Владикавказский математический журнал
Апрель–июнь, 2003, Том 5, Выпуск 3

УДК **519.46**

ПОДГРУППЫ, СОДЕРЖАЩИЕ ТОР, СВЯЗАННЫЕ С ПОЛЕМ ОТНОШЕНИЙ КОЛЬЦА С ОДНОЗНАЧНЫМ РАЗЛОЖЕНИЕМ

Н. А. Джусоева, В. А. Койбаев

Работа посвящена изучению подгрупп полной линейной группы, содержащих неращепимый максимальный тор, для случая, когда основное поле является полем отношений кольца с однозначным разложением (факториального кольца). Основным результатом работы является построение максимальных подгрупп указанного вида.

Вопросы описания некоторых классов подгрупп линейных групп являются важными вопросами теории групп. Данная работа посвящена изучению подгрупп полной линейной группы, содержащих неращепимый максимальный тор, для случая, когда основное поле является полем отношений кольца с однозначным разложением (факториального кольца). Основным результатом работы является (теоремы 4.7, 4.8) построение максимальных подгрупп указанного вида.

Вопросам подобных исследований были посвящены работы З. И. Боревича, В. П. Платонова, Г. Зейтца, А. А. Бондаренко, Чан Нгок Хоя, С. Л. Крупецкого и др. (см. [1–4]).

§ 1. Введение

Пусть k — поле, K — конечное расширение степени n поля k. Имеет место регулярное вложение

$$K^* \leftrightarrow \mathrm{Aut}_k(K),$$
$$\alpha \mapsto f_\alpha$$

мультипликативной группы K^* поля K в группу всех k-линейных автоморфизмов поля K, рассматриваемого как k-линейное пространство, где $f_\alpha(x) = \alpha x$, $x \in K$.

Образ K^* при указанном вложении мы называем *нерасщепимым максимальным тором* $T(K) = T(K/k)$. Если выбрать базис поля K над k, то, очевидно, $\mathrm{Aut}_k(K)$ изоморфно полной линейной группе $GL(n,k)$, при этом тор $T(K)$ будет представлен некоторой подгруппой матриц в группе $GL(n,k)$.

Рассмотрим теперь случай, когда поле K определяется в качестве расширения поля k неприводимым над k многочленом $x^n - \mu$, $\mu \in k$. Выбрав в качестве базиса K над

Работа выпонена при финансовой поддержке Министерства образования РФ, грант № E02–1.0–79.

$k : 1, \theta, \ldots, \theta^{n-1}$, где $\theta = \sqrt[n]{\mu}$ — корень многочлена $x^n - \mu$, мы видим, что тор $T(K)$ представляется (в выбранном базисе) группой матриц $C(\bar{x})$, $\bar{x} \in k^n \setminus \{\bar{0}\}$, где

$$C(\bar{x}) = \begin{pmatrix} x_1 & \mu x_n & \mu x_{n-1} & \ldots & \mu x_2 \\ x_2 & x_1 & \mu x_n & \ldots & \mu x_3 \\ x_3 & x_2 & x_1 & \ldots & \mu x_4 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_n & x_{n-1} & x_{n-2} & \ldots & x_1 \end{pmatrix}.$$

Так как в описанном случае мы имеем радикальное расширение поля k, $K = k(\sqrt[n]{\mu})$, то тор мы будем обозначать через $T = T(\mu)$.

В данной работе мы рассматриваем следующий случай. Под R понимается целостное кольцо с единицей 1, в котором выполняется однозначное разложение на простые (факториальное кольцо). Далее, через k мы обозначаем поле отношений кольца R. На протяжении всей работы $d = p_1 \ldots p_m \in R$ — элемент кольца R, который является произведением различных простых из R (d свободно от квадратов).

Как хорошо известно, согласно критерию Эйзенштейна многочлен $x^n - d$ неприводим над полем k. Поэтому мы имеем радикальное расширение $K = k(\sqrt[n]{d})$, $\mu = d$, степени n поля k. При этом тор обозначается через $T = T(d)$.

Мы рассматриваем подгруппы H полной линейной группы $G = GL(n, k)$, содержащие нерасщепимый максимальный тор

$$T = T(d) = \{C(\bar{x}) : \bar{x} \in k^n \backslash \{0\}\}.$$

Напомним определение сети (см. [1]). Система $\sigma = (\sigma_{ij})$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, аддитивных подгрупп поля k называется сетью порядка n, если

$$\sigma_{ir}\sigma_{rj} \subset \sigma_{ij}$$

при всех значениях i, r, j.

