Владикавказский математический журнал
Январь–март, 2003, Том 5, Выпуск 1

УДК **517.518.23+517.54+517.813.52+517.954**

ГЕОМЕТРИЯ ПРОСТРАНСТВ КАРНО — КАРАТЕОДОРИ, КВАЗИКОНФОРМНЫЙ АНАЛИЗ И ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ МЕРЫ[1]

С. К. Водопьянов

Приводятся результаты по геометрии пространств Карно — Каратеодори. Демонстрируется применение этих результатов для доказательства $\mathcal{P}$-дифференцируемости липшицевых и слабо компактных отображений пространств Карно — Каратеодори. Показаны также некоторые применения теории дифференцируемости к геометрической теории меры и теории квазиконформных отображений на пространствах Карно — Каратеодори.

Введение

Хорошо известно, что в основании широкого круга проблем геометрической теории меры лежит теорема Радемахера о дифференцируемости липшицевых отображений. Отображение $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, удовлетворяющее условию

$$|f(x) - f(y)| \leqslant C|x - y| \tag{1}$$

для всех точек $x, y \in \mathbb{R}^n$, где постоянная C не зависит от выбора точек $x, y \in \mathbb{R}^n$, называется *липшицевым.* Как видно из определения, липшицевы отображения позволяют контролировать геометрию образа геометрией прообраза.

В 1919 году Радемахер исследовал дифференциальные свойства липшицевых отображений. Напомним, что линейное отображение $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ называется *дифференциалом* отображения $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ в точке x, если

$$|[f(x+v) - f(x)] - L(v)| = o(|v|) \quad \text{при } v \to 0.$$

Теорема 1 [37]. *Всякое липшицево отображение $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ дифференцируемо почти всюду.*

Несколькими годами позже В. Степанов установил дифференцируемость отображений, удовлетворяющих более слабому сравнительно с (1) условию: для отображения $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ вместо условия (1) он рассмотрел

$$\varlimsup_{y \to x} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} < \infty \quad \text{почти всюду.} \tag{2}$$

[1]Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 03–01–00899) и программы «Университеты России» (УР.04.01.050).

Теорема 2 [40]. *Всякое липшицево отображение* $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, *удовлетворяющее условию* (2), *дифференцируемо почти всюду.*

Теорема 1 служит основой для решения ряда задач геометрической теории меры (см., например, [18, 19]). Теоремы 1 и 2 широко применяются в смежных разделах анализа и его приложениях. Отметим, что дифференцируемость квазиконформных отображений получается непосредственно из теоремы Степанова, так как всякое квазиконформное отображение удовлетворяет условию (2) (см., например, [11]).

Условие (1) легко обобщается на случай отображений метрических пространств: отображение $f:(\mathbb{M},d)\to(\widetilde{\mathbb{M}},\tilde{d})$ метрических пространств называется *липшицевым*, если

$$\tilde{d}(f(x),f(y))\leqslant Cd(x,y) \tag{3}$$

для всех точек $x,y\in\mathbb{M}$. Наименьшая постоянная C в этом неравенстве называется постоянной Липшица и обозначается символом $\operatorname{Lip} f$.

Поскольку римановы многообразия локально евклидовы, то очевидно липшицевы отображения римановых многообразий дифференцируемы почти всюду.

Проблему дифференцируемости липшицевых отображений в неримановых метриках впервые исследовал П. Пансю [35] при изучении дифференциальных свойств квазиконформных отображений групп Карно.

Напомним, что *группой Карно* [35] или *стратифицированной однородной группой* [17] называется связная односвязная нильпотентная группа Ли $\mathbb{G}$, алгебра Ли V которой разлагается в прямую сумму $V_1\oplus\dots\oplus V_m$ векторных пространств таких, что $\dim V_1\geqslant 2$, $[V_1,V_k]=V_{k+1}$ для $1\leqslant k\leqslant m-1$ и $[V_1,V_m]=\{0\}$. Пусть векторные поля $X_{11},\dots,X_{1n_1}$ образуют базис пространства V_1. Поскольку они порождают V, для каждого $1<i\leqslant m$ можно выбрать базис X_{ij}, $1\leqslant j\leqslant n_i=\dim V_i$, в V_i, образованный коммутаторами полей $X_{1k}\subset V_1$ порядка $i-1$. Отождествим элементы $g\in\mathbb{G}$ с элементами $x\in\mathbb{R}^N$, $N=\sum\limits_{i=1}^m n_i$, $x=(x_{ij})$, $1\leqslant i\leqslant m$, $1\leqslant j\leqslant n_i$, посредством экспоненциального отображения $\exp\bigl(\sum x_{ij}X_{ij}\bigr)=g$. Растяжения δ_t, определяемые как $\delta_t x=(t^i x_{ij})_{1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n_i}$, суть автоморфизмы $\mathbb{G}$ для любого $t>0$. Мера Лебега dy на $\mathbb{R}^N$ — биинвариантная мера Хаара на $\mathbb{G}$, и $d(\delta_t x)=t^\nu dx$, где $\nu=\sum\limits_{i=1}^m i\dim V_i$ — однородная размерность группы $\mathbb{G}$. Мера Лебега $|E|$ измеримого множества $E\subset\mathbb{G}$ равна $\int\limits_E dx$.

Евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ со стандартной структурой служит примером абелевой группы: векторные поля $\frac{\partial}{\partial x_i}$, $i=1,\dots,n$, не имеют нетривиальных коммутационных соотношений и образуют базис соответствующей алгебры Ли. Примером неабелевой группы Карно является группа Гейзенберга $\mathbb{H}^n$. Ее алгебра Ли имеет размерность $2n+1$, а центр одномерен. Если $X_1,\dots,X_n,Y_1,\dots,Y_n,T$ — базис алгебры Гейзенберга, то нетривиальными коммутационными соотношениями будут лишь $[X_i,Y_i]=-4T$, $i=1,\dots,n$, все остальные скобки равны нулю.

Однородная норма на группе $\mathbb{G}$ является непрерывной функцией $\rho:\mathbb{G}\to[0,\infty)$ класса C^∞ на $\mathbb{G}\setminus\{0\}$, обладающей свойствами:

(a) $\rho(x)=\rho(x^{-1})$ и $\rho(\delta_t(x))=t\rho(x)$;

(b) $\rho(x)=0$ тогда и только тогда, когда $x=0$;

(c) существует постоянная $c>0$ такая, что $\rho(x_1x_2)\leqslant c(\rho(x_1)+\rho(x_2))$ для всех $x_1,x_2\in\mathbb{G}$.

Естественно, что однородная норма определяется неоднозначно, однако любые две однородные нормы эквивалентны между собой: если ρ_1 и ρ_2 — две однородные нормы, то существуют постоянные c_1 и c_2 такие, что $0 < c_1 \leqslant \rho_1(x)/\rho_2(x) \leqslant c_2 < \infty$ для любого $x \in \mathbb{G}$, отличного от 0. Далее на группе Карно мы фиксируем такую однородную норму ρ, что $\rho(X_{ij}(0))^i$ равняется длине вектора $X_{ij}(0)$ относительно скалярного произведения в касательном пространстве к единице группы, $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n_i$. Однородная норма определяет однородную метрику r: для любых двух точек $x, y \in \mathbb{G}$ полагаем $\rho(x,y) = \rho(y^{-1}x)$. Относительно этой метрики стандартным образом задаются сферы $S(x,t)$, шары $B(x,t)$ и топология, которая оказывается эквивалентной евклидовой. Нормируем меру Лебега таким образом, чтобы мера шара $B(0,1)$ равнялась риманову объему шара $\exp^{-1}(B(0,1))$. Тогда $|B(0,r)| = \gamma r^\nu$, где $\gamma = |B(0,1)|$.

Набор $X_1, X_2, \dots, X_n$ базисных векторов пространства V_1 (здесь и далее полагаем, что $n_1 = n$ и $X_{1i} = X_i$, где $i = 1, \dots, n$) удовлетворяет условию гипоэллиптичности Хёрмандера [23]. *Расстоянием Карно — Каратеодори* $d(x,y)$ между двумя точками $x, y \in \mathbb{G}$ называется нижняя грань длин всех горизонтальных кривых с концевыми точками x, y, где длина измеряется римановой метрикой, а горизонтальная кривая есть абсолютно непрерывный кусочно-гладкий путь, касательный вектор которого принадлежит V_1. Можно показать, что $d(x,y)$ всегда является конечной левоинвариантной метрикой, причем расстояния $d(x,y)$ и $\rho(x,y)$ эквивалентны: существуют постоянные c_3 и c_4 такие, что $0 < c_3 \leqslant d(x,y)/\rho(x,y) \leqslant c_4 < \infty$ для любого $x, y \in \mathbb{G}$, $x \neq y$.

П. Пансю получил обобщение теоремы Радемахера на группы Карно в следующей форме.

Теорема 3 [35]. *Всякое липшицево отображение $f : U \to \widetilde{\mathbb{G}}$ открытого множества U группы Карно G в группу Карно $\widetilde{\mathbb{G}}$ $\mathcal{P}$-дифференцируемо почти всюду. Соответствующий $\mathcal{P}$-дифференциалу гомоморфизм алгебр Ли определяется отображением $X_i(g) \mapsto X_i f(g) \in H_{f(g)}(\mathbb{N})$ базисных векторов горизонтального подрасслоения, $i = 1, \dots, n$.*

Здесь *$\mathcal{P}$-дифференциал* $L : \mathbb{G} \to \widetilde{\mathbb{G}}$ интерпретируется как *гомоморфизм* групп Карно такой, что

1) $L(\exp H_1) \subset \exp \widetilde{H}_1$,

2) $L(\delta_t v) = \tilde{\delta}_t L(v)$ для всех $v \in \mathbb{G}$ и $t > 0$,

3) $\tilde{\delta}_{t^{-1}}(f(x)^{-1} f(x\delta_t v))$ сходится равномерно к $L(v)$ при $t \to 0$ на всякой компактной части области определения отображения f.

