Владикавказский математический журнал
Апрель–июнь, 2003, Том 5, Выпуск 2

УДК **519.64**

К ЧИСЛЕННОМУ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ МЕТОДОМ ЛОКАЛЬНО-КАНОНИЧЕСКОГО РАЗБИЕНИЯ

Ш. С. Хубежты

Применяются квадратурные формулы повышенной точности, аналогичные методу дискретных особенностей, для решения граничной задачи Дирихле на областях, ограниченных гладкими замкнутыми контурами. Доказывается существование решений приближенных систем, оценивается погрешность вычислительной схемы.

Метод граничных интегральных уравнений, как известно (см. [1]), является одним из наиболее эффективных средств численного решения некоторых классов задач математической физики и механики. При этом, как было показано в [2], решение аналогичных задач на основе аппроксимации сингулярных интегралов может обладать определенными преимуществами перед обычно рассматриваемыми схемами, основанными на приближенном решении интегральных уравнений Фредгольма. Метод аппроксимации сингулярных интегралов в определенном смысле обладает некоторой возможностью увеличения порядка точности схемы. Это обстоятельство и аспекты конструирования метода дискретных особенностей (см. [2, 3, 4]) мы будем пояснять более подробно на примере задачи Дирихле.

Пусть D — конечная односвязная область в плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, ограниченная замкнутым контуром Ляпунова L, уравнение которого относительно дуговой абсциссы s есть $t = t(s) = x(s) + iy(s)$, $0 \leqslant s \leqslant l$, $f(t)$ — заданная на L (действительная) функция. Представление решения соответствующей задачи Дирихле в виде

$$U(x, y) = \mathrm{Re}\,\frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t)}{t - z}\,dt \qquad (z \in D,\ I_m\varphi(t) \equiv 0),$$

где $\varphi(t)$ — искомая действительная функция, приводит к граничному интегральному уравнению (см. [1; §61])

$$\varphi(t_0) + \mathrm{Re}\,\frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t)}{t - t_0}\,dt = f(t_0) \qquad (t_0 \in L). \tag{1}$$

Решение указанной задачи методом аппроксимации сингулярных интегралов заключается в аппроксимации уравнения (1) непосредственно на основе замены сингулярного интеграла

$$(S\varphi)(t_0) \equiv \frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t)}{t - t_0}\,dt$$

его некоторым приближенным выражением. Конкретно, в этом качестве мы используем метод локально-канонического разбиения контура L с использованием далее метода дискретных особенностей, изложенного в [5]. Указанная схема строится следующим образом.

Считая, что L — замкнутый (ляпуновский) контур на комплексной плоскости, введем систему точек $\{\tau_j\}_{j=1}^{2n}$ разбивающих L на равные части. Зафиксировав произвольно ν $(1 \leqslant \nu \leqslant 2n)$ и положив $t_0 = \tau_\nu$, рассмотрим

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t)}{t-\tau_\nu}\,dt = \varphi(\tau_\nu) + \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\tau_{\nu-1}\tau_{\nu+1}} \frac{\varphi(t)-\varphi(\tau_\nu)}{t-\tau_\nu}\,dt$$

$$+\sum_{\sigma=1}^{2n-2}\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\tau_{\nu+\sigma}\tau_{\nu+\sigma+1}} \frac{\varphi(t)-\varphi(\tau_\nu)}{t-\tau_\nu}\,dt \tag{2}$$

(подразумевается, что возрастание индексов в узлах соответствует положительному направлению на L), причем под обозначением $\tau_s\tau_p$ $(s < p)$ понимается кратчайшая дуга с концами τ_s, τ_p; $\tau_0 = \tau_{2n}$ $(\tau_{j\pm 2n} = \tau_j,\ j = 1, 2, \ldots, 2n)$. Далее, исходя из (1), подынтегральное выражение на каждой дуге $\tau_{\nu+\sigma}\tau_{\nu+\sigma+1}$ будем аппроксимировать линейным интерполянтом по узлам $\tau_{\nu+\sigma}$, $\tau_{\nu+\sigma+1}$. Что касается интеграла по дуге $\tau_{\nu-1}\tau_{\nu+1}$, то в качестве интерполяционных узлов используем $\tau_{\nu-1}, \tau_{\nu+1}$ обходя тем самым узел τ_ν, который в данном случае будет контрольным аналогично методу дискретных особенностей (см. [5]). В результате получается следующая квадратурная формула (см. [4]):

