

Посвящается 60-летию профессора  
Иллариона Давидовича Музаева

УДК 532(075.8)

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ ГРУНТА  
НА ОСНОВЕ УЧЕТА НЕЛИНЕЙНЫХ СВОЙСТВ  
ПРИ ИНТЕНСИВНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

В. Б. Заалишвили, Ж. Д. Туаева

Объектом исследования является модель колебания грунтовой толщи с нелинейными свойствами при интенсивных сейсмических воздействиях, заданных в виде различных импульсов. Цель работы — создание методики определения функций смещения. Рассматривается нелинейное сейсмическое воздействие  $SH$ -волны на грунтовую толщу с нелинейными свойствами. Математическая модель строится на основе нелинейной зависимости Хардин — Дрневича и представляет собой начально-краевую задачу упругости для функции смещения грунтовой толщи при известной импульсной функции. Получены решения начально-краевых задач при различных входных данных. Анализ полученных данных показывает, что при учете нелинейных свойств грунтов в математической модели колебаний грунтовой толщи в условиях значительных деформаций на графике спектральной кривой появляются пики на кратных частотах.

Нелинейная модель сплошной среды должна учитывать две нелинейности разной природы: геометрическую нелинейность (конечность деформации) и физическую нелинейность, т. е. нелинейную связь тензоров напряжения и деформации. Применение нелинейной модели при исследовании сейсмических волн обусловлено использованием мощных электрогидравлических вибрационных источников в сейсморазведке, необходимостью расчета интенсивных сейсмических полей при взрывах и землетрясениях, важностью учета параметров определенного грунта [4].

Рассмотрим слой почвы с нелинейными свойствами:  $0 \leq z \leq h$ , а  $z > h$  — полупространство с линейными упругими свойствами. На слой почвы  $z = h$  действует вертикальная преобладающая  $SH$ -волна с данной частотой  $f_0$ . Упругое полупространство характеризуется  $S$ -волной со скоростью распространения  $C_e$ . Поведение свойств грунта обычно описывается зависимостью, связывающей функции деформации  $\gamma(z, t)$  и касательного напряжения  $\tau(z, t)$  ( $t$  — время)

$$\tau = G(\gamma) \cdot \gamma, \quad (1)$$

где  $G(\gamma)$  — модуль упругости.

Уравнение (1) характеризует нелинейное поведение грунтов по Хардин — Дрневичу, т. е.

$$G(\gamma) = \frac{G_0}{1 + \frac{\gamma}{\gamma_0}}, \quad (2)$$

где  $G_0$  — известное максимальное значение модуля упругости для малых возмущений,  $\gamma_0$  — заданное максимальное значение деформации.

Дополнительно к зависимостям (1)–(2) введем функцию, характеризующую нелинейное затухание, данное Е. И. Хосри (1984):

$$\beta(\gamma) = \beta_0 + [\beta_m - \beta_0] \frac{\frac{\gamma}{\gamma_0}}{1 + \frac{\gamma}{\gamma_0}}, \quad (3)$$

где  $\beta_0$  и  $\beta_m$  — заданные коэффициенты затухания.

Уравнение, описывающее динамику грунтовой среды, выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial \tau}{\partial z} = \rho a, \quad (4)$$

$\rho$  — заданная плотность грунта,  $a$  — ускорение.

Для учета нелинейности грунтов касательное напряжение представляем в виде

$$\tau = G(\gamma) \frac{\partial u}{\partial z} + G_0 \cdot \beta(\gamma) \frac{\partial u}{\partial z}. \quad (5)$$

Перейдем к задаче нахождения функции смещения  $u(z, t)$ . Принимая во внимание то, что  $a = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ , соотношение (4) перепишем в виде

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left( (G(\gamma) + G_0 \beta(\gamma)) \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (6)$$

или

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial z} (G(\gamma) + G_0 \beta(\gamma)) \frac{\partial u}{\partial z} + [G(\gamma) + G_0 \beta(\gamma)] \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \quad (7)$$