Для произвольной сети σ порядка n через $M(\sigma)$ обозначается совокупность всех тех матриц $a = (a_{ij})$ порядка n с элементами из k, для которых $a_{ij} \in \sigma_{ij}$ при всех i и j. Ясно, что $M(\sigma)$ — подкольцо в кольце $M(n, k)$ всех матриц порядка n над k.

Далее, если $p \in P$ — простой элемент кольца R, то обозначаем

$$R_{(p)} := \left\{ \frac{m}{n} \in k : (m, n) = (n, p) = 1 \right\}$$

— множество всех p-целых элементов поля отношений k кольца R. Очевидно, что $R_{(p)}$ — максимальное подкольцо поля k.

В работе мы пользуемся следующими обозначениями. Выше были определены матрицы $C(\bar{x}) = (c_{ij})$. Ясно, что элементы c_{ij} матрицы $C(\bar{x})$ определяются формулами

$$c_{ij} = \begin{cases} x_{i+1-j}, & j \leqslant i; \\ dx_{n+i+1-j}, & j \geqslant i+1. \end{cases} \qquad (1)$$

Далее, через $E = e$ обозначается единичная матрица; e_{ij} — матрица, у которой на позиции (i, j) стоит 1, а на остальных местах нули; $t_{ij}(\alpha) = e + \alpha e_{ij}$ — элементарная трансвекция, $i \neq j$;

$$d_r(\varepsilon) = e + (\varepsilon - 1)e_{rr}, \quad \varepsilon \neq 0; \quad [\bar{x}, y] = xyx^{-1}y^{-1}.$$

§ 2. Подгруппы, содержащие элементарную трансвекцию

В дальнейшем через H мы обозначаем промежуточную подгруппу, $T \leqslant H \leqslant G = GL(n,k)$, содержащую элементарную трансвекцию $t_{ij}(\alpha)$, $i \neq j$, $\alpha \in k$, $\alpha \neq 0$.

С каждой подгруппой H связаны модули

$$A_{ij} = A_{ij}(H) = \{\alpha \in k : t_{ij}(\alpha) \in H\}, \quad i \neq j.$$

Очевидно, что A_{ij} являются подгруппами аддитивной группы k^+ поля k.

Лемма 2.1. *Пусть тор T нормализует подгруппу H. Положим $A_i = A_{i1} = A_{i1}(H)$, $i \geqslant 2$. Тогда модули A_{ij} $(i \neq j)$ определяются по формуле:*

$$A_{ij} = \begin{cases} A_{i+1-j}, & j < i; \\ dA_{n+i+1-j}, & j > i \end{cases}$$

(ср. с (1)).

$\lhd$ Имеем $A_{21} = A_2$. Покажем, например, что $A_2 = A_{21} = A_{32} = \ldots = A_{n,n-1}$. Последние равенства вытекают из соотношений

$$ct_{21}(\alpha)c^{-1} = t_{32}(\alpha),\ c^2 t_{21}(\alpha)c^{-2} = t_{43}(\alpha),\ \ldots,\ c^{(n-2)}t_{21}(\alpha)c^{-(n-2)} = t_{n,n-1}(\alpha),$$

где $c = c(\bar{x}_0)$, $\bar{x}_0 = (0,1,0,\ldots,0)$. $\rhd$

Предложение 2.2. *Пусть $\sigma = (\sigma_{ij})$ — сеть аддитивных подгрупп поля k, $M(\sigma)$ — соответствующее сетевое кольцо. Пусть $d\sigma_{ij} \subseteq \sigma_{ij}$ для всех i,j. Если тор T нормализует сетевое кольцо $M(\sigma)$, то сеть σ имеет вид*

$$\sigma = \begin{pmatrix} A_1 & dA_n & dA_{n-1} & \ldots & dA_2 \\ A_2 & A_1 & dA_n & \ldots & dA_3 \\ A_3 & A_2 & A_1 & \ldots & dA_4 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_n & A_{n-1} & A_{n-2} & \ldots & A_1 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где $A_i = \sigma_{i1}$, $i = 1,2,\ldots,n$. При этом

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \subseteq A_n, \quad dA_n \subseteq A_1.$$