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t)}{t-\tau_\nu}dt \approx \varphi(\tau_\nu) + (p_{\nu-2}+p_{\nu 0})\frac{\varphi(\tau_{\nu-1})-\varphi(\tau_\nu)}{\tau_{\nu-1}-\tau_\nu} + (p_{\nu 0}+p_{\nu+1})\frac{\varphi(\tau_{\nu+1})-\varphi(\tau_\nu)}{\tau_{\nu+1}-\tau_\nu}$$

$$+\sum_{\sigma=1}^{2n-3}(p_{\nu+\sigma}+p_{\nu+\sigma+1})\frac{\varphi(\tau_{\nu+\sigma+1})-\varphi(\tau_\nu)}{\tau_{\nu+\sigma+1}-\tau_\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, 2n), \tag{3}$$

где

$$p_{\nu 0} = \frac{\tau_{\nu+1}-\tau_{\nu-1}}{2\pi i}, \quad p_{\nu+j} = \frac{\tau_{\nu+j+1}-\tau_{\nu+j}}{2\pi i}, \quad j = 1, 2, \ldots, 2n-2.$$

Полученная формула (3) является своеобразной модификацией метода дискретных особенностей (см. [5]), так как интеграл рассматривается на дуге $\tau_{\nu-1}\tau_{\nu+1}$, а параметр сингулярности t_0 принимает значение τ_ν в середине дуги $\tau_{\nu-1}\tau_{\nu+1}$.

В дальнейшем формулу (3), по определенному соображению, удобнее переписать так

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t)}{t-\tau_\nu}dt \approx \varphi(\tau_\nu) + \sum_{\substack{\sigma=-n\\ \sigma\neq -1}}^{n-1}(p_{\nu+\sigma}+p_{\nu+\sigma+1})\frac{\varphi(\tau_{\nu+\sigma+1})-\varphi(\tau_\nu)}{\tau_{\nu+\sigma+1}-\tau_\nu}, \tag{4}$$

где

$$p_{\nu+0} = p_{\nu-1} - p_{\nu 0} = \frac{\tau_{\nu+1}-\tau_{\nu-1}}{2\pi i}, \quad p_{\nu+j} = \frac{\tau_{\nu+j+1}-\tau_{\nu+j}}{2\pi i},$$
$$j = -n, -n+1, \ldots, n-1 \ \ (j \neq -1,\ j \neq 0).$$

Для сингулярного интеграла в точке $t_0 \in \tau_\nu\tau_{\nu+1}$, $t_0 \neq \tau_{\nu+1}$ воспользуемся формулой

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t)}{t-t_0}dt \approx \varphi(t_0) + \sum_{\substack{\sigma=-n\\ \sigma\neq -1}}^{n-1}(p_{\nu+\sigma}+p_{\nu+\sigma+1})\frac{\varphi(\tau_{\nu+\sigma+1})-L_{n\nu}(\varphi;t_0)}{\tau_{\nu+\sigma+1}-t_0},$$

$$L_{n\nu}(\varphi;t_0)=(L_{n\nu}\varphi)(t_0)=l_{\nu 0}(t_0)\varphi(\tau_\nu)+l_{\nu 1}(t_0)\varphi(\tau_{\nu+1}),$$

$$l_{\nu 0}(t_0)=\frac{t_0-\tau_{\nu+1}}{\tau_\nu-\tau_{\nu+1}},\quad l_{\nu 1}(t_0)=\frac{t_0-\tau_\nu}{\tau_{\nu+1}-\tau_\nu},\quad t_0\in\tau_\nu\tau_{\nu+1},\, t_0\neq\tau_{\nu+1}.$$

Тогда квадратурный процесс можно записать в виде

$$(S\varphi)(t_0)\approx\varphi(t_0)+(Q_{n\nu}\varphi)(t_0),\quad t_0\in\tau_\nu\tau_{\nu+1},\ t_0\neq\tau_{\nu+1},\ 1\leqslant\nu\leqslant 2n,$$