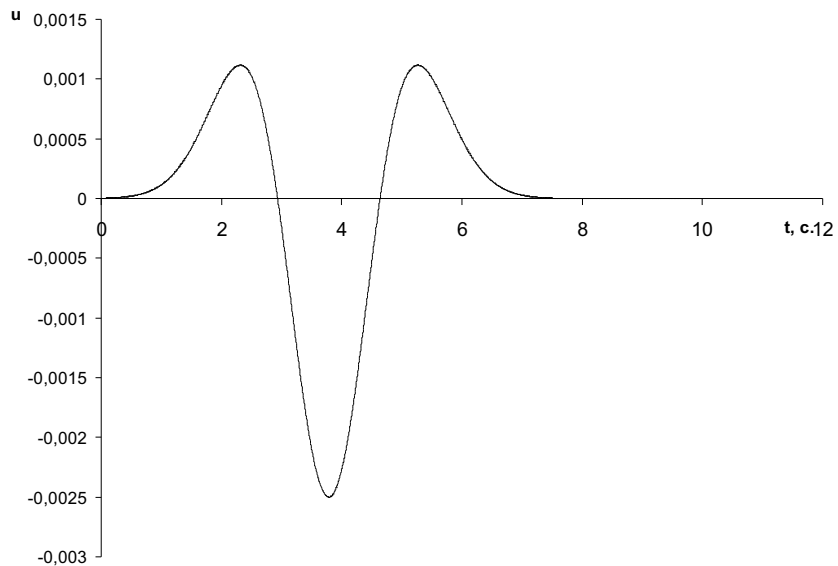


Рис. 1.

Для последующих выкладок введем следующее обозначение:

$$k(\gamma) = G(\gamma) + G_0 \beta(\gamma),$$

тогда равенство (7) будет представлено так

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial k}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial z} + k \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \quad (8)$$

Вопрос постановки граничных и начальных условий решается следующим образом. На границе  $z = h$  задается импульсная функция вида

$$u_0(t) = u_0 \cdot \left( \left[ \pi \frac{(t - t_0)}{t_0} \right]^2 - \frac{1}{2} \right) e^{-\left[ \pi \frac{(t - t_0)}{t_0} \right]^2}, \quad (9)$$

где  $t_0$  — время, при котором частота колебаний принимает наибольшее значение. График функции представлен на рис. 1.

На свободной поверхности  $z = 0$  принимаем

$$\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=0} = 0. \quad (10)$$

Что касается начальных условий, то в линейно-упругой среде (полупространство  $z < h$ ) считается заданным поле скоростей. Таким образом, начальные условия запишутся в виде

$$u \Big|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = C_e. \quad (11)$$

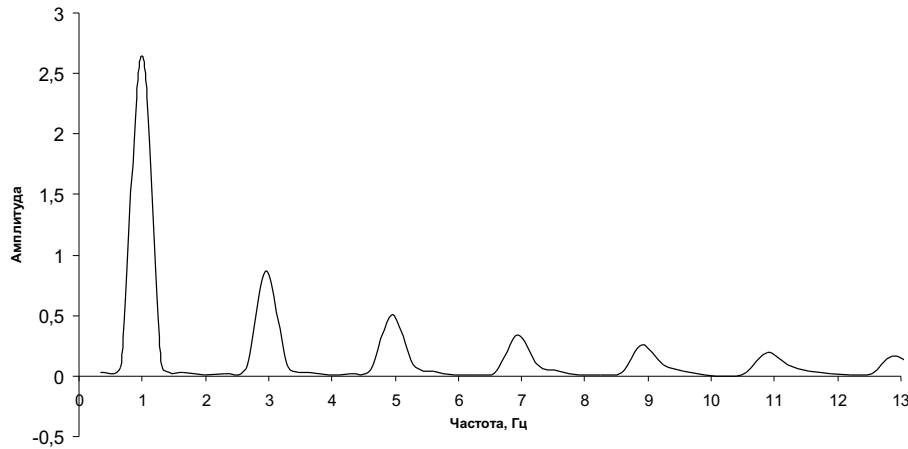


Рис. 2.

Равенства (8)–(11) представляют собой начально-краевую задачу, моделирующую волновой процесс в рыхлой грунтовой среде с нелинейными свойствами. Для данной модели проведено численное исследование с применением метода конечных разностей [1]. Конечно-разностная схема модели (8)–(11) применяется для пятиточечного шаблона в расчетной точке  $(z_i, t_j)$ ,  $i = 0, \dots, N$ ,  $j := 0, \dots, M$  ( $M$  и  $N$  — количество узлов сетки), и выглядит следующим образом:

$$\rho \frac{u_i^{j+1} - 2u_i^j + u_i^{j-1}}{dt^2} = \frac{k_{i+1}^j - k_i^j}{dx} \frac{u_{i+1}^j - u_i^j}{dx} + k_i^j \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{dx^2}, \quad (12)$$