$\lhd$ Для внедиагональных позиций доказательство вытекает из леммы 2.1 (достаточно брать $c\alpha e_{ij}c^{-1}$). Далее, равенство $A_1 = \sigma_{11} = \sigma_{22} = \ldots = \sigma_{nn}$ очевидно достигается последовательным сопряжением матрицы αe_{11} $(\alpha \in A_1 = \sigma_{11})$ с помощью матрицы $c = c(\bar{x}_0)$, где $x_0 = (0,1,0,\ldots,0)$. Покажем теперь включения, указанные в предложении. Пусть $\bar{x} = (1,1,0,\ldots,0)$. Тогда $c = c(\bar{x})$ и

$$c^{-1} = c^{-1}(\bar{x}) = \frac{1}{1+(-1)^{n+1}d}C(\bar{y}),$$

где $\bar{y} = (1,-1,\ldots,(-1)^{n+1})$.

Пусть $\alpha \in \sigma_{i1} = A_i$, $1 \leqslant i \leqslant n-1$, $\alpha e_{i1} \in M(\sigma)$. Рассмотрим матрицу $c\alpha e_{i1}c^{-1} \in M(\sigma)$. Имеем

$$[c\alpha e_{i1}c^{-1}]_{i+1,1} = \frac{\alpha}{1+(-1)^{n+1}d},$$

поэтому

$$\frac{\alpha}{1+(-1)^{n+1}d} \in A_{i+1} = \sigma_{i+1,1}.$$

Отсюда $\alpha \in A_{i+1}$, следовательно, $A_i \subseteq A_{i+1}$. Далее, пусть $\beta \in A_n = \sigma_{n1}$, $\beta e_{n1} \in M(\sigma)$. Тогда

$$[c\beta e_{n1}c^{-1}]_{11} = \frac{d\beta}{1+(-1)^{n+1}d} \in M(\sigma),$$

откуда $d\beta \in \sigma_{11} = A_1$, следовательно, $dA_n \subseteq A_1$. $\rhd$

В дальнейшем мы считаем, что $A_1, \dots, A_n$ — идеалы некоторого подкольца Λ поля k, причем $A_1 \subseteq \ldots \subseteq A_n$, $dA_n \subseteq A_1$. Если тор T нормализует сетевое кольцо $M(\sigma)$, то тор T нормализует сетевую группу $G(\sigma) = (e + M(\sigma)) \cap GL(n, \Lambda)$. По этой причине ввиду предложения 2.2 мы в дальнейшем для идеалов A_i рассматриваем сети вида (2).

Лемма 2.3. *Пусть $\sigma = (\sigma_{ij})$ — сеть вида (2). Тогда*

(a) *если $i - r \geqslant k - s$, то $\sigma_{ks} \subseteq \sigma_{ir}$;*

(b) *если $n + (i - r) \geqslant k - s$, то $d\sigma_{ks} \subseteq \sigma_{ir}$;*

(c) *если $n - (i - r) + (k - s) \leqslant 0$, то $\sigma_{ks} \subseteq d\sigma_{ir}$.*

$\lhd$ Имеем

$$\sigma_{ks} = \begin{cases} A_{k+1-s}, & s \leqslant k, \\ dA_{n+k+1-s}, & s \geqslant k+1, \end{cases} \qquad \sigma_{ir} = \begin{cases} A_{i+1-r}, & r \leqslant i, \\ dA_{n+i+1-r}, & r \geqslant i+1. \end{cases}$$

Доказательство теперь вытекает из того, что

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \subseteq A_n, \quad dA_n \subseteq A_1. \ \rhd$$

Предложение 2.4. *Рассмотрим сеть σ вида (2). Если $t_{ij}(\beta) \in T \cdot G(\sigma)$, то $\beta \in \sigma_{ij}$ $(i \neq j)$.*

$\lhd$ Пусть, например, $i = 2$, $j = 1$. Тогда $t_{21}(\beta)a = c(\bar{x})$, для некоторых $a \in G(\sigma)$, $c(\bar{x}) \in T$. Поэтому первые строки матриц a и $c(\bar{x})$ совпадают. Отсюда

$$x_1 \in 1 + A_1, \quad x_n \in A_n, x_{n-1} \in A_{n-1}, \dots, x_2 \in A_2.$$

Поэтому $c(\bar{x}) \in e + M(\sigma)$ и $t_{21}(\beta) = c(\bar{x})a^{-1} \in e + M(\sigma)$, откуда $\beta \in \sigma_{21}$. $\rhd$

§ 3. Достаточные условия нормализуемости сетевой группы

С каждой матрицей $c = c(\bar{x}) \in T$ связана обратная матрица $c^{-1} = c(\bar{y}) = (c'_{ij}) \in T$, $\bar{y} = (y_1, \dots, y_n) \in k^n$, где $y_i = \frac{C_{1i}}{|c(\bar{x})|}$, причем C_{1i} — алгебраическое дополнение элемента c_{1i} матрицы $c^{-1} = c(y)$.