где

$$(Q_{n\nu}\varphi)(t_0)=\sum_{\substack{\sigma=-n\\ \sigma\neq-1}}^{n-1}(p_{\nu+\sigma}+p_{\nu+\sigma+1})\frac{\varphi(\tau_{\nu+\sigma+1})-L_{n\nu}(\varphi;t_0)}{\tau_{\nu+\sigma+1}-t_0}.$$

К доопределению $(Q_{n\nu}\varphi)(t_0)$ в точке $\tau_{\nu+1}$ (как соответствующего предельного значения) достаточно заметить

$$\left.\frac{\varphi(\tau_{\nu+1})-L_{n\nu}(\varphi;t_0)}{\tau_{\nu+1}-t_0}\right|_{t_0=\tau_{\nu+1}}=\frac{\varphi(\tau_{\nu+1})-\varphi(\tau_\nu)}{\tau_{\nu+1}-\tau_\nu}.$$

При этом непосредственным образом убеждаемся, что вообще

$$(Q_{nj}\varphi)(\tau_{j+1})\neq(Q_{nj+1}\varphi)(\tau_{j+1})\quad(j=1,2,\ldots,2n),$$

$$(Q_{2n,2n}\varphi)(\tau_{2n})=(Q_{2n0}\varphi)(\tau_0),\quad\tau_0=\tau_{2n}.$$

В связи с этим, с целью построения заведомо непрерывной на всем L аппроксимации (что существенно с точки зрения обоснования схемы), мы в дальнейшем, полагая

$$(Q_n\varphi)(t_0)=(Q_{nj}\varphi)(t_0),\quad t_0\in\tau_j\tau_{j+1}\,(t_0\neq\tau_{j+1}),\ j=1,2,\ldots,2n,$$

$$(\widetilde{Q}_n\varphi)(t_0)=(L_{n\nu}Q_n\varphi)(t_0)=l_{\nu 0}(t_0)(Q_{n\nu}\varphi)(\tau_\nu)+l_{\nu 1}(t_0)(Q_{n\nu+1}\varphi)(\tau_{\nu+1}),$$

$$t_0\in\tau_\nu\tau_{\nu+1},\ \nu=1,2,\ldots,2n;$$

$$(S\varphi)(t_0)\approx(S_n\varphi)(t_0),\ t_0\in L,\ \text{ где }\ (S_n\varphi)(t_0)=\varphi(t_0)+(\widetilde{Q}_n\varphi)(t_0).$$

Доказывается, что оценка точности приближения $(S\varphi)(t_0)$ суммами типа $\varphi(t_0)+(Q_n\varphi)(t_0)$ для функций $\varphi\in H_r(\mu)$ $(0<\mu\leqslant 1)$, непрерывных на L вместе с производными вплоть до порядка r $(r\geqslant 0)$, причем $\varphi^{(r)}$ принадлежит классу Гёльдера с показателем μ, выражается формулой

$$\max_{t_0\in L}|(S\varphi)(t_0)-(S_n^*\varphi)(t_0)|=O\left(\frac{\ln n}{n^{r+\mu}}\right)\|\varphi^{(r)}\|_{H(\mu)},\tag{5}$$

где

$$(S_n^*\varphi)(t_0)=\varphi(t_0)+(Q_n\varphi)(t_0)\quad(t_0\in L),$$

$$\|\varphi\|_{H(\mu)}=\max_{t\in L}|\varphi(t)|+\sup_{t_1,t_2\in L}\frac{|\varphi(t_1)-\varphi(t_2)|}{|t_1-t_2|^\mu}\ \ (t_1\neq t_2),\tag{5'}$$

которая справедлива и для $r=0$ и $r=1$.

