Владикавказский математический журнал
Октябрь–декабрь, 2003, Том 5, Выпуск 4

УДК **517.946**

О НЕЛОКАЛЬНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ С ВЫРОЖДЕНИЕМ ПОРЯДКА И ТИПА

Х. Г. Бжихатлов

Рассмотрены вопросы существования и единственности решения квазилинейного уравнения с вырождением порядка и типа.

В работах А. В. Бицадзе [1, 2] отмечено, что для уравнения

$$y^{2m}U_{xx} + y^{2n-1}U_{yy} + a(x,y)U_x + b(x,y)U_y + c(x,y)U = 0,$$

где m и n натуральные числа, с вырождением типа и порядка классические краевые задачи не являются корректно поставленными. Там же для модельного уравнения

$$y^{2m}U_{xx} + yU_{yy} + \lambda U_y = 0, \quad \lambda = \text{const},$$

указана методика постановки аналогов классических краевых задач.

Представляет интерес исследование нелокальных краевых задач для более общих уравнений, сохраняющих основные свойства этого уравнения и установление структурных свойств решений. На этом пути встречаются принципиальные трудности (см. [2]).

Рассмотрим квазилинейное уравнение

$$y^{2m}U_{xx} + yU_{yy} + \lambda U_y + y^{2m}U_x^2 + yU_y^2 = 0 \tag{1}$$

в области D, ограниченной нормальным контуром σ:

$$x^2 - x + \left(\frac{2}{2m+1}\right)^2 y^{2m+1} = 0 \quad \text{при} \quad y > 0$$

и характеристиками

$$AC:\, x - \frac{2}{2m+1}(-y)^{\frac{2m+1}{2}} = 0, \qquad BC:\, x + \frac{2}{2m+1}(-y)^{\frac{2m+1}{2}} = 1$$

уравнения (1) при $y < 0$.

Пусть D^+ (D^-) — эллиптическая (гиперболическая) части области D,

$$I = \{0 < x < 1\}, \quad \Theta_0(x) = \frac{x}{2} - i\left(\frac{2m+1}{4}x\right)^{\frac{2}{2m+1}},$$

$$\Theta_1(x) = \frac{1-x}{2} - i\left(\frac{2m+1}{4}(1-x)\right)^{\frac{2}{2m+1}} \quad (\forall x \in \bar{I})$$

точки пересечения характеристик уравнения (1), выходящих из точки $x \in I$ с характеристиками AC и BC соответственно.

Задача 1. Найти функцию $U(z) = U(x,y)$ со следующими свойствами: $U(z) \in C(D) \cup C^2(D^+ \cap D^-)$, $U(z)$ — регулярное в $D^+ \cap D^-$ решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$U(x,y) = \bar{\varphi}(x,y), \quad (x,y) \in \sigma, \tag{2}$$

$$\alpha(x) \exp U(\Theta_0(x)) + \beta(x) \exp U(\Theta_2(x)) = \gamma(x) \tag{3}$$

или

$$\frac{d}{dx} \exp U(\Theta_0(x)) + b\frac{d}{dx} \exp U(\Theta_1(x)) = \gamma(x), \tag{3$'$}$$

$$\lim_{y\to 0+} y^\lambda U_y \exp U(x,y) = \lim_{y\to 0-} (-y)^\lambda U_y \exp(x,y) = v(x). \tag{4}$$

Предположим, что функция $v(x) \in C^2(I)$ и при $x = 0$, $x = 1$ может обращаться в бесконечность порядка меньше $1 - 2\varepsilon$, где $\varepsilon = \frac{2m-1+2\lambda}{4m+2}$,

$$\alpha(x) = x^p \alpha_*(X), \quad p > 2\varepsilon,\ \alpha_*(x),\ \beta(x),\ \gamma(x) \in C^3(\bar{I}), \tag{5}$$

$$(\alpha_*(x) x^{p-\varepsilon}(1-x)^\varepsilon - \beta(x)\cos\pi\varepsilon)^2 + \beta^2(x)\sin\pi\varepsilon \neq 0 \quad (\forall x \in \bar{I}). \tag{5$'$}$$