В работе [35] сформулировано также обобщение теоремы Степанова на группы Карно, однако этот результат оставлен там без подробного доказательства. При внимательном анализе оказалось, что известные в евклидовом пространстве аргументы в случае групп Карно не работают. Основная причина состоит в том, что в евклидовом пространстве всякое липшицево отображение измеримого множества может быть продолжено до липшицева отображения всего евклидова пространства (теорема Киршбаума), а на группах Карно такой теоремы нет (кроме случая, когда область значений — евклидово пространство). Поэтому дифференцируемость липшицевых отображений, определенных на измеримом множестве одной группы Карно со значениями в другой группе Карно, должна устанавливаться как самостоятельный результат. Заметим, что его доказательство, полученное в [8, 41], требует значительно более тонких рассуждений по сравнению с доказательством теоремы 3.

Теорема 4 [8, 41]. *Всякое липшицево отображение $f : E \to \widetilde{\mathbb{G}}$ измеримого множества E группы Карно G в группу Карно $\widetilde{\mathbb{G}}$ $\mathcal{P}$-дифференцируемо почти всюду. Соответствующий $\mathcal{P}$-дифференциалу гомоморфизм алгебр Ли определяется отображением $X_i(g) \mapsto X_i f(g) \in \widetilde{V}_1(f(g))$ базисных векторов горизонтального подрасслоения $V_1(g)$, $i = 1, \dots , n$.*

Обобщение теоремы Степанова на группы Карно — это прямое следствие теоремы 4.

Теорема 5 [8, 41]. *Всякое отображение $f : E \to \widetilde{\mathbb{G}}$ измеримого множества E группы Карно G в группу Карно $\widetilde{\mathbb{G}}$, удовлетворяющее условию*

$$\varlimsup_{y\to x} \frac{\tilde{d}(f(x), f(y))}{d(x, y)} < \infty \quad \text{для почти всех } x \in \mathbb{G},$$

$\mathcal{P}$-дифференцируемо почти всюду. Соответствующий $\mathcal{P}$-дифференциалу гомоморфизм алгебр Ли определяется отображением $X_i(g) \mapsto X_i f(g) \in \widetilde{V}_1(f(g))$ базисных векторов горизонтального подрасслоения $V_1(g)$, $i = 1, \dots , n$, где при определении производной вдоль векторного поля используется аппроксимативный предел [41].

Теорема 4 лежит также в основании геометрической теории меры на группах Карно: с ее помощью доказываются теоремы о замене переменной в интеграле Лебега [8, 41] и формулы площади [28, 38, 41], а также исследуются спрямляемые множества [38], и другие вопросы.

Специально отметим работу Дж. Чигера [16], в которой развита концепция дифференцирования для вещественнозначных липшицевых функций, определенных на метрических пространствах, удовлетворяющих некоторым условиям на их геометрию. К сожалению, пока не существует столь общей концепции дифференцирования для липшицевых отображений метрических пространств при условии, что область значений отлична от евклидова пространства.

Цель сообщения — показать, следуя работе [4], как концепция дифференцируемости распространяется на липшицевы отображения пространств Карно — Каратеодори, а затем применить ее к некоторым задачам анализа.

§ 1. Пространства Карно — Каратеодори

Пространство Карно — Каратеодори (cc-пространство) $\mathbb{M}$ характеризуется [20] как риманово многообразие класса C^∞, в касательном расслоении $T\mathbb{M}$ которого выделено горизонтальное подрасслоение $H\mathbb{M} \subset T\mathbb{M}$, удовлетворяющее следующим алгебраическим условиям на коммутаторы гладких векторных полей $\{X_1, \dots , X_n\}$, образующих локальный базис в $H\mathbb{M}$, $n = \dim H\mathbb{M}$: векторные поля $\{X_1, \dots , X_n\}$ вместе со всеми своими коммутаторами до порядка $k \in \mathbb{N}$ включительно порождают в $T\mathbb{M}(g)$ подпространство $H_{k+1}\mathbb{M}(g) \supset H_k\mathbb{M}(g)$ (полагаем $H_1\mathbb{M}(g) = H\mathbb{M}(g)$), размерность которого не зависит от выбора точки g. При этом предполагается, что $H_{k_0}\mathbb{M}(g) = T\mathbb{M}(g)$ для некоторого k_0, где k_0 — минимальное целое число, удовлетворяющее этому свойству. Если $k_0 = 0$, то $H\mathbb{M}(g) = T\mathbb{M}(g)$ для всех $g \in \mathbb{M}$, и, следовательно, мы имеем риманово многообразие.

Определим векторные поля X_i, $i = 1, \dots , N$, образующие базис T_gU в каждой точке $g \in U \subset \mathbb{M}$, следующим образом: на первом шаге к векторным полям $X_1, \dots , X_{\dim H_1}$, образующим некоторый локальный базис H_1, добавляем векторные поля $X_{\dim H_1+1},\dots,\ X_{\dim H_2}$ так, чтобы поля $X_1,\dots,X_{\dim H_2}$ образовывали базис H_2; на $(k-1)$-ом шаге к полям $X_1,\dots,\ X_{\dim H_{k-1}}$ добавляем векторные поля $X_{\dim H_{k-1}+1}$, $\dots,\ X_{\dim H_k}$ так, чтобы поля $X_1,\dots,X_{\dim H_k}$ образовывали базис H_k. В результате за C_U шагов мы получим искомый набор векторных полей X_i, $i=1,\dots,N$. Каждому векторному полю X_i сопоставим натуральное число $\deg X_i = \min\{j \mid X_i \in H_j\}$, называемое в дальнейшем (*формальной*) *степенью* поля X_i. Очевидно $\deg X_i \leqslant i$.

Кусочно-гладкая кривая $\gamma : [a,b] \to \mathbb{M}$ называется горизонтальной, если $\dot\gamma(t) \in H_1\mathbb{M}(\gamma(t)))$. Ее длина измеряется римановым тензором на $\mathbb{M}$: $l(\gamma) = \int\limits_a^b \|\dot\gamma(t)\|\,dt$. Хорошо известна теорема Рашевского — Чоу, см., например, [20], в соответствии с которой любые две точки u, v связной окрестности $U \subset \mathbb{M}$ можно соединить кусочно-гладкой горизонтальной кривой γ конечной длины $l(\gamma)$.

cc-Расстояние Карно — Каратеодори $d(x,y)$ между точками $x,y \in \mathbb{M}$ определяется как точная нижняя грань длин *горизонтальных* кривых, соединяющих точки x,y, и является неримановым, если H_1 — собственное подрасслоение.

Доказательство дифференцируемости липшицевых отображений в категории *cc*-пространств основывается на следующих фактах субримановой геометрии. Известно (см., например, [13]), что отображение

$$\theta_g : (x_1,\dots,x_N) \to \exp\Big(\sum_{i=1}^N x_i X_i\Big) \circ g, \quad \theta_g(0) = \theta_g(0,\dots,0) = g,$$

$N = \dim H_{k_0}$, является гладким диффеоморфизмом некоторого евклидова шара $B_e(0,\epsilon_g)$, где ϵ_g — достаточно малое положительное число, в некоторую окрестность $\mathcal{O}(g)$ точки g. Набор чисел $\{x_i\}$, $i=1,\dots,N$, где $(x_1,\dots,x_N) = \theta_g^{-1} u \in B_e(0,\epsilon_g)$, называется *координатами 1-го рода* точки $u = \exp\Big(\sum\limits_{i=1}^N x_i X_i\Big) \circ g$.

Определим в $\mathcal{O}(g)$ *группу растяжений* $\Delta_t = \theta_g \circ \delta_t \circ \theta_g^{-1}$, где однопараметрическое семейство отображений δ_t, $t>0$, в координатах 1-го рода действует как

$$\delta_t : (x_1,\dots,x_N) \to (t^{\deg X_1} x_1,\dots,t^{\deg X_N} x_N).$$

Рассмотрим на множестве $\mathcal{O}(g)$ набор векторных полей $\{\varepsilon^{\deg X_i} X_i\} = \{X_i^\varepsilon\}$, $i = 1,\dots,N$.

Справедлив следующий результат, установленный в [20, 31]. Мы даем другое доказательство этого свойства, которое ближе к методам работ [23, 34].