Перейдем теперь к доказательству ряда утверждений, относящихся к обоснованию изложенной здесь схемы. Обозначим через $H(\mu)$ $(0<\mu\leqslant 1)$ пространство функций, удовлетворяющих на L условию Гёльдера с показателем μ при соответствующем ($5'$) определении нормы. Покажем что при достаточно большом n для

$$(R_n\varphi)(t_0) = (S\varphi)(t_0) - (S_n\varphi)(t_0)$$

при $\varphi \in H(\alpha)$ $(0 < \alpha \leqslant 1)$ справедлива оценка

$$\|R_n\varphi\|_{H(\beta)} = O\left(\frac{\ln n}{n^{\alpha-\beta}}\right)\|\varphi\|_{H(\alpha)} \quad (0 < \beta < \alpha). \tag{6}$$

Действительно, полагая $t_0 \in \tau_\nu\tau_{\nu+1}$ $(1 \leqslant \nu \leqslant 2n)$, воспользуемся неравенством

$$|(R_n\varphi)(t_0)| \leqslant |(S_0\varphi)(t_0) - L_{n\nu}(S_0\varphi)(t_0)| + |L_{n\nu}(S\varphi - Q_n\varphi)(t_0)|, \tag{7}$$

где

$$(S_0\varphi)(t_0) \equiv \frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t - t_0}\,dt.$$

Учитывая $L_{n\nu}(1; t_0) \equiv 1$, согласно теореме Племеля — Привалова ([1; §18]) для первого слагаемого в первой части (7) нетрудно получить оценку $O(n^{-\alpha})\|\varphi\|_{H(\alpha)}$. Ко второму же слагаемому применим оценку (5) при $r = 0$ $(\mu = \alpha)$. В результате получаем

$$\max_{t_0\in L}|(R_n\varphi)(t_0)| = O\left(\frac{\ln n}{n^{\alpha}}\right)\|\varphi\|_{H(\alpha)} \ \ (n > 1). \tag{8}$$

Далее, пусть $t_1, t_2 \in L$. В силу (8) находим

$$\sup_{|t_1-t_2|>h/2}\frac{|(R_n\varphi)(t_1) - (R_n\varphi)(t_2)|}{|t_1 - t_2|^\beta} = O\left(\frac{\ln n}{n^{\alpha-\beta}}\right)\|\varphi\|_{H(\alpha)}.$$

Для t_1, t_2 таких, что $|t_1 - t_2| < h/2$ можно при достаточно большом n считать $t_1, t_2 \in \tau_j\tau_{j+1} \cup \tau_{j+1}\tau_{j+2}$ $(1 \leqslant j \leqslant 2n - 2)$. Полагая пока, что обе эти точки находятся на одной дуге разбиения, воспользуемся для $(R_n\varphi)(t_1) - (R_n\varphi)(t_2)$ аналогичным (7) неравенством. Тогда учитывая

$$|l_{\nu 0}(t_1) - l_{\nu 0}(t_2)| = |l_{\nu 1}(t_1) - l_{\nu 1}(t_2)| = \left|\frac{t_1 - t_2}{\tau_{\nu+1} - \tau_\nu}\right| = O(n^\beta)|t_1 - t_2|^\beta,$$

для рассматриваемого выражения нетрудно получить оценку

$$|(R_n\varphi)(t_1) - (R_n\varphi)(t_2)| = O\left(\frac{\ln n}{n^{\alpha-\beta}}\right)|t_1 - t_2|^\beta\|\varphi\|_{H(\alpha)}.$$

Случай, когда t_1, t_2 находятся на разных дугах $\tau_j\tau_{j+1}, \tau_{j+1}\tau_{j+2}$, очевидным образом сводится к предыдущему.

Возвращаясь к уравнению (1) заметим, что в силу известных утверждений относительно его разрешимости и сингулярных операторов вида $(S\varphi)(t_0)$ (см. [2]), оператор $K = I + 1/2\operatorname{Re} S_0$ $(H(\beta) \to H(\beta),\ 0 < \beta \leqslant 1)$ непрерывен и непрерывно обратим. В принятом в начале предложении ляпуновости контура L аналогичное справедливо и в пространстве непрерывных функций. В дальнейшем наряду с уравнением (1), которое будем считать всюду ниже записанным в виде $K\varphi = 1/2f$, в пространстве $H(\beta)$ будем рассматривать

$$(K_n\varphi_n)(t_0) = \varphi_n(t_0) + \frac{1}{2}\operatorname{Re}(\widetilde{Q}_n\varphi_n)(t_0) = \frac{1}{2}f(t_0). \tag{9}$$