Единственность решения задачи 1 вытекает из принципа экстремума [2], который формулируется так: *решение $U(x,y)$ задачи 1, когда $\gamma = 0$, положительный максимум и отрицательный минимум в замкнутой области $\bar{D}$ принимает на дуге σ.*

Для доказательства существования решения задачи 1 трансформируем уравнение (1) по формуле $U = \Phi(V)$, где $\Phi(v)$ и $V(x,y)$ пока произвольные функции.

$$(y^{2m} V_{xx} + y V_{yy} + \lambda V_y)\Phi_V + (y^{2m} V_x^2 + y V_y^2)(\Phi_{vv} + \Phi_v^2) = 0.$$

Отсюда видно, что уравнение (1) будет удовлетворено, если разрешимы нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\Phi_{VV} + \Phi_V^2 = 0, \qquad \Phi_V(V) \neq 0 \tag{6}$$

и уравнение

$$y^{2m} V_{xx} + y V_{yy} + \lambda V_y = 0. \tag{7}$$

Нетрудно видеть, что решением уравнения (6) является функция $\Phi = \ln V(x,y)$, а для определения $V(x,y)$ имеем линейное уравнение (7). При переходе от функции $U(x,y)$ к $V(x,y)$ условия (2)–(4) переходят в условия

$$V(x,y) = e^{\bar{\varphi}} = \varphi(x,y), \quad (x,y) \in \sigma, \tag{2$'$}$$

$$\alpha(x) V(\Theta_0(x)) + \beta(x) V(\Theta_1(x)) = \gamma(x), \tag{8}$$

$$\frac{d}{dx} V(\Theta_0(x)) + b\frac{d}{dx} V(\Theta_1(x)) = \gamma(x), \tag{8$'$}$$

$$\lim_{y\to 0+} y^\lambda V_y(x,y) = \lim_{y\to 0-} (-y)^\lambda V_y(x,y) = v(x). \tag{9}$$

Рассмотрим сначала случай, когда $m = 1$, $\lambda = 0$. Тогда уравнение (7) переходит в уравнение Трикоми относительно V

$$yV_{xx} + V_{yy} = 0, \tag{10}$$

а краевые условия принимают вид

$$V(x,y) = \varphi(x,y), \quad (x,y) \in \sigma, \quad \lim_{y\to 0+}(x,y) = \gamma(x). \tag{9'}$$

Регулярное в области D^+ решение задачи выписывается в виде [2]

$$V(x,y) = -\int_0^1 v(t)G(t,0;x,y)\,dt - \int_0^1 \varphi(s)\rho(s;x,y)\,ds.$$

Здесь $\rho(s;x,y)$ есть решение некоторого интегрального уравнения, $G(\xi,\eta;x,y)$ — функция Грина.

В случае нормального контура σ функция Грина $G(\xi,\eta;x,y)$ выписывается в явном виде. Полагая в этой формуле $y = 0$, с учетом свойств функции Грина и гипергеометрической функции, имеем

$$\tau(x) + k\int_0^1 \left(\frac{1}{|x-t|^{\frac{1}{3}}} - \frac{1}{(x+t-2xt)^{\frac{1}{3}}}\right)v(t)\,dt = \phi(x),$$

где $k = \mathrm{const}$, $\phi(x)$ — аналитическая относительно x функция, зависящая от $\varphi(x,y)$. Это есть основное соотношение между $\tau(x)$ и $v(x)$ принесенное из D^+.

Формула Дарбу, дающая решение задачи Коши для уравнения (10) с начальными данными

$$V(x,0) = \tau(x), \quad \lim_{y\to 0-} V(x,y) = v(x)$$

имеет вид

$$\begin{aligned} V(z) = V(x,y) &= \gamma_1 \int_0^1 \tau\left(x + \frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}}(2t-1)\right)(t(1-t))^{-\frac{5}{6}}\,dt \\ &+ \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{2}{3}}\gamma_2 y \int_0^1 v\left(x + \frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}}(2t-1)\right)(t(1-t))^{-\frac{1}{6}}\,dt, \end{aligned} \tag{11}$$

где $\gamma_1 = \Gamma(1/3)/\Gamma^2(1/6)$, $\quad \gamma_2 = (3/2)^{2/3}\Gamma(5/3)/\Gamma^2(5/6)$.