Лемма 1 [31]. *Векторные поля $(\Delta_{\varepsilon^{-1}})_* X_i^\varepsilon$, $i=1,\dots,N$, сходятся равномерно на $\mathcal{O}(g)$ при $\varepsilon \to 0$ к некоторым гладким векторным полям $\widehat{X}_i$; при этом набор векторных полей $\{\widehat{X}_i\}$, $i=1,\dots,N$, образует базис векторных полей нильпотентной градуированной алгебры Ли некоторой локальной группы Карно в $\mathcal{O}(g)$, причем $\widehat{X}_i(g) = X_i(g)$, $i=1,\dots,N$. Последнее равенство переносит на касательное пространство $T_g\mathbb{M}$ структуру нильпотентной алгебры Ли.*

Символом $\exp sX(u)$ мы обозначаем интегральную линию векторного поля X с началом в точке $u \in \mathcal{O}(g)$. Напомним [10], что групповая операция в локальной группе Карно, упомянутой в лемме 1, для элементов

$$a = \exp\Big(\sum_{i=1}^N \alpha_i X_i\Big)(g) \in \mathcal{O}(g), \quad b = \exp\Big(\sum_{i=1}^N \beta_i X_i\Big)(g) \in \mathcal{O}(g),$$

определяется следующим образом:

$$a \cdot b = \exp\Big(\sum_{i=1}^{N} \beta_i X_i\Big) \circ \exp\Big(\sum_{i=1}^{N} \alpha_i X_i\Big)(g),$$

где наборы чисел α_i и β_i — столь малы, что правая часть последнего равенства принадлежит $\mathcal{O}(g)$.

Определение 1. Метрическое пространство $(\mathcal{O}(g), d_c)$ с расстоянием Карно — Каратеодори d_c, определяемого посредством набора векторных полей $\{\widehat{X}_i\}$, называется *нильпотентным касательным конусом Громова* пространства Карно — Каратеодори $(\mathcal{O}(g), d)$ в точке g.

Таким образом, касательный в смысле Громова конус cc-пространства в точке $g \in \mathbb{M}$ моделируется локальной группой Карно $(\mathcal{O}(g), d_c)$. Удобно рассматривать окрестность $\mathcal{O}(g)$ точки g как метрическое подпространство $(\mathcal{O}(g), d)$, так и окрестность единицы некоторой группы Карно.

В силу леммы 1 нильпотентный касательный конус имеет структуру локальной группы Карно. Концепция нильпотентного касательного конуса принадлежит Громову [20]. В случае римановых пространств линейная структура в касательном конусе определяется через координаты первого рода. Заметим, что такой подход к определению касательной структуры в римановой геометрии обычно не используется. Причина здесь состоит в том, что метрики в римановом пространстве и в нормальной системе координат квазиизометричны, причем коэффициент квазиизометричности тем ближе к единице, чем меньше окрестность рассматриваемой точки. Этот факт обычно выражают словами, что метрическая структура риманова многообразия локально евклидова. В случае пространств Карно — Каратеодори метрики пространств $(\mathcal{O}(g), d)$ и $(\mathcal{O}(g), d_c)$ уже не сравнимы [32]. Это означает, что даже при исследовании локальных проблем необходимо изобретать новые методы.

Локальное поведение метрик описано в следующем утверждении.

Теорема 6 [4]. *Рассмотрим в $\mathcal{O}(g)$ векторные поля*

$$V_\varepsilon = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \varepsilon^{\deg X_i} X_i \quad \text{и} \quad \widehat{V}_\varepsilon = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \varepsilon^{\deg X_i} \widehat{X}_i,$$

где $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, $\alpha_i \in [-1, 1]$ — постоянные коэффициенты, ε_0 — достаточно малое число. Тогда найдутся константы κ_1, C_1, не зависящие от выбора точки $\hat{g} \in \mathcal{O}(g)$ и коэффициентов α_i, такие, что

$$\max\big\{d(\exp V_\varepsilon(\hat{g}), \exp \widehat{V}_\varepsilon(\hat{g})), d_c(\exp V_\varepsilon(\hat{g}), \exp \widehat{V}_\varepsilon(\hat{g}))\big\} \leqslant C_1 \varepsilon^{1+\kappa_1}.$$

Ниже вводится основное для данной работы определение «касательной» сходимости.

Определение 2. Рассмотрим семейство метрических пространств $(\mathcal{O}(g), \frac{d}{\varepsilon})$ при малых $\varepsilon > 0$. Пусть последовательность чисел $\varepsilon_i \to 0$ при $i \to \infty$. Будем говорить, что последовательность $\{x_i \in B(g, \varepsilon_i R)\}_{i \in \mathbb{N}}$ *сходится* к точке $x \in B_c(g, R)$, где B_c — шар в метрике d_c радиуса R, если $d_c(\Delta_{1/\varepsilon_i} x_i, x) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Доказательство формулируемой ниже теоремы о дифференцируемости базируется на следующем свойстве, представляющем независимый интерес.

Теорема 7 [4]. *Последовательность кривых $v_i(\kappa)\in B_i(g,1)$, $\kappa\in[0,1]$, где*

$$v_i(\kappa)=\exp\Big(\sum_{j=1}^{N}\alpha^i_{l,j}(\kappa\varepsilon_i)^{\deg X_j}X_j\Big)\circ\dots\circ\exp\Big(\sum_{j=1}^{N}\alpha^i_{1,j}(\kappa\varepsilon_i)^{\deg X_j}X_j\Big)(g)\in B_i(g,1),$$

$\lim\limits_{i\to\infty}\alpha^i_{p,j}=\alpha_{p,j}$ *для* $p=1,\dots,l$, $j=1,\dots,N$, *сходится при* $\lim\limits_{i\to\infty}\varepsilon_i=0$ *к кривой* $v(\kappa)\in B_c(g,1)$, $\kappa\in[0,1]$, *где*

$$v(\kappa)=\exp\Big(\sum_{j=1}^{N}\kappa^{\deg X_j}\alpha_{l,j}\widehat{X}_j\Big)\circ\dots\circ\exp\Big(\sum_{j=1}^{N}\kappa^{\deg X_j}\alpha_{1,j}\widehat{X}_j\Big)(g),\quad \kappa\in[0,1].$$

Пусть E — измеримое множество в $\mathbb{M}$. Отображение $f:(E,d)\to(\widetilde{\mathbb{M}},\tilde{d})$ удовлетворяет условию Липшица, если для всех точек $x,y\in E$ выполняется соотношение (3).

Отображение $f:(E,d)\to(\widetilde{\mathbb{M}},\tilde{d})$ называется $\mathcal{P}$-*дифференцируемым* в точке $g\in E$, если существует гомоморфизм $L:(\mathcal{O}_g,d_c)\to(\widetilde{\mathcal{O}}_{f(g)},\tilde{d}_c)$ такой, что

1) $dL(e)$ — гомоморфизм горизонтальных подпространств, т. е. $dL(e):\widehat{H}_1\to\widehat{\widetilde{H}}_1$,
2) $L(\delta_t w)=\tilde{\delta}_t L(w)$ для всех $w\in(\mathcal{O}_g,d_c)$ и достаточно малых $t>0$,
3) $\tilde{d}(f(w),L(w))=o(d(g,w))$ при $\mathcal{O}(g)\ni w\to g$.

Отметим, что касательный конус группы Карно — это сама группа Карно. Поэтому, если $\mathbb{M}$ и $\widetilde{\mathbb{M}}$ — группы Карно, то определенный здесь дифференциал совпадает с $\mathcal{P}$-дифференциалом Пансю.

Следующий результат обобщает известную теорему Радемахера о дифференцируемости липшицевых функций.

Теорема 8 [4]. *Пусть $E\subset\mathbb{M}$ — измеримое множество, и пусть $f:E\to\mathbb{M}$ — липшицево отображение из E в $\mathbb{M}$. Тогда f $\mathcal{P}$-дифференцируемо почти всюду на E и дифференциал единствен. Соответствующий $\mathcal{P}$-дифференциалу гомоморфизм алгебр Ли определяется отображением $X_i(g)\mapsto X_if(g)\in\widehat{\widetilde{H}}_1(f(g))$ базисных векторов горизонтального подрасслоения $\widehat{H}_1(g)$, $i=1,\dots,n$.*

В качестве следствия мы получаем обобщение теоремы Степанова.

Теорема 9 [4]. *Пусть $E\subset\mathbb{M}$ — измеримое множество, и пусть $f:E\to\widetilde{\mathbb{M}}$ — отображение из E в $\widetilde{\mathbb{M}}$ такое, что*

$$\varlimsup_{x\to g,x\in E}\frac{\tilde{d}(f(x),f(g))}{d(x,g)}<\infty$$

для почти всех $g\in E$. Тогда отображение f $\mathcal{P}$-дифференцируемо п. в. на E и $\mathcal{P}$-дифференциал единствен. Соответствующий $\mathcal{P}$-дифференциалу гомоморфизм алгебр Ли определяется отображением $X_i(g)\mapsto X_if(g)\in\widehat{\widetilde{H}}_1(f(g))$ базисных векторов горизонтального подрасслоения $\widehat{H}_1(g)$, $i=1,\dots,n$, где при определении производной вдоль векторного поля используется аппроксимативный предел [41].

§ 2. Отображения классов Соболева пространств Карно — Каратеодори

Символом $B(x,r)$ обозначается шар в *cc*-метрике d: $B(x,r)=\{y\in\mathbb{M} : d(x,y)<r\}$. Стандартным образом относительно *cc*-метрики определяются хаусдорфовы мера и размерность на $\mathbb{M}$. В работе [31] подсчитано, что хаусдорфова размерность ν *cc*-пространства $\mathbb{M}$ выражается формулой

$$\nu=\sum_{k=1}^{k_0}k(\dim H_k\mathbb{M}(x)-\dim H_{k-1}\mathbb{M}(x)),$$

где положено $H_0\mathbb{M}(x)=\{0\}$ и поэтому $\dim H_0\mathbb{M}(x)=0$. В силу условия, наложенного на коммутаторы векторных полей, написанная сумма не зависит от выбора точки x.