Для элементов матрицы $c^{-1} = c(y)$ имеем формулу (1):

$$c'_{sr} = \begin{cases} y_{s+1-r}, & r \leqslant s; \\ dy_{n+s+1-r}, & r \geqslant s+1. \end{cases} \tag{3}$$

Введем в рассмотрение подкольцо $R_0 = R(d)$ поля k следующего вида

$$R_0 := R(d) = \underset{\bar{x} \in k^n \setminus \bar{o}}{\operatorname{ring}} \langle x_i y_j, dx_r y_s : \ i + j \leqslant n+1, \ r + s > n+1 \rangle.$$

Следующая теорема дает достаточные условия нормализуемости сетевой группы тором.

Теорема 3.1. *Пусть Λ — подкольцо поля k, содержащее кольцо $R_0 = R(d)$, причем $d \in \Lambda$. Пусть, далее, $\sigma = (\sigma_{ij})$ — сеть идеалов вида (2), где A_i — идеалы кольца Λ, причем $A_1 \subseteq \ldots \subseteq A_n$ и $dA_n \subseteq A_1$. Тогда тор $T = T(d)$ нормализует сетевую группу $G(\sigma)$, а потому $J = T \cdot G(\sigma)$ — промежуточная подгруппа, содержащая тор T, причем (согласно 2.4) $A_{ij}(H) = \sigma_{ij}$, $i \neq j$.*

$\lhd$ Пусть $g = e + a \in G(\sigma)$, где $a = (a_{ij}) \in M(\sigma)$. Пусть, далее, $c = (c_{ij}) = c(\bar{x})$, $c^{-1} = (c'_{ij}) = c(\bar{y})$. Покажем, что $b = (b_{ir}) = uac^{-1} \in M(\sigma)$. Достаточно показать, что если $a = a_{ks}e_{ks}$, где $a_{ks} \in \sigma_{ks}$, то $b = cac^{-1} \in M(\sigma)$, т. е., что $b_{ir} \in \sigma_{ir}$ для всех i, r. Имеем $b_{ir} = c_{ik}a_{ks}c'_{sr}$. Покажем, что

$$b_{ir} = c_{ik}a_{ks}c'_{sr} \in \sigma_{ir}. \tag{4}$$

В силу формул (1) и (3) для c_{ik} и c'_{sr} нужно рассмотреть четыре случая ($\alpha = i+4-k$, $\beta = s+1-r$):

(a) $s \leqslant r-1$, $k \leqslant i$, $\quad c_{ik}a_{ks}c'_{sr} = x_\alpha d a_{ks} y_{n+\beta}$;

(b) $s \leqslant r-1$, $k \geqslant i+1$, $\quad c_{ik}a_{ks}c'_{sr} = dx_{n+\alpha} d a_{ks} y_{n+\beta}$;

(c) $s \geqslant r$, $k \leqslant i$, $\quad c_{ik}a_{ks}c'_{sr} = x_\alpha a_{ks} y_\beta$;

(d) $s \geqslant r$, $k \geqslant i+5$, $\quad c_{ik}a_{ks}c'_{sr} = dx_{n+\alpha} a_{ks} y_\beta$.

Имеем:

$$(i-r) - (k-s) = \alpha + \beta - 2, \tag{5}$$

$$n + (i-r) - (a-s) = n + \alpha + \beta - 2, \tag{6}$$

$$n - (i-r) + (k-s) = n - (\alpha+\beta) + 2. \tag{7}$$

(a): Имеем $\alpha \geqslant 1$, $n+\beta \geqslant 1$. Тогда $n+\alpha+\beta-0 \geqslant 8$, а потому в силу (6) и леммы 2.3 (b) имеем $d\sigma_{ks} \subseteq \sigma_{ir}$. Если $\alpha + (n+\beta) \leqslant n+1$, то $x_\alpha y_{n+\beta} \in R_0$, а потому имеем (4). Если же $\alpha + (n+\beta) > n+1$, то $\alpha+\beta-2 \geqslant 4$, а потому, согласно (5) и 2.3 (a) $\sigma_{ks} \subseteq \sigma_{ir}$, но $dx_\alpha y_{n+\beta} \in R_0$ отсюда следует (4).