Подставляя в (11) $z = \Theta_0(x)$ и $z = \Theta_1(x)$ будем иметь

$$V(\Theta_0(x)) = \gamma_1 x^{\frac{2}{3}} \int_0^x \tau(t)(t(x-t))^{-\frac{5}{6}}\,dt - \gamma_2 \int_0^x v(t)(t(x-t))^{-\frac{1}{6}}\,dt,$$

$$V(\Theta_1(x)) = \gamma_1(1-x)^{\frac{2}{3}} \int_x^1 \tau(t)((t-x)(1-t))^{-\frac{5}{6}}\,dt - \gamma_2 \int_x^1 v(t)((t-x)(1-t))^{-\frac{1}{6}}\,dt.$$

Удовлетворяя краевое условие (8), получим

$$\begin{aligned} &\alpha(x)\left(\gamma_1 x^{\frac{2}{3}} \int_0^x \frac{\tau(t)\,dt}{(t(x-t))^{\frac{5}{6}}} - \gamma_2 \int_0^x \frac{v(t)\,dt}{(t(x-t))^{\frac{1}{6}}}\right) \\ &+ \beta(x)\left(\gamma_1(x)(1-x)^{\frac{2}{3}} \int_x^1 \frac{\tau(t)\,dt}{((t-x)(1-t))^{\frac{5}{6}}} - \gamma_2 \int_0^1 \frac{v(t)\,dt}{((t-x)(1-t))^{\frac{1}{6}}}\right) = \gamma(x). \end{aligned} \tag{12}$$

Равенство (12) есть основное соотношение между $\tau(x)$ и $v(x)$, принесенное из области D^- на линию вырождения типа и порядка.

Исключая $\tau(x)$ из соотношений, связывающих $\tau(x)$ и $v(x)$, принесенных из эллиптической и гиперболической частей области D на линию $y=0$, после некоторых тождественных преобразований получим интегральное уравнение

$$v(x)+\int_0^1 K(x,t)v(t)\,dt=\tilde{\gamma}(x),$$

где $K(x,t)$ и $\tilde{\gamma}(x)$ известные функции, обладающие свойствами обеспечивающими фредгольмовость этого уравнения исходя из условий (5) и (5′), наложенных на заданные функции.

Найдя $v(x)$ и восстанавливая по ней $V(x,y)$, находим решение $U(x,y)$ нелинейной задачи 1.

Рассмотрим случай, когда $\lambda=\frac{1}{2}-m$. Регулярное в области D^+ решение $V(x,y)$ уравнения (7), удовлетворяющее условиям

$$V(x,0)=\tau(x),\quad V(x,y)=\varphi(x,y),\quad (x,y)\in\sigma,\quad \lim_{y\to0+}y^{\lambda}V_y=v(x),$$

имеет вид [2]

$$\tau(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^1(\ln|t-x|-|t+x-2tx|)v(t)\,dt. \tag{13}$$

Регулярное в D^- решение уравнения (7), удовлетворяющее условиям $V(x,0)=\tau(x)$, $\lim\limits_{y\to0-}(-y)^{\lambda}V_y=v(x)$, выписывается в виде

$$\begin{aligned}V(z)=V(x,y)&=\frac{1}{2}\tau\left(x-\frac{2}{2m+1}(-y)^{\frac{2m+1}{2}}\right)+\frac{1}{2}\tau\left(x+\frac{2}{2m+1}(-y)^{\frac{2m+1}{2}}\right)\\&-\frac{2}{2m+1}(-y)^{\frac{2m+1}{2}}\int_0^1 v\left(x+\frac{2(1-2t)}{2m+1}(-y)^{\frac{2m+1}{2}}\right)dt.\end{aligned} \tag{14}$$

Подставляя в (14) $z=\Theta_0(x)$ и $z=\Theta_1(x)$ получим

$$V(\Theta_0(x))=\frac{1}{2}\left(\tau(0)+\tau(x)-\int_0^x v(t)\,dt\right),\qquad V(\Theta_1(x))=\frac{1}{2}\left(\tau(1)+\tau(x)-\int_x^1 v(t)\,dt\right).$$