Стандартная мера $|\cdot|$ на римановом многообразии $\mathbb{M}$ регулярна, в следующем смысле: *cc*-шар $B(x,r)$ как открытое множество в $\mathbb{M}$ удовлетворяет следующему соотношению

$$c_1r^\nu\leqslant|B(x,r)|\leqslant c_2r^\nu \tag{4}$$

для достаточно малых r, где c_1 и c_2 — постоянные, не зависящие от выбора точки x на некотором фиксированном компактном множестве $F\subset\mathbb{M}$.

Обозначим символом $\mathcal{H}^\nu$ ν-мерную меру Хаусдорфа относительно *cc*-метрики d. Из (4) вытекает, что на любом компактном подмножестве в $\mathbb{M}$ мера $\mathcal{H}^\nu$ пропорциональна мере Лебега.

Напомним, что локально суммируемая функция $g_i:\Omega\to\mathbb{R}$ называется обобщенной производной функции $f:\Omega\to\mathbb{R}$ вдоль векторного поля X_i, если

$$\int\limits_\Omega g_i\psi\,d\mathcal{H}^\nu(x)=-\int\limits_\Omega fX_i^*\psi\,d\mathcal{H}^\nu(x)$$

для любой тестовой функции $\psi\in C_0^\infty(\Omega)$, где X_i^* — дифференциальный оператор, формально сопряженный к оператору X_i. Последнее означает следующее: если в некоторой системе координат векторное поле $X_i=\sum\limits_{i=1}^N a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}$, то

$$X_i^*\psi=\sum_{i=1}^N\frac{\partial}{\partial x_j}(a_{ij}\psi).$$

Заметим, что в случае групп Карно $X_i^*=X_i$. Вектор $\nabla_{\mathcal{L}}f(x)=(g_1(x),\dots,g_n(x))\in H\mathbb{M}(x)$ называется обобщенным градиентом функции f. Полагаем еще $X_if=g_i$.

Определение классов Соболева. Пусть Ω — область в *cc*-пространстве $(\mathbb{M},d)$. Функция $f:\Omega\to\mathbb{R}$ принадлежит пространству Соболева $W^1_{q,\mathrm{loc}}(\Omega)$, $q\geqslant1$, если $f\in L_{q,\mathrm{loc}}(\Omega)$ и существует обобщенная производная $f:\Omega\to\mathbb{R}$ вдоль векторного поля X_i, $i=1,\dots,n$, принадлежащая $L_{q,\mathrm{loc}}(\Omega)$.

Пусть $(\mathbb{X},r)$ — произвольное метрическое пространство. Мы говорим, что отображение отображение $f:\Omega\to\mathbb{X}$ *принадлежит классу Соболева* $W^1_{q,\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbb{X})$, если выполняются следующие условия:

(A) Для любого $z \in \mathbb{X}$ функция
$$[f]_z : \Omega \ni x \mapsto \tilde{d}(f(x), z)$$
принадлежит классу $W^1_{q,\mathrm{loc}}(\Omega)$.

(B) Семейство функций $(\nabla_{\mathcal{L}}[f]_z)_{z\in\mathbb{X}}$ имеет мажоранту, принадлежащую классу $L_{q,\mathrm{loc}}(\Omega)$, т. е. существует функция $g \in L_{q,\mathrm{loc}}(\Omega)$, не зависящая от z такая, что $|\nabla_{\mathcal{L}}[\varphi]_z(x)| \leqslant g(x)$ для почти всех $x \in \Omega$.

В случае $\mathbb{M} = \mathbb{R}^n$ приведенное выше определение отображения класса Соболева совпадает с определением Ю. Г. Решетняка [12]. В работе автора [41] из этого определения выведены многочисленные свойства отображений классов Соболева на группах Карно. Приведем обобщения некоторых из этих свойств на случай *cc*-пространств.

2.1. Поточечные оценки. Приводимый ниже результат — очевидное обобщение рассуждений работы [2]. Для локально интегрируемой функции и произвольного шара B в *cc*-пространстве $\mathbb{M}$ рассмотрим среднее значение $f_B = \int\limits_B f\,dx$ функции f на шаре B. Если $f \in L^1_q(\mathbb{M})$, $q \in [1,\infty)$, то справедлива следующая оценка для потенциала Рисса [24, 26, 27]:
$$|f(x) - f_B| \leqslant C \int\limits_{2B} \frac{|\nabla_{\mathcal{L}} f(y)|}{d(x,y)^{\nu-1}}\, d\mathcal{H}^\nu(y) \tag{5}$$
для почти всех точек $x \in B$, где постоянная C выбирается по компактному множеству F, которому принадлежат центры выбираемых шаров, и некоторой величине r_0, ограничивающей радиусы рассматриваемых шаров (здесь и далее kB для шара $B = B(x,t)$ есть шар $B(x,kt)$). Для точек $x, y \in F$ определим шар B наименьшего радиуса с центром в точке a такой, что $x, y \in \overline{B}$ и $d(x,a) = d(y,a)$. Применяя неравенство (5), получаем
$$\begin{aligned}|f(x) - f(y)| &\leqslant |f(x) - f_B| + |f(y) - f_B| \\ &\leqslant C\biggl(\int\limits_{2B} \frac{|\nabla_{\mathcal{L}} f(z)|}{d(x,z)^{\nu-1}}\, d\mathcal{H}^\nu(z) + \int\limits_{2B} \frac{|\nabla_{\mathcal{L}} f(z)|}{d(y,z)^{\nu-1}}\, d\mathcal{H}^\nu(z)\biggr) = C(I_1 + I_2).\end{aligned}$$
Оценим первый из интегралов в правой части, второй оценивается аналогично. Очевидно, что $2B \subset B_1 = B(x,t)$, где $\delta = 3d(x,y)$. Отсюда имеем
$$\begin{aligned}I_1 &\leqslant \int\limits_{B_1} \frac{|\nabla_{\mathcal{L}} f(z)|}{d(x,z)^{\nu-1}}\, d\mathcal{H}^\nu(z) = \sum_{j=1}^\infty \int\limits_{\frac{1}{2^{j-1}}B_1 \setminus \frac{1}{2^j}B_1} \frac{|\nabla_{\mathcal{L}} f(z)|}{d(x,z)^{\nu-1}}\, d\mathcal{H}^\nu(z) \\ &\leqslant C_1\delta \sum_{j=1}^\infty \frac{1}{2^j} \frac{1}{\bigl|\frac{1}{2^{j-1}}B_1\bigr|} \int\limits_{\frac{1}{2^{j-1}}B_1} |\nabla_{\mathcal{L}} f(z)|\, d\mathcal{H}^\nu(z) \leqslant C_1\delta M_\delta |\nabla_{\mathcal{L}} f|(x),\end{aligned}$$
где C_1 зависит от постоянных в соотношении (4), а
$$M_\delta g(x) = \sup\biggl\{|B(x,r)|^{-1} \int\limits_{B(x,r)} |g|\, dx : r \leqslant \delta\biggr\},$$
— максимальная функция, которая очевидно определена для любой локально суммируемой функции g (если $\delta = \infty$, от вместо $M_\infty g(x)$ будем писать просто $Mg(x)$). Окончательно приходим к следующему результату.

Предложение 1. *Если функция $f \in W^1_{q,\mathrm{loc}}(\mathbb{M})$, $q \in [1,\infty]$, то для любого компактного множества $F \subset \mathbb{M}$ существуют постоянная C_3 и множество $S \subset F$ нулевой меры такие, что для всех точек $x, y \in F \setminus S$ справедливо неравенство*

$$|f(x) - f(y)| \leqslant C_3 d(x,y)(M_{3d(x,y)}(|\nabla_{\mathcal{L}} f|)(x) + M_{3d(x,y)}(|\nabla_{\mathcal{L}} f|)(y)). \tag{6}$$

2.2. Формальный дифференциал отображений классов Соболева. Из поточечной оценки (6) вытекает важное для отображений классов Соболева свойство.

Предложение 2. *Пусть отображение $f : \mathbb{M} \to \mathbb{X}$ принадлежит классу Соболева $W^1_q(\mathbb{M}; \mathbb{X})$, $q \geqslant 1$, а $\mathcal{O} \subset \mathbb{M}$ — компактная область. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует измеримое множество $A \subset \mathcal{O}$ такое, что $|\mathcal{O} \setminus A| < \varepsilon$ и сужение $\varphi|_A$ удовлетворяет условию Липшица.*

$\lhd$ Фиксируем $\varepsilon > 0$ и компактную область $\Omega \Supset \mathcal{O}$ такую, что $\overline{\mathcal{O}} \subset \Omega$. Для любой функции $f \in W^1_q(\mathbb{M})$, $q > 1$, из предложения 1 вытекает существование множества $S \subset \mathcal{O}$ нулевой меры и неотрицательной функции $g \in L_q(\mathcal{O})$ таких, что выполняется следующее поточечное неравенство:

$$|f(x) - f(y)| \leqslant d(x,y)(\psi(x) + \psi(y))$$

для всех точек $x, y \in \mathcal{O} \setminus S$. Заметим, что в качестве ψ можно взять произведение максимальной функции от $|\nabla_{\mathcal{L}} f|$ на некоторую постоянную, зависящую от Ω (предполагается, что $|\nabla_{\mathcal{L}} f|$ продолжена нулем на дополнении к Ω). (Напомним, что с метрикой d окрестность $\mathcal{O}$ является метрическим пространством однородного типа, поэтому максимальная функция является ограниченным оператором в $L_q(\mathcal{O})$, $q > 1$, см., например, [39].)