Для разрешимости уравнения (9) рассматривать соответствующие однородные уравнения

$$\varphi_n(t_0) + 1/2\mathrm{Re}\,(\widetilde{Q}_n\varphi_n)(t_0) = 0 \tag{9_0}$$

и докажем, что начиная с некоторого n они имеют лишь нулевое решение. Для этого воспользуемся утверждениями 1)–2) доказанными в [2]:

1) Пусть $\{j_n\}$ — любая последовательность натуральных номеров с условием $j_n/n \to 0$ $(n \to \infty)$. Тогда при любом ν $(1 \leqslant \nu \leqslant 2n)$ и $\sigma_0, \lambda_0, \lambda_1$ таких, что $\tau_{\nu+\sigma_0}, \tau_{\nu+\sigma_0+1}$, $\tau_{\nu+\lambda_0}, \tau_{\nu+\lambda_1} \in \tau_\nu\tau_{\nu+j_n}$, справедливо

$$\frac{p_{\nu+\sigma_0}}{\tau_{\nu+\lambda_0} - \tau_{\nu+\lambda_1}} = \frac{1}{2\pi i(\lambda_0 - \lambda_1)}[1 + O(w_{j_n h})] \quad (n \to \infty), \tag{10}$$

где

$$w_{j_n h} = \max_{\xi,\eta\in[s_\nu, s_{\nu+j_n}]}\{|x'(\xi) - x'(\eta)|, \quad |y'(\xi) - y'(\eta)|\} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

2) При достаточно большом n имеем

$$\|\varphi_n\|_{H(\beta)} = O(\ln n)h_{n\beta}(\varphi_n), \tag{11}$$

где φ_n — решение уравнения (9_0), а

$$h_{n\beta}(\varphi_n) = \max_{1\leqslant\nu,j\leqslant 2n}\frac{|\varphi_n(\tau_j) - \varphi_n(\tau_\nu)|}{|\tau_j - \tau_\nu|^\beta} \quad (j = \nu + \lambda,\ \lambda \neq 0).$$

Использование (11) вместе с (8) для φ_n (с заменой α на β) дает

$$\max_{t_0\in L}|(R_n\varphi_n)(t_0)| = O\left(\frac{\ln^2 n}{n^\beta}\right)h_{n\beta}(\varphi_n) \quad (n \to \infty). \tag{12}$$

Кроме того, можно написать

$$(K\varphi_n)(t_0) - (K_n\varphi_n)(t_0) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\,(R_n\varphi_n)(t_0),$$

согласно которому и (9_0), следует

$$(K\varphi_n)(t_0) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\,(R_n\varphi_n)(t_0).$$

Отсюда в силу (12) и замеченного выше об обратимости оператора K находим, что равномерно относительно $t_0 \in L$ выполняется

$$\varphi_n(t_0) = O\left(\frac{\ln^2 n}{n^\beta}\right)h_{n\beta}(\varphi_n) \quad (n \to \infty). \tag{13}$$

Теперь, используя (10), (13) можно показать, что при достаточно большом n уравнение (9_0) не может иметь нетривиальных решений. Для этого, очевидно, исходя из структуры сумм Q_n, достаточно доказать, что начиная с некоторого n имеет место $h_{n\beta}(\varphi_n) = 0$.

В дальнейших рассуждениях считаем указанную в утверждении 1) последовательность $\{j_n\}$ выбранной так, что для заданного $\beta \in (0,1)$ и любого $\delta \in (0,1]$ верно

$$j_n^\beta \ln^2 n \to 0, \quad n^{-\delta}j_n^{\beta+\delta} \to 0 \quad (n \to \infty). \tag{14}$$

Переходя непосредственно к оценке $h_{n\beta}(\varphi_n)$, разделим множество узлов $\tau_\nu, \tau_j = \tau_{\nu+\lambda}$ на $|j-\nu| > j_n$, $|j-\nu| \leqslant j_n$. Используя (13), получаем

$$\max_{|j-\nu|>j_n} \frac{|\varphi_n(\tau_j)-\varphi_n(\tau_\nu)|}{|\tau_j-\tau_\nu|^\beta} = O\left(\frac{n^\beta}{j_n^\beta}\right) \max_{1\leqslant p\leqslant 2n} |\varphi_n(\tau_p)| = O\left(\frac{\ln^2 n}{j_n^\beta}\right) h_{n\beta}(\varphi_n) \quad (n\to\infty). \tag{15}$$