где  $i = 1, \dots, N - 1, j = 1, \dots, M - 1$ , начальные и граничные условия:

$$u_i^0 = 0, \quad \frac{u_i^1 - u_i^0}{dt} = C_e, \quad i = 1, \dots, N, \quad (13)$$

$$u_0^j = u_0(j * dt), \quad \frac{u_N^j - u_{N-1}^j}{dx} = 0, \quad j = 0, \dots, M. \quad (14)$$

Рассматриваемая схема (12)–(14) является явной, что следует из вида ее пятиточечного шаблона  $(u_i^{j+1}, u_i^j, u_i^{j-1}, u_{i+1}^j, u_{i-1}^j)$ , порядок ее аппроксимации —  $O(dt^2 + dx^2)$ . Введя обозначение

$$\chi = \frac{dt^2}{\rho dx^2},$$

преобразуем (12) к виду

$$u_i^{j+1} = k_i^j \chi u_{i-1}^j + \left(2 - \chi (k_{i+1}^j + k_i^j)\right) u_i^j - u_i^{j+1} + u_{i+1}^j \left(\chi k_{i+1}^j\right). \quad (15)$$

Устойчивость схемы (12)–(14) соблюдается при выполнении условия Куранта

$$\frac{|k_i^j| * dt^2}{\rho * dx^2} \leq 1 \quad \forall i, j.$$

На рис. 2 приведен график зависимости амплитуды функции смещения от частоты колебаний (спектр колебаний на поверхности грунтовой толщи).

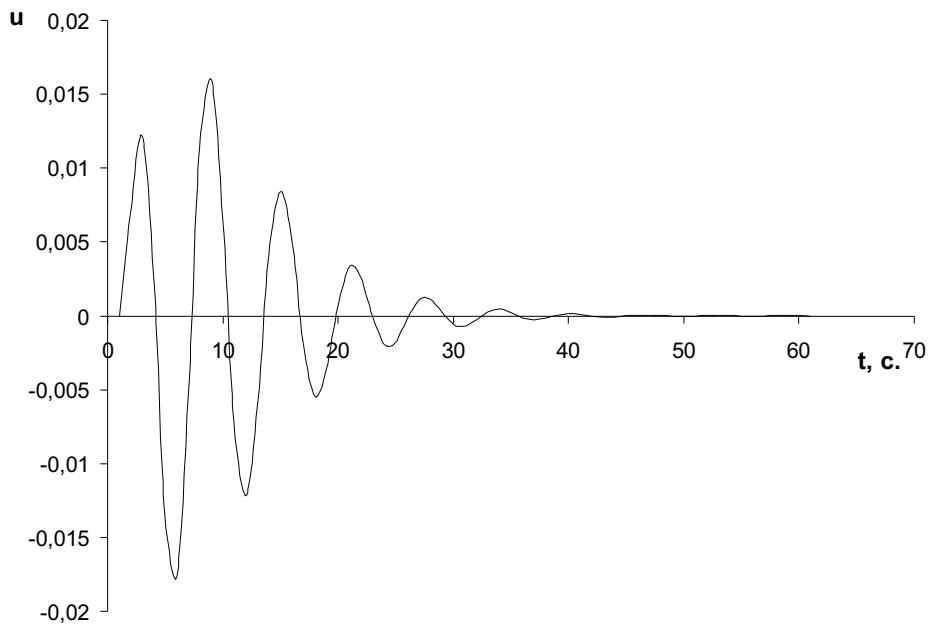


Рис. 3.

Анализ полученных данных показывает, что при учете нелинейных свойств грунтов в математической модели колебаний грунтовой толщи в условиях значительных деформаций на графике спектральной кривой появляются пики на кратных частотах. Полученные данные сравнивались с данными экспериментальных исследований, сопоставление

показало хорошее соответствие. Таким образом, компьютерный результат может быть использован для исследований сейсмических свойств грунтов на различных глубинах.