Если $q = 1$, то приведенная поточечная оценка верна также для $f \in W^1_1(\mathbb{M})$ при условии, что неотрицательная функция g удовлетворяет условию $|\{x \in \mathcal{O} : g(x) \geqslant k\}| \leqslant Ck^{-1}$ для всякого $k > 0$.

Фиксируем $z \in \mathbb{X}$ и рассмотрим функцию $[f]_z(x) = r(z, f(x))$. Заметим, что поскольку область Ω ограничена, то $[\varphi]_z \in W^1_q(\Omega)$, так как

$$|\nabla_{\mathcal{L}}[f]_z|(x) \leqslant g(x) \quad \text{почти всюду в } \Omega, \text{ а } g \in L_q(\Omega).$$

Поэтому, подставляя в $|f(x) - f(y)| \leqslant \rho(x,y)(\psi(x) + \psi(y))$ функцию $[f]_z$ вместо f, получаем неравенство

$$\big|[f]_z(x) - [f]_z(y)\big| \leqslant d(x,y)(Mg(x) + Mg(y)) \tag{7}$$

для всех точек $x, y \in \mathcal{O} \setminus S_z$, где S_z — некоторое множество нулевой меры. Правая часть в (7) не зависит от z. Более того, по известным свойствам максимальной функции g принадлежит $L_q(\mathcal{O})$ при $q > 1$ и $|\{x \in \mathcal{O} : g(x) \geqslant k\}| \leqslant Ck^{-1}$ при $q = 1$ для всякого $k > 0$.

Рассмотрим произвольное счетное всюду плотное множество $Z \subset f(\mathcal{O})$ и положим

$$S = \bigcup_{z \in Z} S_z.$$

Тогда $|S| = 0$. Пусть $A = \{x \in \mathcal{O} : g(x) \leqslant k\}$, где k подбирается настолько большим, чтобы $|\mathcal{O} \setminus A| < \varepsilon$. Тогда $|r(z, f(x)) - r(z, f(y))| \leqslant 2kd(x, y)$ для любых точек $x, y \in A$ и $z \in Z$. Выбирая произвольную последовательность точек $z_l \to f(x)$, получаем неравенство

$$r(f(x), f(y)) \leqslant 2kd(x, y)$$

для всех точек $x, y \in A$. Таким образом, сужение $f|_A$ удовлетворяет условию Липшица. $\triangleright$

Если $\mathbb{X} = \widetilde{\mathbb{M}}$ — *cc*-пространство, то по теореме 8 ограничение $f|_A$ дифференцируемо почти всюду на A. Следовательно, в почти всех точках $x \in A$ определено соответствие $X_i(x) \to X_i f(x)$, где в выражении $X_i f(x) = \frac{d}{dt} f(\exp tX_i(x))|_{t=0}$ предел понимается в аппроксимативном смысле [41]. Таким образом, для почти всех $x \in$ A соответствие $X_i(x) \to X_i f(x)$ порождает гомоморфизм алгебр Ли касательных конусов, который будем называть *формальным дифференциалом.*

Таким образом, из предложения 2 и теоремы 8 получен следующий неожиданный результат.

Теорема 10. *Пусть $\mathbb{M}$, $\widetilde{\mathbb{M}}$ — cc-пространства, а $f : \mathbb{M} \to \widetilde{\mathbb{M}}$ — отображение класса $W_{q,\mathrm{loc}}(\mathbb{M}; \widetilde{\mathbb{M}})$, $q \geqslant 1$. Тогда для почти всех $x \in \mathbb{M}$ отображение $X_i(x) \to X_i f(x)$ порождает гомоморфизм алгебр Ли касательных конусов.*

Замечание 1. В следующем пункте будет доказана абсолютная непрерывность отображений классов Соболева при $q > 1$, так что при $q > 1$ можно считать, что производная $X_i f(x)$ в формулировке теоремы понимается в обычном римановом смысле.

2.3. *ACL*-Свойство. Отображение $f : [-a, a] \to \mathbb{X}$ в метрическое пространство $(\mathbb{X}, r)$ называется *абсолютно непрерывным*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любой совокупность взаимно непересекающихся интервалов $(\alpha_i, \beta_i) \in [-a, a]$, $i \in \mathbb{N}$, удовлетворяющих условию

$$\sum_i (\beta_i - \alpha_i) < \delta, \quad \text{имеем} \quad \sum_i r(f(\alpha_i), f(\beta_i)) < \varepsilon.$$

Пусть X — какое-нибудь горизонтальное векторное поле, определенное на открытом множестве $\mathcal{O}$ *cc*-пространства $\mathbb{M}$. Таким образом, $X(x) \neq 0$ и $X(x) \in H_1\mathbb{M}(x)$ для любого $x \in \mathcal{O}$. Будем предполагать, что замыкание $\mathcal{O}$ компактно в $\mathbb{M}$ и $\mathcal{O}$ содержит подмногообразие S коразмерности 1, трансверсальное векторному полю X, т. е. вектор $X(x)$ не является касательным к S в каждой точке $x \in S$. Пусть еще отображение $\varphi : (s, t) \mapsto \exp tX(s)$ является диффеоморфизмом $S \times (-a, a)$ на $\mathcal{O}$.

Предложение 3. *Пусть $f : \mathbb{M} \to \mathbb{X}$ — отображение класса $W_{q,\mathrm{loc}}(\mathbb{M}; \mathbb{X})$, $q > 1$. Тогда для почти всех $s \in S$ относительно поверхностной меры на S отображение f абсолютно непрерывно на слое $\exp tX(s)$, $t \in (-a, a)$.*

$\triangleleft$ Фиксируем в $f(\mathbb{M}) \subset \mathbb{X}$ некоторое счетное всюду плотное множество Z. Возьмем произвольную компактную область $\Omega \subset \mathbb{M}$ такую, что $\overline{\mathcal{O}} \subset \Omega$. Для любого $z \in Z$ функция $[f]_z : \Omega \ni x \mapsto r(f(x), z)$ принадлежит классу $W^1_q(\Omega)$ и существует функция $g \in L_q(\Omega)$, не зависящая от z такая, что $|\nabla_{\mathcal{L}}[f]_z(x)| \leqslant g(x)$ для почти всех $x \in \Omega$ (полагаем далее, что $g(x) = 0$ вне множества Ω). Следовательно, для функции $[f]_z$ справедлива поточечная оценка (6):

$$|[f]_z(x) - [f]_z(y)| \leqslant d(x, y)(Mg(x) + Mg(y)), \tag{8}$$

где $x, y \in \mathcal{O} \setminus \Sigma$ — произвольные точки, множество Σ нулевой меры не зависит от z. Заметим, что с метрикой d окрестность $\mathcal{O}$ является метрическим пространством однородного типа, поэтому максимальная функция является ограниченным оператором в $L_q(\mathcal{O})$, $q > 1$, см., например, [39]. Поэтому $Mg \in L_q(\mathcal{O})$. Применяя теорему Фубини, получаем, что для почти всех $s \in S$ функция $g \in L_q(\mathcal{O})$ на слое $\gamma = \exp tX(s)$, $t \in (-a, a)$, который пересекается с множеством Z по множеству нулевой меры. На каждом таком слое из поточечной оценки (8) вытекает, что функция $[f]_z$ имеет обобщенную производную на слое γ [2; теорема 3] и поэтому абсолютно непрерывна на γ. Следовательно, на любом интервале (α, β) слоя γ имеем

$$\big|[f]_z|_\gamma(\beta) - [f]_z|_\gamma(\alpha)\big| \leqslant \int\limits_{[\alpha,\beta]} Mg(\exp tX(s))\,dt.$$

Таким образом, приращение функции $[f]_z|_\gamma$ вдоль слоя γ контролируется интегралом от функции Mg, не зависящим от выбора z. Следовательно, возможен предельный переход по z, а так как совокупность точек z плотна в $f(\mathbb{M})$, последнее неравенство справедливо для любой точки $z \in f(\mathbb{M})$. Полагая $z = f(\alpha)$, получим

$$r(f(\alpha), f(\beta)) \leqslant \int\limits_{[\alpha,\beta]} Mg(\exp tX(s))\,dt.$$

Отсюда непосредственно проверяется абсолютная непрерывность отображения f на слое γ. Таким образом, доказана абсолютная непрерывность отображения f на почти всех слоях γ векторного поля X. $\triangleright$

2.4. $\mathcal{P}$-Дифференцируемость отображений классов Соболева.

Теорема 11. *Пусть $\mathbb{M}$, $\widetilde{\mathbb{M}}$ — cc-пространства, а $f : \mathbb{M} \to \widetilde{\mathbb{M}}$ — отображение класса Соболева $W^1_{q,\mathrm{loc}}(\mathbb{M}; \widetilde{\mathbb{M}})$, $\nu < q$. Тогда f $\mathcal{P}$-дифференцируемо почти всюду в $\mathbb{M}$ и соответствующий ему гомоморфизм алгебр Ли совпадает с формальным дифференциалом теоремы* 10.