В оценке соответствующего выражения при $|j-\nu| \leqslant j_n$, очевидно, достаточно ограничится $j=\nu+\lambda$ ($\lambda = 1,2,\dots,j_n$, $1 \leqslant j_n < \frac{n}{2}, 1 \leqslant j \leqslant 2n$). Учитывая, что в силу (9_0)

$$\varphi_n(\tau_{\nu+\lambda}) - \varphi_n(\tau_\nu) + \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[(Q_{n\nu+\lambda}\varphi_n)(\tau_{\nu+\lambda}) - (Q_n\varphi_n)(\tau_\nu)\right] = 0, \tag{16}$$

разобьем суммы в выражениях $(Q_{n\nu}\varphi_n)(\tau_\nu)$ и $(Q_{n\nu+\lambda}\varphi_n)(\tau_{\nu+\lambda})$ соответственно на $\sum_{j_n1}, \sum_{j_n2}$ и $\sum_{j_n3}, \sum_{j_n4}$, где

$$\left(\sum\nolimits_{j_n1}\right)(\varphi_n) = \sum_{\substack{\sigma=-2j_n\\ \sigma\neq -1}}^{2j_n} (p_{\nu+\sigma+1}+p_{\nu+\sigma}) \frac{\varphi(\tau_{\nu+\sigma+1})-\varphi(\tau_\nu)}{\tau_{\nu+\sigma+1}-\tau_\nu},$$

$$\left(\sum\nolimits_{j_n3}\right)(\varphi_n) = \sum_{\substack{\sigma=-2j_n\\ \sigma\neq \lambda-1}}^{2j_n} (p_{\nu+\sigma+1}+p_{\nu+\sigma}) \frac{\varphi(\tau_{\nu+\sigma+1})-\varphi(\tau_{\nu+\lambda})}{\tau_{\nu+\sigma+1}-\tau_{\nu+\lambda}},$$

а $\sum_{j_n2}, \sum_{j_n4}$ содержат суммы остальных слагаемых соответственно в $(Q_{n\nu}\varphi_n)(\tau_\nu)$ и $(Q_{n\nu+\lambda}\varphi_n)(\tau_{\nu+\lambda})$.

Воспользовавшись в суммах $\sum_{j_n1}, \sum_{j_n3}$ представлением (10), убеждаемся (учитывая $I_m\varphi_n(t) \equiv 0$), что в получающихся в результате слагаемых главные члены оказываются чисто мнимыми, поэтому

$$\mathrm{Re}\left(\sum\nolimits_{j_n3} - \sum\nolimits_{j_n1}\right)(\varphi_n) = O(w_{j_nh}) h_{n\beta}(\varphi_n) h^\beta \sum_{\sigma=1}^{2j_n} \frac{1}{\sigma^{1-\beta}} = h^\beta j_n^\beta O(w_{j_nh}) h_{n\beta}(\varphi_n).$$

К $(\sum_{j_n4}, \sum_{j_n2})(\varphi_n)$ применим представление

$$\left(\sum\nolimits_{j_n4} - \sum\nolimits_{j_n2}\right)(\varphi_n) = -[\varphi_n(\tau_{\nu+\lambda}) - \varphi_n(\tau_\nu)] \left(\sum_{\sigma=-(n-1)}^{-(2j_n+1)} + \sum_{\sigma=2j_n+1}^{n}\right)$$

$$\times \frac{p_{\nu+\sigma+1}+p_{\nu+\sigma}}{\tau_{\nu+\sigma+1}-\tau_\nu} + (\tau_{\nu+\lambda}-\tau_\nu) \left(\sum_{\sigma=-(n-1)}^{-(2j_n+1)} + \sum_{\sigma=2j_n+1}^{n}\right) (p_{\nu+\sigma+1}+p_{\nu+\sigma})$$

$$\times \frac{\varphi_n(\tau_{\nu+\sigma+1}) - \varphi_n(\tau_{\nu+\lambda})}{(\tau_{\nu+\sigma+1}-\tau_{\nu+\lambda})(\tau_{\nu+\sigma+1}-\tau_\nu)},$$