(b): Если $(n+\alpha)+(n+\beta) \leqslant n+1$ (см. определание R_0), то включение (4) очевидно. Если же $(n+\alpha)+(n+\beta) > n+1$, то из (6) и 2.3 (b) имеем $d\sigma_{ks} \subseteq \sigma_{ir}$, но $dx_{n+\alpha}y_{n+\beta} \in R_0$. Отсюда следует (4).

(c): Имеем $\alpha \geqslant 1$, $\beta \geqslant 1$, отсюда $\alpha+\beta-2 \geqslant 0$. Отсюда из (5) и 2.3 (a) имеем $\sigma_{ks} \subseteq \sigma_{ir}$. Если $\alpha+\beta \leqslant n+1$, то $x_\alpha y_{\beta \in R_0}$, отсюда следует (4). Пусть $\alpha+\beta > n+1$. Тогда $n-(\alpha+\beta)+2 \leqslant 0$. Отсюда (см. (7)) в силу 2.3 (c) $\sigma_{ks} \subseteq d\sigma_{ir}$. Следовательно, $c_{ik}a_{ks}c'_{sr} \in x_\alpha d\sigma_{ir} y_\beta$, но $dx_\alpha y_\beta \in R_0$, отсюда следует (4).

(d): Рассматривается симметрично случаю (a). $\rhd$

§ 4. Максимальные нетривиальные промежуточные подгруппы группы $GL(n,k)$

В этом параграфе мы построим максимальные нетривиальные (не содержащие $SL(n,k)$) подгруппы группы $G = GL(n,k)$, содержащие тор $T = T(d)$. Напомним, что k — поле отношений кольца R с однозначным разложением на простые, $d \in R$, d является произведением различных простых.

Лемма 4.1. *Пусть p — простой делитель элемента d, $p|d$; $x_1, \ldots, x_n \in R$. Если $p^k \,\big|\, |c(\bar{x})|$, то $p|x_1, \ldots, p|x_k$.*

$\lhd$ Индукция по k. Для $k=1$ лемма очевидна. Пусть лемма справедлива для $(k-1)$. Пусть $p^k\big|\,|c(\bar{x})|$. Тогда по индукционному предположению $p|x_1,\ldots,p|x_{k-1}$. Следовательно, $|c(\bar{x})| = x_k^n d^{k-1} + p^k\cdot s$, $s\in R$. Поэтому, если $p^k\big|\,|c(\bar{x})|$, то $p|x_k$. $\rhd$

Лемма 4.2. *Пусть выполнены условия леммы 4.1 и пусть $p|x_1,\ldots,p|x_k$. Тогда*
(a) *если $i\leqslant n-k$, то $p^k|C_{1i}$,*
(b) *если $i>n-k$, то $p^{k-1}|C_{1i}$,*
здесь C_{1i} — алгебраическое дополнение элемента c_{1i}.

$\lhd$ Не умоляя общности положим: $i=1$, $k=n-1$ в случае (a) и $i=n$, $k=n-1$ в случае (b). Проверка этих случаев не составляет сложности. $\rhd$

Напомним, что с матрицей $c=c(\bar{x})$ связана обратная матрица $c^{-1}=c(\bar{y})=(c'_{ij})$, где $\bar{y}=(y_1,\ldots,y_n)$ и $y_i=\frac{C_{1i}}{|c(\bar{x})|}$, C_{1i} — алгебраическое дополнение элемента c_{1i} матрицы $c=(c_{ij})=c(\bar{x})$.

Теорема 4.3. *Для всякого простого делителя p элемента d имеет место включение*

$$R_0\subset R_{(p)},$$

где $R_{(p)}$ — кольцо всех p-целых элементов поля отношений k кольца с однозначным разложением R.

$\lhd$ Для доказательства теоремы нам достаточно показать (см. определение кольца R_0), что если $i+j\leqslant n+1$, то $x_iy_j\in R_{(p)}$ и если $i+j>n+1$, то $dx_iy_j\in R_{(p)}$.