$\triangleleft$ Из поточечной оценки (5) по стандартной схеме получаем модуль непрерывности функции $\varphi \in W^1_{q,\mathrm{loc}}(\mathbb{M})$, $q > \nu$:

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant C d(x,y)^{1-\frac{\nu}{q}} \Bigg(\int\limits_{B(x,2r)} |\nabla_{\mathcal{L}} \varphi|^q \, dz \Bigg)^{\frac{1}{q}} \tag{9}$$

для любых точек $x, y \in B(x, r)$, $B(x, 2r) \subset \mathbb{M}$, $r \leqslant r_0$, где постоянная C зависит от постоянной из (5), точки x, оценки для радиусов r_0 и показателя q. Полагая в неравенстве (9) $\varphi(y) = [f]_{f(x)}(y) = \tilde{d}(f(x), f(y))$, получаем

$$\tilde{d}(f(x), f(y)) \leqslant C d(x,y)^{1-\frac{\nu}{q}} \Bigg(\int\limits_{B(x,2r)} g^q(z) \, dz \Bigg)^{\frac{1}{q}}, \tag{10}$$

для любых $y \in B(x,r)$, $B(x,2r) \subset \mathbb{M}$, где g — из определения отображения класса Соболева. Отсюда вытекает

$$\overline{\lim_{y\to x}}\,\frac{\tilde{d}(f(x),f(y))}{d(x,y)} \leqslant C'\biggl(\overline{\lim_{r\to 0}}\,\frac{1}{|B(x,2r)|}\int\limits_{B(x,2r)} g^q(z)\,dz\biggr)^{\frac{1}{q}}.$$

Так как правая часть конечна почти всюду в $\mathbb{M}$ (по теореме Лебега о дифференцируемости, см., например, [9]), то

$$\overline{\lim_{y\to x}}\,\frac{\tilde{d}(f(x),f(y))}{d(x,y)} < \infty \quad \text{почти всюду в } \mathbb{M}.$$

Таким образом, f удовлетворяет условию теоремы 9. Поэтому, f $\mathcal{P}$-дифференцируемо почти всюду на $\mathbb{M}$, причем соответствующий $\mathcal{P}$-дифференциалу гомоморфизм алгебр Ли определяется отображением $X_i(g) \mapsto X_i f(g) \in \widehat{\widetilde{H}}_1(f(g))$ базисных векторов горизонтального подрасслоения $\widehat{H}_1(g)$, $i = 1, \ldots, n$, где при определении производной вдоль векторного поля используется аппроксимативный предел. Поскольку по теореме 10 то же самое отображение порождает формальный дифференциал алгебр Ли касательных конусов, то, следовательно, они совпадают. $\rhd$

Непрерывное отображение $f : \mathbb{M} \to \widetilde{\mathbb{M}}$ называется *квазимонотонным*, если существует постоянная $K \geqslant 1$ такая, что колебание отображения f на любом шаре $B(x,r) \subset \mathbb{M}$ контролируется колебанием f на граничной сфере $S(x,r)$, т. е.

$$\operatorname{diam}(f(B(x,r))) \leqslant K \operatorname{diam}(f(S(x,r)))$$

для всех $0 < r < r_0(x)$.

Теорема 12. *Всякое непрерывное квазимонотонное отображение $f : \mathbb{M} \to \widetilde{\mathbb{M}}$ класса Соболева $W^1_{\nu,\mathrm{loc}}(\mathbb{M};\widetilde{\mathbb{M}})$ $\mathcal{P}$-дифференцируемо почти всюду в $\mathbb{M}$ и соответствующий ему гомоморфизм алгебр Ли совпадает с формальным дифференциалом теоремы* 10.

$\lhd$ Теорема 12 доказывается по схеме доказательства аналогичного результата из [41]. $\rhd$

2.5. $\mathcal{N}$-Свойство Лузина. Напомним, что мера Хаусдорфа множества $A \subset \mathbb{X}$ определяется как предел $\mathcal{H}^\alpha(A) = \lim\limits_{\delta\to+0} \mathcal{H}^\alpha_\delta(A)$, где

$$\mathcal{H}^\alpha_\delta(A) = \gamma_\alpha \inf\Bigl\{\sum (\operatorname{diam} E_j)^\alpha : A \subset \bigcup_j E_j\Bigr\},$$

совокупность $E_j \subset \mathbb{X}$, $j \in \mathbb{N}$, образует покрытие множества A такое, что $\operatorname{diam} E_j \leqslant \delta$, α — неотрицательное число, γ_α — нормирующий множитель.

Пусть даны два cc-пространства $\mathbb{M}$ и $\widetilde{\mathbb{M}}$, причем хаусдорфова размерность ν первого из них не больше хаусдорфовой размерности второго $\nu \leqslant \tilde{\nu}$. Отображение $f : \Omega \to \widetilde{\mathbb{M}}$, $\Omega \subset \mathbb{M}$, обладает $\mathcal{N}$-*свойством Лузина*, если образ $f(E)$ любого множества $E \subset \mathbb{M}$ нулевой меры имеет нулевую $\mathcal{H}^\nu$-меру Хаусдорфа в $\widetilde{\mathbb{M}}$.

Теорема 13. *Всякое непрерывное квазимонотонное отображение $f : \mathbb{M} \to \widetilde{\mathbb{M}}$ класса Соболева $W^1_{\nu,\mathrm{loc}}(\mathbb{M};\widetilde{\mathbb{M}})$ (и непрерывное отображение $f : \mathbb{M} \to \widetilde{\mathbb{M}}$ класса Соболева $W^1_{q,\mathrm{loc}}(\mathbb{M};\widetilde{\mathbb{M}})$, $q > \nu$) обладает $\mathcal{N}$-свойством Лузина. В частности, образ измеримого множества является $\mathcal{H}^\nu$-измеримым множеством в $f(E)$.*

$\lhd$ Сформулированная теорема доказывается по схеме соответствующего результата из [41; теорема 7.1]. Покажем схему рассуждений при $q \in (\nu, \infty)$. Достаточно доказать утверждение теоремы для множества E нулевой меры из компактно вложенной области $\Omega \subset \mathbb{M}$. Пусть $U \subset \Omega$ — открытое множество, содержащее E. Известно, что существует совокупность шаров $B(x_i, r_i) \subset U$ такая, что

(1) $U \subset \bigcup_i B(x_i, r_i)$;

(2) $B(x_i, 2r_i) \subset U$ и $\sum_i \chi_{B(x_i,2r_i)}(x) \leqslant \mathcal{N}$, где число $\mathcal{N}$ не зависит от выбора открытого множества U, совокупности шаров и точки $x \in U$.

Этому условию удовлетворяет совокупность шаров из разложения типа Уитни области U на шары см., например, [6]. Применим оценку (10) для оценки колебания отображения f на шаре $B(x_i, r_i)$:

$$(\mathrm{diam}(f(B(x_i,r_i))))^\nu \leqslant C_1 |B(x_i,r_i)|^{1-\frac{\nu}{q}} \biggl(\int\limits_{B(x_i,2r_i)} g^q(z)\,dz \biggr)^{\frac{\nu}{q}},$$

где постоянная C_1 не зависит от выбора шара. Для выбранной совокупности шаров $\{B(x_i, r_i)\}$ получаем

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^\nu_\infty f(E) \leqslant \mathcal{H}^\nu_\infty f(U) &\leqslant \sum_i \mathcal{H}^\nu_\infty f(B(x_i,r_i)) \leqslant \sum_i (\mathrm{diam}(f(B(x_i,r_i))))^\nu \\
&\leqslant C_1 \sum_i |B(x_i,r_i)|^{1-\frac{\nu}{q}} \biggl(\int\limits_{B(x_i,2r_i)} g^q(z)\,dz \biggr)^{\frac{\nu}{q}} \\
&\leqslant C_1 \Bigl(\sum_i |B(x_i,r_i)| \Bigr)^{1-\frac{\nu}{q}} \biggl(\sum_i \int\limits_{B(x_i,2r_i)} g^q(z)\,dz \biggr)^{\frac{\nu}{q}} \\
&\leqslant C_2 |U|^{1-\frac{\nu}{q}} \biggl(\int\limits_U g^q(z)\,dz \biggr)^{\frac{\nu}{q}},
\end{aligned}$$

где постоянная C_2 не зависит от выбора множества U. Так как мера множества U может быть выбрана сколь угодно малой, то $f(E)$ имеет $\mathcal{H}^\nu$-меру нуль, и образ измеримого множества $\mathcal{H}^\nu$-измерим в $\widetilde{\mathbb{M}}$. $\rhd$

Следствие 1. *Пусть $f : \mathbb{M} \to \widetilde{\mathbb{M}}$ — непрерывное открытое отображение класса Соболева $W^1_{\nu,\mathrm{loc}}(\mathbb{M};\widetilde{\mathbb{M}})$. Тогда f обладает $\mathcal{N}$-свойством Лузина: $\mathcal{H}^\nu f(E) = 0$, если $|E| = 0$, $E \subset \mathbb{M}$. В частности, образ измеримого множества $\mathcal{H}^\nu$-измерим в $\widetilde{\mathbb{M}}$.*

Замечание 2. Если $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, — гомеоморфизм (квазимонотонное отображение) класса Соболева $W^1_{n,\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbb{R}^n)$, то утверждение следствия 1 (теоремы 13) другим способом доказано в [36] ([30]).

Замечание 3. Теорема 13 очевидным образом обобщается на случай отображений $f : \mathbb{M} \to \mathbb{X}$ со значениями в произвольном метрическом пространстве $\mathbb{X}$ аналогично тому, как это сделано в [41], когда $\mathbb{M}$ — это группа Карно.

§ 3. Элементы геометрической теории меры на пространствах Карно — Каратеодори

3.1. В этом разделе мы покажем как результаты геометрической теории меры, установленные в случае групп Карно в [8, 41], можно обобщить на *cc*-пространства.