заметив при этом, что сумма со множителем $\tau_{\nu+\lambda} - \tau_\nu$ в соответствующем представлении может быть оценена выражением вида

$$O(h^2\lambda) \max_{1\leqslant p\leqslant 2n} |\varphi_n(\tau_p)| \sum_{\sigma=2j_n+1}^{n} \frac{1}{|s_{\nu\pm\sigma+1} - s_{\nu+\lambda}||s_{\nu\pm\sigma+1} - s_\nu|}.$$

На основании этого, воспользовавшись соотношением (13) убеждаемся, что рассматриваемая сумма

$$(\tau_{\nu+\lambda}-\tau_\nu)\left(\sum_{\sigma=-(n-1)}^{-(2j_n+1)}+\sum_{\sigma=2j_n+1}^{n}\right)(p_{\nu+\sigma+1}+p_{\nu+\sigma})\frac{\varphi_n(\tau_{\nu+\sigma+1})-\varphi_n(\tau_{\nu+\lambda})}{(\tau_{\nu+\sigma+1}-\tau_{\nu+\lambda})(\tau_{\nu+\sigma+1}-\tau_\nu)}$$

$$=O\left(\frac{\lambda h^\beta\ln^2 n}{j_n}\right)h_{n\beta}(\varphi_n).$$

Оставшуюся сумму в выражении $\left(\sum_{j_n4}-\sum_{j_n2}\right)(\varphi_n)$ представим в виде $\lambda_{j_n1}(\varphi_n)+\lambda_{j_n2}(\varphi_n)$:

$$\lambda_{j_n1}(\varphi_n)=-\left(\frac{p_{\nu+2j_n+1}}{\tau_{\nu+2j_n+1}-\tau_\nu}+\frac{p_{\nu-2j_n}}{\tau_{\nu-2j_n}-\tau_\nu}\right)[\varphi_n(\tau_{\nu+\lambda})-\varphi_n(\tau_\nu)],$$

$$\lambda_{j_n2}(\varphi_n)=-\left(\frac{p_{\nu+2j_n+2}}{\tau_{\nu+2j_n+2}-\tau_\nu}+\sum_{\sigma=2j_n+2}^{n}\frac{p_{\nu+\sigma+1}+p_{\nu+\sigma}}{\tau_{\nu+\sigma+1}-\tau_\nu}\right.$$

$$\left.+\frac{p_{\nu-2j_n-1}}{\tau_{\nu-2j_n}-\tau_\nu}+\sum_{\sigma=2j_n+1}^{n}\frac{p_{\nu-\sigma+1}+p_{\nu-\sigma}}{\tau_{\nu-\sigma+1}-\tau_\nu}\right)[\varphi_n(\tau_{\nu+\lambda})-\varphi_n(\tau_\nu)].$$

Очевидно $\lambda_{j_n1}(\varphi_n)=O(h^\beta\lambda^\beta j_n^{-1})h_{n\beta}(\varphi_n)$. Относительно λ_{j_n2} заметим, что множитель для $(\varphi_n(\tau_{\nu+\lambda})-\varphi_n(\tau_\nu))$ можно рассматривать как усложненную квадратурную сумму (см. [6]) для интеграла

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_{l_n}\frac{dt}{t-\tau_\nu},\quad l_n=L\backslash\tau_{\nu-2j_n}\tau_{\nu+2j_n}\quad(n\to\infty).$$

Для соответствующего остаточного члена $r_n(\varphi_n)$, можно написать

$$|r_n(\varphi_n)|=O(h^2)\sum_{\sigma=2j_n+1}^{n}\max_{t\in l_n}\frac{1}{|t-\tau_\nu|^2}=O(1)\sum_{\sigma=2j_n+1}^{n}\frac{1}{\sigma^2}=O(j_n^{-1})\to 0\ \ (n\to\infty). \tag{18}$$

Легко вычисляется, что (см. (10))

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_{l_n}\frac{dt}{t-\tau_\nu}=\frac{1}{\pi i}\ln\frac{\tau_{\nu-2j_n-1}-\tau_\nu}{\tau_{\nu+2j_n+1}-\tau_\nu}=1+\ln\left(1+\frac{2w_{j_nh}}{1-w_{j_nh}}\right)=1+O(w_{j_nh}).$$