Удовлетворяя краевое условие (8), после некоторых преобразований будет иметь

$$\alpha(x)\int_0^x v(t)\,dt+\beta(x)\int_x^1 v(t)\,dt=\gamma_1(x), \tag{15}$$

где

$$\gamma_1(x)=\tau(0)\alpha(x)+\tau(1)\beta(x)+\tau(x)(\alpha(x)+\beta(x))-2\gamma(x).$$

Исключая $\tau(x)$ из (13) и (15) получим интегральное уравнение эквивалентное задаче (7)–(9). Учитывая, что без ограничения общности можно считать, что $\varphi(x,y)\equiv0$, а следовательно $\tau(0)=\tau(1)=0$, имеем

$$\alpha(x)\int_0^x v(t)\,dt+\beta(x)\int_x^1 v(t)\,dt=\frac{\alpha(x)+\beta(x)}{\pi}\int_0^1(\ln|t-x|-\ln|t+x-2tx|)v(t)\,dt-2\gamma(x).$$

Исследование этого уравнения проводится по схеме предложенной в [4, 5]. По найденному $v(x)$ находим $V(x,y)$, а затем решение основной задачи (1)–(4).

Когда $\frac{1-2m}{2} < \lambda < 1$, решение $V(x,y)$ уравнения (7), удовлетворяющее условиям $V(x,y) = \varphi(x,y)$, $(x,y) \in \sigma$, $\lim\limits_{y\to 0+} y^\lambda = v(x)$ в области D^+ выписывается в квадратурах по формуле [2]

$$V(x,y) = \int_0^1 v(\xi)G(\xi,z)\,d\xi + \int_0^1 \varphi(\xi)\left(\eta^m \frac{d\eta}{d\xi}\frac{\partial}{\partial\xi} - \frac{\partial}{\partial\eta}\right)G(\xi,z)\,d\xi, \quad \xi \in \sigma, \tag{16}$$

$$G(\xi,z) = \frac{g(\xi,z)}{\left|\frac{1}{2z-1}\right|}^{2\beta} g\left(\xi, \frac{z-\frac{1}{2}}{|2z-1|^2}\right), \qquad g(\xi,z) = k|z-\bar{\xi}|^{-\beta} F\left(\beta,\beta,2\beta;1-\left|\frac{z-\xi}{z-\bar{\xi}}\right|^2\right),$$

$$k = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{4}{m+2}\right)^{2\beta}\frac{\Gamma^2(\beta)}{\Gamma^2(2\beta)}, \quad \beta = \frac{2m-1+2\lambda}{2(2m+1)},$$

$$z = x + \frac{2i}{m+2}y^{\frac{m+2}{2}}, \quad \zeta = \xi + \frac{2i}{m+2}\eta^{\frac{m+2}{2}},$$

F — гипергеометрическая функция, σ_0 — нормальный контур. При $y \to 0$ из (16) получаем основное соотношение между $\tau(x)$ и $v(x)$, принесенное на линию вырождения из D^+.

Регулярное в области D^- решение уравнения (7), удовлетворяющее условиям

$$V(x,0) = \tau(x), \quad \lim_{y\to 0-}(-y)^\lambda V_y(x,y) = v(x), \quad 0 < x < 1,$$

существует, единственно и выписывается в виде [1]

$$\begin{aligned} V(z) = V(x,y) = {} & \frac{\Gamma(2\varepsilon)}{\Gamma^2(\varepsilon)}\int_0^1 \tau\left(x + \frac{2(1-2t)}{2m+1}(-y)^{\frac{2m+1}{2}}\right)(t(1-t))^{\varepsilon-1}\,dt \\ & - \frac{2}{2m+1}\frac{\Gamma(1-2\varepsilon)}{\Gamma^2(1-\varepsilon)}(-y)^{1-\lambda}\int_0^1 v\left(x + \frac{2(1-2t)}{2m+1}(-y)^{\frac{2m+1}{2}}\right)(t(1-t))^{-\varepsilon}\,dt. \end{aligned}$$