Мы рассматриваем здесь *cc*-пространства $\mathbb{M}$, $\widetilde{\mathbb{M}}$ такие, что хаусдорфова размерность ν первого из них не превосходит хаусдорфовой размерности $\tilde{\nu}$ второго.

Можно доказать, следуя [41], что для липшицева отображения $f : E \to \widetilde{\mathbb{M}}$, где $E \subset \mathbb{M}$ — измеримое множество, для почти всех $x \in E$ существует предел

$$\lim_{t\to 0+}\left\{\frac{\mathcal{H}^\nu f(E\cap B(y,t))}{\mathcal{H}^\nu(E\cap B(y,t))} : y \in B(x,t)\right\} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{J}_f(x), \tag{11}$$

который служит локальной характеристикой искажения мер и играет роль якобиана.

Напомним, что *функцией кратности* (или *индикатрисой Банаха*) $N(y, f, A)$ отображения f, $A \subset E$, называется величина

$$\operatorname{card}(f^{-1}(y)\cap A) = \#\{x \in f^{-1}(y)\cap A\}.$$

Теорема 14. *Предположим, что $E_1, \dots, E_k \subset \mathbb{M}$ — измеримые множества, $E = \bigcup_{j=1}^k E_j$, а отображение $f : E \to \widetilde{\mathbb{M}}$, $E \subset \mathbb{M}$, $\nu \leqslant \tilde{\nu}$, таково, что ограничение $f|_{E_j}$ липшицево для любого j и якобиан $\mathcal{J}_f(x)$ интегрируем на E. Тогда функция кратности $N(y, f, E)$ измерима на $\widetilde{\mathbb{M}}$ и*

$$\int\limits_E \mathcal{J}_f(x)\, d\mathcal{H}^\nu(x) = \int\limits_{\widetilde{\mathbb{M}}} N(y, f, E)\, d\mathcal{H}^\nu(y).$$

С помощью теоремы 8 можно установить как характеристика (11) связана с $\mathcal{P}$-дифференциалом.

Предложение 4. *Предположим, что $E \subset \mathbb{M}$ — измеримое отображение, а $f : E \to \mathbb{M}$ — липшицево отображение. Тогда для почти всех $x \in E$ существует предел*

$$\lim_{t\to 0+}\left\{\frac{\mathcal{H}^\nu f(E\cap B(y,t))}{\mathcal{H}^\nu(E\cap B(y,t))} : y \in B(x,t)\right\} = \mathcal{J}_f(x) = \frac{\mathcal{H}^\nu Df(B(x,1))}{\mathcal{H}^\nu B(x,1)} = |\det Df(x)|.$$

3.2. Будем говорить, что *формула площади* справедлива для отображения $f : E \to \widetilde{\mathbb{M}}$, $E \subset \mathbb{M}$ — измеримое множество и $\nu \leqslant \tilde{\nu}$, если выполняются следующие три условия для произвольной измеримой функции $u : E \to \mathbb{R}$ и любого измеримого множества $A \subset E$:

1) Функции $A \ni x \mapsto u(x)\mathcal{J}_f(x)$ и $\widetilde{\mathbb{M}} \in y \mapsto \sum\limits_{x\in f^{-1}(y)\cap A} u(x)$ измеримы.

2) Если функция u неотрицательна, то

$$\int\limits_A u(x)\mathcal{J}_f(x)\, d\mathcal{H}^\nu(x) = \int\limits_{\widetilde{\mathbb{M}}} \sum_{x\in f^{-1}(y)\cap A} u(x)\, d\mathcal{H}^\nu(y). \tag{12}$$

3) Если одна из функций

$$A \ni x \mapsto u(x)\mathcal{J}_f(x) \quad \text{и} \quad \widetilde{\mathbb{M}} \in y \mapsto \sum_{x\in f^{-1}(y)\cap A} u(x)$$

интегрируема, то вторая также интегрируема и справедлива формула (12).

Из теоремы 14 стандартным образом, см., например, [41], получаем следующую формулу площади.

Теорема 15. *Предположим, что $E_1, \dots, E_k \subset \mathbb{M}$ — измеримые множества, $E = \bigcup_{j=1}^k E_j$, отображение $f : E \to \widetilde{\mathbb{M}}$, $\nu \leqslant \tilde{\nu}$, таково, что ограничение $f|_{E_j}$ липшицево для каждого j. Тогда справедлива формула площади* (12).

Из формулы вытекают многие следствия, которые в случае групп Карно установлены в [41]. Мы сформулируем здесь два из них.

Теорема 16. *Предположим, что непрерывное отображение $f : \Omega \to \widetilde{\mathbb{M}}$, $\Omega \subset \mathbb{M}$ — открытое множество, $\nu \leqslant \tilde{\nu}$, удовлетворяет одному из следующих условий*:

(1) *f принадлежит классу Соболева $W^1_{q,\mathrm{loc}}(\Omega; \widetilde{\mathbb{M}})$, $\nu < q$;*

(2) *f квазимонотонно и принадлежит классу Соболева $W^1_{\nu,\mathrm{loc}}(\Omega; \widetilde{\mathbb{M}})$;*

(3) *f принадлежит классу Соболева $W^1_{q,\mathrm{loc}}(\Omega; \widetilde{\mathbb{M}})$, $q \geqslant 1$, и обладает $\mathcal{N}$-свойством Лузина.*

Тогда справедлива формула площади (12).

В теореме 16 формула площади приведена для отображений классов Соболева, обладающих $\mathcal{N}$-свойством Лузина, см., теорему 13. Во всех остальных случаях она верна в следующей форме.

Теорема 17. *Предположим, что дано отображение $f : \Omega \to \widetilde{\mathbb{M}}$, $\Omega \subset \mathbb{M}$ — открытое множество, $\nu \leqslant \tilde{\nu}$, класса Соболева $W^1_{q,\mathrm{loc}}(\Omega; \widetilde{\mathbb{M}})$, $1 \leqslant q \leqslant \nu$. Тогда существует множество нулевой меры $\Sigma \subset \Omega$ такое, что для любого измеримого множества $A \subset \Omega$ справедлива следующая формула площади:*

$$\int\limits_A u(x)\mathcal{J}_f(x)\, d\mathcal{H}^\nu(x) = \int\limits_{\widetilde{\mathbb{G}}} \sum_{x\in f^{-1}(y)\cap(A\setminus\Sigma)} u(x)\, d\mathcal{H}^\nu(y),$$

где u — произвольная неотрицательная измеримая функция такая, что произведение $u(x)\mathcal{J}_f(x)$ интегрируемо.

§ 4. Квазиконформные отображения пространств Карно — Каратеодори

Современная теория квазиконформных отображений в евклидовом пространстве представляет собой естественное развитие двумерной теории и имеет многочисленные связи со смежными разделами анализа (см., например, [11]).

Квазиконформные отображения на неримановых пространствах впервые рассматривались Мостовым [33] при исследовании проблемы классификации метрических пространств постоянной отрицательной кривизны. В доказательстве теоремы о жесткости Мостов использовал квазиконформные преобразования идеальной границы некоторого симметрического пространства. М. Громов показал, что геометрия такой идеальной границы моделируется нильпотентной группой с метрикой Карно — Каратеодори, не являющейся римановой. Эти пионерские работы стимулировали интерес к изучению квазиконформных отображений на группах Карно [35] и более общих пространствах Карно — Каратеодори [29]. При этом отметим, что нильпотентные группы и многообразия, порождаемые векторными полями, удовлетворяющими условию Хёрмандера [23], с неримановыми метриками, изучались ранее при исследовании ряда вопросов теории субэллиптических уравнений, см., например, [14, 15, 34] и др. Теория пространств Карно — Каратеодори применяется в задачах, связанных с неголономной механикой и других физических задачах, см., например, монографию [32], в которой приведена подробная библиография по этому вопросу. Исследование теории квазиконформных отображений на группах Карно стимулировалось также связью этих отображений с некоторыми функциональными классами (в частности, пространствами Соболева и BMO) [1, 2, 7, 42, 43].

Систематическое развитие теории квазиконформных отображений на группах Карно началось с группы Гейзенберга [25], на примере которой видно, что наличие нетривиальных коммутационных соотношений требует развития дополнительного (по сравнению с классической ситуацией) аналитического аппарата, который давал бы возможность работать с квазиконформными отображениями на группах Карно с той же эффективностью, что и в $\mathbb{R}^n$. Одной из первых задач, в частности, была задача об эквивалентности различных определений квазиконформности. С этой целью были введены адекватные ситуации понятия математического анализа. В 1989 году П. Пансю ввел понятие дифференцируемости на группах Карно ($\mathcal{P}$-дифференциал) [35]. Используя концепцию дифференцирования Пансю, Кораньи и Рейманн [25] систематизировали аналитические методы исследования квазиконформных отображений на группах Гейзенберга, предполагая более сильное по сравнению с евклидовым пространством условие: $\mathcal{P}$-дифференцируемость почти всюду.

Аналитический аппарат, позволяющий развить теорию квазиконформных отображений на группах Карно при наиболее слабых (аналитических) предположениях развит в серии работ 90-х годов [2, 3, 5, 8, 41, 42].

Развитие теории квазиконформных отображений на группах Карно привело к переосмыслению классических методов и доказательств. Это явилось одним из стимулов к появлению концепции теории квазиконформных отображений и связанной с ней теорией различных функциональных классов (Соболева, BMO) на метрических пространствах с мерой, удовлетворяющей условию удвоения (пространства однородного типа) или более сильному условию регулярности (мера μ метрического пространства $\mathbb{X}$ называется Q-регулярной, если для любого шара $B(x,r)\subset\mathbb{X}$ верно $\mu(B(x,r))\approx r^Q$), см., например, [6, 22, 43].