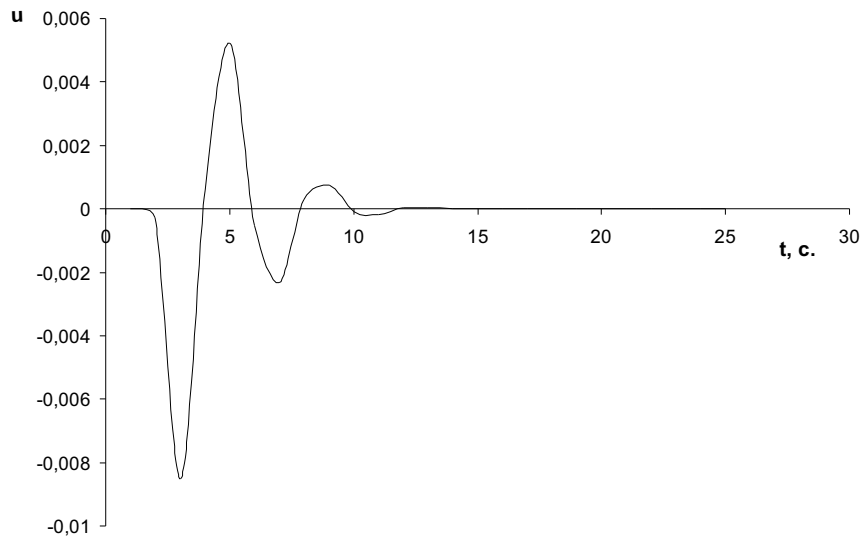


Рис. 4.

Теперь рассмотрим другие импульсные функции, в частности, функцию-импульс Берлаге (рис. 3)  $u(t) = a_1 t e^{-\beta t} \sin \omega_0 t$  и функцию-импульс Пузырева  $u(t) = a_2 e^{-\beta^2 t^2} \sin \omega_0 t$  (рис. 4) [3]. Тогда, применяя аналогичную методику решения задачи, получаем уменьшение количества пиков на графике спектра. На рис. 5 приводится один график, так как вновь построенные спектры колебаний на поверхности грунтовой толщ при соответствующих импульсах имеют идентичный вид, а значения амплитуд отличаются на тысячные доли.

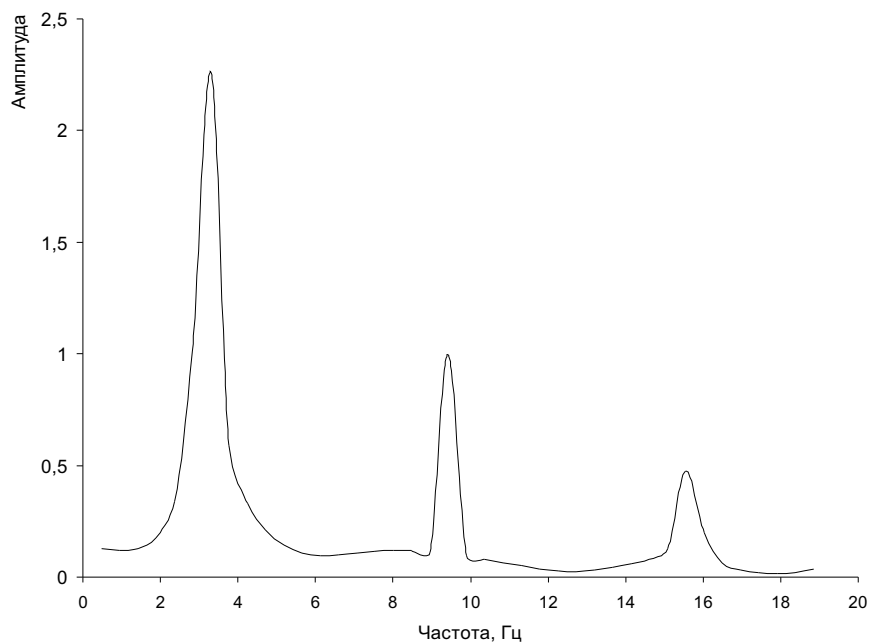


Рис. 5.

### Литература

1. Гавурин М. К. Лекции по методам вычислений.—М.: Наука, 1990.
2. Заалишвили В. Б., Туаева Ж. Д. Математическое моделирование колебаний грунтовой толщи на основе учета нелинейных свойств грунтов при интенсивных воздействиях // Материалы Международной научной конференции «Информационные технологии и системы: наука и практика».—Владикавказ: Изд-во ВНЦ, 2002.—С. 367–369.
3. Энгельбрехт Ю. К., Фельдман М. В. Изменение спектрального состава сейсмических импульсов при распространении в нелинейной среде // В сб.: Нелинейные проблемы сейсмологии.—М.: Наука, 1987.
4. Энгельбрехт Ю. К. О моделировании нелинейных эффектов в сейсмических волнах // В сб.: Нелинейные проблемы сейсмологии.—М.: Наука, 1987.

*Статья поступила 12 апреля 2003 г.*

Заалишвили Владислав Борисович, д.ф.-м.н.  
г. Владикавказ, Институт прикладной математики  
и информатики ВНЦ РАН  
E-mail: vzaal@mail.ru

Туаева Жанна Дмитриевна, д.ф.-м.н.  
г. Владикавказ, Институт прикладной математики  
и информатики ВНЦ РАН  
E-mail: janna@alanianet.ru