)\,d\xi\right)\right)^{-\frac{1}{(p+1)q}}\right]\alpha = 0, \\ \alpha\cdot\beta = \left[\exp\left(\int_{t_0}^{t} a_1(\xi)\,d\xi\right)\right]^{\frac{1}{(p+1)q}}. \end{cases}$$

Теорема доказана. $\triangleright$

Положим в (3.13)

$$h(t) = a_1(t) - \frac{1}{p}a_0(t) - \exp\left(\int_{t_o}^{t} a_1(\xi)\,d\xi\right)^{-\frac{1}{(1+p)q}}.$$

Тогда уравнение (3.13) принимает вид

$$\alpha'' + (1+p)\alpha' + h(t)\alpha = 0.$$

Разделив обе части последнего равенства на α, получим

$$\frac{\alpha''}{\alpha} + (1+p)\frac{\alpha'}{\alpha} + h(t) = 0.$$

Введем следующие обозначения

$$z = \frac{\alpha'}{\alpha}, \quad z' = \frac{\alpha''\alpha - (\alpha')^2}{\alpha^2} = \frac{\alpha''}{\alpha} - \left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^2.$$

Окончательно получим уравнение Риккати [4]

$$z' + (1+p)z + z^2 + h(t) = 0. \qquad (3.19)$$

Таким образом, уравнение (3.12) приводимо к виду (3.10), если функция $\frac{\alpha'}{\alpha}$ удовлетворяет уравнению Риккати (3.19), а функция β определяется равенством (3.14).

Литература

1. *Муравьев П. А.* Обобщенная производная и ее применение к решению обыкновенных дифференциальных уравнений // Изв. вузов. Матем.—1962.—Т. 26, № 1.—С. 89–101.
2. *Глушко В. П., Савченко Ю. Б.* Вырождающиеся эллиптические уравнения высокого порядка: пространства, операторы, граничные задачи // Итоги науки и техники. Сер. Математический анализ.—1985.—Т. 23.—С. 125–218.
3. *Секерж-Зенькович Я. И.* К теории установившихся капиллярно-гравитационных волн конечной амплитуды // Докл. АН СССР.—1956.—Т. 109, № 5.—С. 913–915.
4. *Матвеев Н. М.* Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений.—Минск: Вышэйшая школа, 1974.—564 с.

Статья поступила 25 апреля 2003 г.

Бичегкуев Маирбек Сулейманович, к. ф.-м. н.
г. Владикавказ, Северо-Осетинский госуниверситет,
Институт прикладной математики и информатики ВНЦ РАН.