Заметим прежде всего, что $x_iy_j=\frac{x_iC_{1j}}{|c(x)|}$, а потому в числителе и знаменателе находятся однородные многочлены степени n. Поэтому в силу формулы для однородного многочлена φ:

$$\varphi(tx_1,\ldots,tx_n)=t^n\varphi(x_1,\ldots,x_n)$$

мы можем считать, что $x_1,\ldots,x_n\in R$, причем $(x_1,\ldots,x_n)=1$.

Пусть $p^k\mid |c(x)|$ и $p^{k+1}\nmid |c(x)|$. Тогда в силу леммы 4.1 $p|x_1,\ldots p|x_k$. Так как $(x_1,\ldots,x_n)=1$, то $k\leqslant n-1$. Рассмотрим x_iy_j:

$$x_iy_j=\frac{x_iC_{ij}}{|c(x)|}.$$

Ввиду леммы 4.2 имеем $p^{k-1}|C_{1j}$, далее $p|d$, а потому p не входит в канонический знаменатель элемента dx_iy_j, следовательно, $dx_iy_j\in R_0$. Поэтому рассмотрим случай $i+j\leqslant n+1$. Если $j=n-k$, то согласно лемме 4.2 (a) имеем $p^k|C_{1j}$, а потому p не входит в канонический знаменатель элемента x_iy_j, откуда $x_iy_j\in R_{(p)}$. Пусть $j>n-k$. Тогда 4.2 (b) влечет $p^{k-1}|C_{1j}$. Далее, так как $i+j\leqslant n+1$, то $j\leqslant n+1-i$, но из $n-k<j$ следует $n-k<n+1-i$, откуда $i\leqslant k$. Так как $p|x_1,\ldots,p|x_k$, то $p|x_i$. Следовательно, p не входит в канонический знаменатель элемента $x_iy_j=\frac{x_iC_{1j}}{|c(x)|}$, откуда $x_iy_j\in R_{(p)}$. $\rhd$

Из теорем 3.1 и 4.3 вытекает следующая теорема.

Теорема 4.4. *Пусть p — простой делитель элемента d, $p|d$. Рассмотрим сеть σ_p*

$$(\sigma_{(p)})_{ij}=\begin{cases}R_{(p)}, & i\geqslant j;\\ pR_{(p)}, & i<j.\end{cases}$$

Тогда тор $T=T(d)$ нормализует сетевую группу $G(\sigma_p)$, а потому $H_p=T\cdot G(\sigma_p)$ является промежуточной подгруппой группы $G=GL(n,k)$, содержащей тор T. Далее, H_p не содержит $SL(n,k)$, точнее $A_{ij}(H_p)=(\sigma_p)_{ij}$, $i\neq j$.

Лемма 4.5. *Пусть выполнены условия теоремы 4.4. Пусть $T \leqslant H \leqslant G$, причем $H \geqslant H_p$. Пусть, далее, $A_{ij} = A_{ij}(H)$, $i \neq j$. Тогда $A_2 = \ldots = A_n = A$ — подкольцо поля k, содержащее R_0, где $A_i = A_{i1}$, $i \geqslant 2$, следовательно, либо $A = R_{(p)}$, либо $A = k$.*

$\lhd$ Отметим, что A_{ij} связаны с A_m соотношениями из леммы 2.1. Имеем

$$[t_{kl}(\xi), t_{l1}(\alpha)] = t_{k1}(\xi\alpha), \quad k \neq l,\ k \neq 1,\ l \neq 1. \tag{8}$$

Если $l < k$, $\alpha \in A_l$, и так как $t_{kl}(1) \in H$, то ($\xi = 1$) из (8) следует, что $\alpha \in A_k$, а потому $A_l \subseteq A_k$. Если же $l > k$, $\alpha \in A_l$, то так как $t_{kl}(p) \in H$, то ($\xi = p$) из (8) следует, что $pA_l \subseteq A_k$. Таким образом,

$$R_{(p)} \subseteq A_2 \subseteq \ldots \subseteq A_n, \quad pA_n \subseteq A_2.$$