Из последнего равенства, при $z = \Theta_0(x)$ и $z = \Theta_1(x)$, после некоторых преобразований, аналогичных [4, 5] и подстановки в (8) имеем

$$\begin{aligned} & \alpha(x)\int_0^x \frac{v(t)}{(t(x-t))^\varepsilon}\,dt + \beta(x)\int_x^1 \frac{v(x)}{((1-t)(t-x))^\varepsilon}\,dt = 2\left(\frac{2m+1}{4}\right)\frac{\Gamma^2(1-\varepsilon)\Gamma(2\varepsilon)}{\Gamma(1-2\varepsilon)\Gamma^2(\varepsilon)} \\ & \times\left(\alpha(x)x^{1-2\varepsilon}\int_0^x \frac{\tau(x)}{(t(x-t))^\varepsilon}\,dt + \beta(x)(1-x)^{1-2\varepsilon}\int_x^1 \frac{\tau(x)}{((1-t)(t-x))^{1-\varepsilon}}\,dt\right) \\ & - 2\left(\frac{2m+1}{4}\right)^{2\varepsilon}\frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(1-2\varepsilon)}\gamma(x). \end{aligned} \tag{17}$$

Это основное соотношение между $\tau(x)$ и $v(x)$, принесенное из области D^- на линию изменения типа и порядка $y = 0$.

Исключая $\tau(x)$ из системы (16), (17), связывающей $\tau(x)$ и $v(x)$, получим обобщенное уравнение Абеля относительно $v(x)$

$$\alpha(x)\int_0^x \frac{v(t)}{(t(x-t))^\varepsilon}\,dt + \beta(x)\int_x^1 \frac{v(t)}{((1-t)(t-x))^\varepsilon}\,dt = F(x), \tag{18}$$

$$F(x) = \int_0^1 k_1(x,t)v(t)\,dt + \int_0^1 k_2(x,t)v(t)\,dt + c\gamma(x),$$

где

$$k_1(x,t) = c_1\alpha(x)x^{1-2\varepsilon}\int_0^x \frac{G(t,s)}{(t(x-t))^{1-\varepsilon}}\,dt,$$

$$k_2(x,t) = c_1\beta(x)(1-x)^{1-2\varepsilon}\int_x^1 \frac{G(t,s)}{((1-t)(t-x))^{1-\varepsilon}}\,dt,$$

эквивалентное задаче (7)–(9).

Уравнение (18) по схеме предложенной в работах [4, 5] сводится к сингулярному интегральному уравнению, для которого указываются достаточные условия разрешимости.

Имея $v(x)$, решая соответствующие задачи, находим $V(x,y)$, а затем решение $U(x,y)$ исходной задачи.

Случай краевых условий $(3')$, $(8')$ рассматривается аналогично. Заметим, что когда λ не принадлежит полусегменту $\left(\frac{1}{2} - m, 1\right)$, исходную задачу можно рассмотреть используя результаты, полученные в [6].

Литература

1. *Бицадзе А. В.* К теории одного класса уравнений смешанного типа // В кн.: Некоторые проблемы математики и механики.—Л.: Наука,—1970.—С. 112–119.
2. *Бицадзе А. В.* Некоторые классы уравнений в частных производных.—М.: Наука,—1981.—448 с.
3. *Смирнов М. М.* Уравнения смешанного типа.—М.: Наука,—1970.—296 с.
4. *Нахушев А. М.* О некоторых краевых задачах для гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа // Диф. уравнения.—1969.—Т. 5, № 1.—С. 44–59.
5. *Бжихатлов Х. Г.* Об одной краевой задаче для смешанных параболо-гиперболических уравнений с характеристической линией изменения типа // Диф. уравнения.—1977.—Т. 13, № 1.—С. 10–16.
6. *Елеев В. А.* О некоторых задачах типа задачи Коши и задачи со смешениями //Диф. уравнения.—1976.—Т. 12, № 1.—С. 46–58.

Статья поступила 25 апреля 2003 г.

Бжихатлов Хачим Гидович, к. ф.-м. н.
г. Нальчик, Кобардино-Балкарский государственный университет