Последнее вместе с (18) дает

$$\lambda_{j_n2}(\varphi_n)=[-1+O(j_n^{-1})+O(w_{j_nh})][\varphi_n(\tau_{\nu+\lambda})-\varphi_n(\tau_\nu)],\ \ n\to\infty.$$

В результате, с учетом (16) получаем

$$\frac{\varphi_n(\tau_{\nu+\lambda})-\varphi_n(\tau_\nu)}{|\tau_{\nu+\lambda}-\tau_\nu|^\beta}+\frac{1}{2}(-1+\varepsilon_n)\frac{\varphi_n(\tau_{\nu+\lambda})-\varphi_n(\tau_\nu)}{|\tau_{\nu+\lambda}-\tau_\nu|^\beta}$$

$$+(O(n^{-\delta}j_n^{\beta+\delta})+O(j_n^{-\beta}\ln^2 n)h_{n\beta}(\varphi_n)=0,\quad 1\leqslant\lambda\leqslant j_n, \tag{19}$$

где δ $(0 < \delta \leqslant 1)$ показатель в условии Ляпунова для контура L, $\varepsilon_n \to 0$ $(n \to \infty)$. На основании этого и (14), (15) следует требуемое утверждение $h_{n\beta}(\varphi) = 0$ при достаточно большом n. А это означает, что $\varphi_n(t_0) = 0$ — тривиальное решение для уравнения (9_0) начиная с некоторого $n > n_0$.

Далее рассмотрим тождество

$$\varphi - \varphi_n = \frac{1}{2} K_n^{-1}(K_n - K)K^{-1}f.$$

Из выше доказанного следует, что операторы K_n в пространстве $H(\beta)$ имеют непрерывные обратные. Тогда на основании оценки (6), учитывая, что φ и φ_n решения уравнений (1) и (9) при $\varphi \in H(\alpha)$ $(\alpha > \beta)$, имеет место

$$\|\varphi - \varphi_n\|_{H(\beta)} = O\left(\frac{\ln^2 n}{n^{\alpha-\beta}}\right) \quad (n \to \infty). \tag{20}$$

Таким образом справедлива

Теорема. *Пусть D — конечная односвязная область, ограниченная замкнутым контуром Ляпунова L, $f(t)$ — заданная функция на L (действительная), удовлетворяющая условию Гёльдера $H(\alpha)$ $(0 < \alpha \leqslant 1)$, тогда вычислительная схема (9) для граничной задачи (1) при $n > n_0$ имеет единственное решение φ_n и справедлива оценка (20), где $\alpha > \beta$.*

Наконец отметим, что можно построить квадратурные формулы по методу локально-канонического разбиения более высокой степени точности. В частности, вместо интерполяции с двумя узлами можно взять три или четыре узла. В этом случае обоснование вычислительной схемы проводится аналогично, но при существовании соответствующих производных оценки будут более высокого порядка.

Литература

1. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения.—М.: Наука, 1968.—540 с.
2. *Саникидзе Д. Г.* К численному решению граничных задач методом аппроксимации сингулярных интегралов // Дифференциальные уравнения.—1993.—Т. 29, № 9.—С. 1632–1644.
3. *Нинидзе К. Р.* О локальном каноническом разбиении в схемах численного решения задач плоской теории упругости // Тр. IX Международного симпозиума, Орел.—2000.—С. 329–332.
4. *Саникидзе Д. Г.* О методе дискретных вихрей повышенной точности для числ енного решения одного класса сингулярных интегральных уравнений // Дифференциальные уравнения.—1998.—Т. 39, № 9.—С. 1–7.
5. *Лифанов И. К.* Метод ситнгулярных интегральных уравнений и численный эксперимент.—М.: ТОО «Янус», 1995.—520 с.
6. *Никольский С. М.* Квадратурные формулы.—М.: Наука, 1974.—224 с.

Статья поступила 5 апреля 2003 г.

Хубежты Шалва Соломонович, к. ф.-м. н.
г. Владикавказ, Институт прикладной математики
и информатики ВНЦ РАН,
E-mail: shalva57@rambler.ru