Очевидно также, что $p^m A_n \subseteq A_2$, $m \geqslant 1$. Покажем теперь, что $A_2 = \ldots = A_n$. Если $A_n = R_{(p)}$, то последние равенства очевидны. Пусть $A_n \supsetneq R_{(p)}$. Тогда так как $d_r(R^*_{(p)}) \subseteq H$, то $\frac{1}{p^s} \in A_n$, $s \geqslant 1$. Но $p^m A_n \subseteq A_{n-1}$, откуда $1 \in p^s A_n \subseteq A_{n-1}$. Пусть теперь $\beta \in A_n$. В силу леммы 2.1 $A_{n-1,n} = pA_n$, далее, $p^s A_n = p \cdot p^{s-1} A_n \subseteq pA_2 \subseteq pA_n$, откуда $1 \in p^s A_n \subseteq pA_n = A_{n-1,n}$, т. е. $t_{n-1,n}(1) \in H$. Согласно формуле

$$[t_{n-1,n}(1), t_{n1}(\beta)] = t_{n-1,1}(\beta),$$

мы имеем $\beta \in A_{n-1,1} = A_{n-1}$. Таким образом, $A_n \subseteq A_{n-1}$ и $A_{n-1} = A_n$. Рассуждая аналогично, мы получим: $A_2 = \ldots = A_n = A$. Далее, в силу соотношения

$$[t_{32}(\alpha), t_{21}(\beta)] = t_{31}(\alpha\beta)$$

мы имеем $A_2^2 \subseteq A^3$, а потому $AA = A$. Таким образом, A — кольцо, $R_{(p)} \subseteq A \subseteq k$. $\rhd$

Лемма 4.6. *Пусть p — простое, $p|d$, $H_p = TG(\sigma_p)$. Если H, $T \leqslant H \leqslant G$, причем $H \supsetneq H_p$, то $H \supseteq SL(n,k)$.*

$\lhd$ Согласно лемме 4.5 нам достаточно показать, что подкольцо A строго содержит $R_{(p)}$. В силу леммы 4.5 и формулы

$$(rs) d_s(p) t_{rs}(1) d_s^{-1}(p)(rs) = t_{sr}\left(\frac{1}{p}\right)$$

нам достаточно показать, что $t_{rs}(1)$ для некоторых $r < s$ или $t_{sr}\left(\frac{1}{p}\right) \in H$ для $s > r$.

Итак, пусть $a \in H$, $a \notin H_p$.

Так как $H \supseteq G(\sigma_p)$, то умножая матрицу a слева на элементарные трансвекции из $G(\sigma_p)$ и диагональные матрицы из $d_i(R^*_{(p)}) \subseteq G(\sigma_p)$ и на скалярную матрицу из T мы можем считать, что

$$a = \begin{pmatrix} 1 & p^{m_2} & \ldots & p^{m_n} \\ 0 & p_2^k & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & p^{k_n} \end{pmatrix}, \tag{9}$$

т. е. $a_{11} = 1$, $a_{ii} = p^{k_i}$, $i \geqslant 2$, $a_{1i} = p^{m_i}$, $i \geqslant 2$, $a_{ij} = 0$, $i > j$. Сделаем ряд замечаний.

Можно считать, что $m_i \leqslant 0$, иначе умножая матрицу a справа на $t_{1i}(-p^{m_i})$ на позиции $(1,i)$ мы получим нулевой элемент.

Можно считать, что $m_i \geqslant m_j$ для $i < j$, так как иначе, умножая матрицу a справа на $t_{ij}(-p^{m_j - m_i})$ на позиции $(1,j)$ мы получим нулевой элемент.

Итак, будем считать, что

$$0 \geqslant m_2 \geqslant m_3 \geqslant \ldots \geqslant m_n. \tag{10}$$

Имеем $1+p \in R^*_{(p)}$, а потому $b = [a^{-1}, d_1(1+p)] \in H$. Матрица b отличается от единичной только первой строкой, которая равна $(1, p^{m_2+1}, \ldots, p^{m_n+1})$. Поэтому

$$\prod_{i=1}^{n-1} t_{ni}(p^{m_i-m_n}) b \prod_{i=2}^{n-1} t_{ni}(-p^{m_i-m_n}) = t_{1n}(p^{m_n+1}) \in H.$$

Если $m_n+1 \leqslant 0$, то в силу замечания сделанного в начале доказательства $\frac{1}{p} \in A$. Поэтому пусть $m_n+1 \geqslant 1$, $m_n \geqslant 0$. Тогда из (10) мы имеем $m_2 = m_3 = \ldots = m_n = 0$. Покажем, что $k_n = 0$. Действительно,

$$at_{1n}(p)a^{-1} = t_{1n}(p^{1-k_n}), \quad a^{-1}t_{1n}(p)a = t_{1n}(p^{k_n+1}).$$

Снова в силу замечания сделанного в начале доказательства можно считать, что $1-k_n \geqslant 1$ и $k_n+1 \geqslant 1$, откуда $k_n = 0$. Если $n = 2$, то доказательство завершено, так как (см. (9)) $m_2 = k_2 = 0$, а потому $t_{12}(1) \in H$. Поэтому будем считать, что $n \geqslant 3$.

Покажем теперь, что $k_2 = 0$. Имеем (см. (9): $a_{12} = 1$, $a_{nn} = 1$, $a_{22} = p^{k_2}$)

$$at_{2n}(p)a^{-1}t_{1n}(-p) = t_{2n}(p^{k_2+1}) \in H.$$

В силу замечания сделанного в начале доказательства, $k_2 \geqslant 0$. Пусть $k_2 \geqslant 1$, тогда ($a'_{12} = -p^{k_2}$)

$$t_{21}(1)a^{-1}t_{2n}(p^k)at_{21}(-1) = t_{1n}(-1) \in H$$

и наше утверждение доказано. Поэтому будем считать, что $k_2 = 0$.

Таким образом в матрице a (см. (9)) мы можем считать, что $a_{1i} = 1$, $i \geqslant 1$; $k_2 = 0$, $a_{22} = 1$; $k_n = 0$, $a_{nn} = 1$; $a_{ij} = 0$ для $i > j$. Следовательно, для обратной (треугольной) матрицы $a^{-1}:\ a'_{11} = a'_{22} = a'_{nn} = 1$, $a'_{12} = -1$. Положим

$$b = t_{21}^{(1)} \left[a^{-1}, t_{21}(1)\right],$$

тогда $bt_{n2}(1)b^{-1} = t_{12}(1) \in H$ и в силу замечания, сделанного в начале доказательства, лемма 4.6 доказана. $\triangleright$

Теорема 4.7. *Для всякого простого делителя p элемента d группа $H_p = T(d)G(\sigma_p)$ является максимальной нетривиальной (не содержащей $SL(n,k)$) подгруппой полной линейной группы $G = GL(n,k)$, содержащей тор $T = T(d)$.*

$\triangleleft$ Пусть $H_p \subsetneq H \leqslant G$. Покажем, что $H = G$. Для этого в силу леммы 4.6. нам достаточно показать, что $D(n,k) \subseteq H$. Так как $D(n, R_{(p)}) \subseteq H$, то нам достаточно показать, что $d_r\left(\frac{1}{p}\right) \in H$ для некоторого $1 \leqslant r \leqslant n$. Действительно, так как $T \leqslant H$, то для $x = (0,1,0,\ldots,0)$ мы имеем $c(\bar{x}) \in H$. Умножая матрицу $c(x)$ на матрицы перестановки из $SL(n,k) \subseteq H$ и на $d_r(-1)$, мы получим, что $d_r(d) \in H$, откуда так как $D(n, R_{(p)}) \subseteq H$, то $d_r(p) \in H$ и $d_r\left(\frac{1}{p}\right) \in H$. Теорема доказана. $\triangleright$

Отметим интересное следствие из теоремы 4.7.

Теорема 4.8. *Для всякого простого $p \in R$ группа $H_p = T(p)G(\sigma_p)$ является максимальной нетривиальной подгруппой группы G, содержащей тор $T(p)$.*

Литература

1. *Боревич З. И.* О подгруппах линейных групп, богатых трансвекциями // Зап. науч. семинаров ЛОМИ.—1978.—Т. 75.—С. 22–31.
2. *Боревич З. И., Койбаев В. А., Чан Нгок Хой.* Решетки подгрупп в $GL(n,Q)$, содержащих нерасщепимый тор // Зап. науч. семинаров ПОМИ РАН.—1991.—Т. 191.—С. 24–43.
3. *Койбаев В. А.* Подгруппы группы $GL(n,Q)$, содержащие нерасщепимый максимальный тор // Докл. АН СССР.—1990.—Т. 312, № 1.—С. 36–38.
4. *Seitz G. M.* Subgroups of finite groups of Lie type // J. Algebra.—1979.—V. 61.—P. 16–27.

Статья поступила 20 сентября 2002 г.

Джусоева Нонна Анатольевна
г. Владикавказ, Северо-Осетинский госуниверситет
E-mail: plitty@maile.ru

Койбаев Владимир Амурханович, д. ф.-м. н.
г. Владикавказ, Институт прикладной математики
и информатики ВНЦ РАН, Северо-Осетинский госуниверситет