Для гомеоморфизма $f:\mathbb{M}\to\mathbb{N}$ двух cc-пространств $(\mathbb{M},d)$ и $(\mathbb{N},\tilde d)$ введем величины

$$L_f(x,r)=\max_{d(x,y)=r}\tilde d(f(x),f(y)),\quad l_f(x,r)=\min_{d(x,y)=r}\tilde d(f(x),f(y)),\quad H_f(x,r)=\frac{L_f(x,r)}{l_f(x,r)},$$

и положим

$$H_\varphi(x)=\overline{\lim_{r\to+0}}\,H_f(x,r).$$

Отображение f называется *квазиконформным*, если величина $H_f(x)$ ограничена в $\mathbb{M}$. Число $H_f=\|H_f(x)|L_\infty(\mathbb{M})\|$ называется *коэффициентом квазиконформности* отображения f.

cc-Пространство — метрическая структура, на которой из метрического определения квазиконформности можно получить эквивалентное ему аналитическое. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, метрическое определение эквивалентно тому, что $f \in W^1_{n,loc}$ и $|Df(x)|^n \leqslant K'|\det Df(x)|$, где $Df(x)$ — формальная матрица Якоби, определенная почти всюду. В [2] аналог аналитического определения квазиконформности выведен на группах Карно. Покажем, что рассуждения работы [2] можно обобщить на cc-пространства.

Из приведенного определения квазиконформности стандартным образом выводится, что отображение f удовлетворяет условиям теоремы Степанова. Отсюда и из теоремы 9 выводим

Предложение 5. *Всякое квазиконформное отображение $f : \mathbb{M} \to \mathbb{N}$ $\mathcal{P}$-дифференцируемо почти всюду.*

Стандартным образом [29] проверяется, что обратное отображение также квазиконформно, и, следовательно, также дифференцируемо почти всюду. Заметим, что не может быть такого, чтобы $\mathcal{H}^\nu$-мера Хаусдорфа образа точек дифференцируемости равнялась нулю. Поэтому существует точка x такая, что отображение f $\mathcal{P}$-дифференцируемо в точке x, а обратное отображение f^{-1} $\mathcal{P}$-дифференцируемо в точке $f(x)$. Следовательно, дифференциал $Df(x)$ является изоморфизмом групп касательных конусов, и поэтому размерности Хаусдорфа пространств $\mathbb{M}$ и $\mathbb{N}$ совпадают. Таким образом, получаем

Предложение 6. *Если отображение $f : \mathbb{M} \to \mathbb{N}$ квазиконформно, то размерности по Хаусдорфу пространств $\mathbb{M}$ и $\mathbb{N}$ совпадают.*

Предложения 5 и 6 другим способом доказаны в [29].

Справедлив следующий результат, доказательство которого может быть получено с использованием схем из работ [2, 5, 42].

Теорема 18. *Для гомеоморфизма $f : \mathbb{M} \to \mathbb{N}$ cc-пространств следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *гомеоморфизм f квазиконформен;*

(2) *обратный гомеоморфизм $f^{-1} : \mathbb{N} \to \mathbb{M}$ квазиконформен;*

(3) *гомеоморфизм $f : \mathbb{M} \to \mathbb{N}$ принадлежит классу ACL и для п. в. $x \in \mathbb{M}$ формальный горизонтальный дифференциал $Df(x)$ удовлетворяет либо условию*

$$\max\{\|Df(\xi)\|(x) : \|\xi\| = 1, \xi \in V_1\} \leqslant K \min\{\|Df(\xi)\|(x) : \|\xi\| = 1, \xi \in V_1\}, \tag{13}$$

либо условию

$$\|Df\|^\nu(x) \leqslant K^\nu |\det Df(x)|; \tag{14}$$

(4) *оператор $f^* : L^1_\nu(\mathbb{N}) \to L^1_\nu(\mathbb{M})$, $f^*(u) = f \circ u$, ограничен;*

(5) *оператор $f^* : L^1_\nu(\mathbb{N}) \to L^1_\nu(\mathbb{M})$, $f^*(u) = f \circ u$, является изоморфизм;*

(6) *для любого сферического конденсатора $D \subset \mathbb{N}$*

$$\operatorname{cap}_\nu(f^{-1}(D)) \leqslant K' \operatorname{cap}_\nu(D); \tag{15}$$

(7) *для любого сферического конденсатора $D \subset \mathbb{M}$*

$$\operatorname{cap}_\nu(f(D)) \leqslant K'' \operatorname{cap}_\nu(D); \tag{16}$$

(8) *гомеоморфизм* $f : \mathbb{M} \to \mathbb{N}$ *принадлежит классу* $W^1_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{M})$ *и для п. в.* $x \in \mathbb{M}$ *формальный горизонтальный дифференциал* Df *удовлетворяет либо условию* (13), *либо условию* (14).

При этом значения H_f, $H_{f^{-1}}$, $\|f^*\|^\nu$ *и наименьшие величины* K^ν, K', K'' *выражаются друг через друга.*

В условиях (15) и (16) конденсатор D есть связное открытое множество в $\mathbb{G}$, дополнение к которому имеет две компоненты связности: F_0 и F_1, а его емкость $\operatorname{cap}_p(D)$ относительно пространства W^1_p равна величине $\inf\big\|\nabla_{\mathcal{L}} f \mid L_p(D)\big\|^p$, где нижняя грань берется по всем непрерывным функциям $f \in W^1_{p,\mathrm{loc}}(D)$, равным единице (нулю) на компоненте F_1 (F_0) конденсатора D.

Из теоремы 6 и способа ее доказательства вытекает несколько утверждений.

Следствие 2. *Если отображение* $f : \mathbb{M} \to \mathbb{N}$ *cc-пространств квазиконформно, то* $f \in W^1_{\nu,\mathrm{loc}}(\Omega)$.

$\lhd$ Если отображение $f : \mathbb{M} \to \mathbb{N}$ cc-пространств квазиконформно, то по теореме 18 $f \in ACL$ и для п. в. $x \in \mathbb{M}$ формальный горизонтальный дифференциал $Df(x)$ удовлетворяет условию $\|Df\|^\nu(x) \leqslant K^\nu|\mathcal{J}_\varphi(x)|$. Если $U \Subset \mathbb{M}$ — компактная область, то по теореме 16 о замене переменной имеем

$$\int\limits_U \|Df\|^\nu(x)\, d\mathcal{H}^\nu(x) \leqslant K^\nu \int\limits_U \mathcal{J}_\varphi(x)\, d\mathcal{H}^\nu(x) \leqslant \mathcal{H}^\nu f(U),$$

что и требовалось доказать. $\rhd$

Следствие 3. *Если отображение* $f : \mathbb{M} \to \mathbb{N}$ *cc-пространств квазиконформно, то* $\mathcal{J}_\varphi(x) \neq 0$ *почти всюду в* $\mathbb{M}$.

$\lhd$ По теореме 18 и следствию 2 как f, так и f^{-1} принадлежат классу $W^1_{\nu,\mathrm{loc}}$. Поэтому (следствие 1) оба отображения f и f^{-1} обладают $\mathcal{N}$-свойством Лузина. По теореме о замене переменной для любого измеримого множества $E \subset \mathbb{M}$ справедлива формула

$$\int\limits_E \mathcal{J}_\varphi(x)\, d\mathcal{H}^\nu(x) = |\varphi(E)|.$$

Следовательно, для множества $E = \{x \in \mathbb{M} : \mathcal{J}_f(x) = 0\}$ имеем $|f(E)| = 0$. Так как f^{-1} также обладает $\mathcal{N}$-свойством Лузина, то $E = f^{-1}(f(E))$ имеет меру, равную нулю. $\rhd$

Литература

1. *Водопьянов С. К.* L_p-теория потенциала и квазиконформные отображения на однородных группах // Современные проблемы геометрии и анализа.—Новосибирск: Наука, 1989.—С. 45–89.
2. *Водопьянов С. К.* Монотонные функции и квазиконформные отображения на группах Карно // Сиб. мат. журн.—1996.—Т. 37, № 6.—С. 1269–1295.
3. *Водопьянов С. К.* О замкнутости классов отображений с ограниченным искажением // Математические труды.—2002.—Т. 5, № 2.—С. 91–136.
4. *Водопьянов С. К., Грешнов А. В.* О дифференцируемости отображений пространств Карно — Каратеодори // Докл. РАН.—2003.—Т. 389, № 5.—С. 1–5.

5. *Водопьянов С. К., Грешнов А. В.* Аналитические свойства квазиконформных отображений на группах Карно // Сиб. мат. журн.—1995.—Т. 36, № 6.—С. 1317–1327.
6. *Водопьянов С. К., Грешнов А. В.* О продолжении функций ограниченной средней осцилляции на пространствах однородного типа с внутренней метрикой // Сиб. мат. журн.—1995.—Т. 36, № 5.—С. 1015–1048.
7. *Водопьянов С. К., Латфуллин Т. Г.* Весовые пространства Соболева и квазигиперболические отображения на группах Карно // Комплексный анализ в современной математике. К 80-летию Б. В. Шабата.—М.: ФАЗИС, 2001.—С. 81–98.
8. *Водопьянов С. К., Ухлов А. Д.* Аппроксимативно дифференцируемые преобразования и замена переменных на нильпотентных группах // Сиб. мат. журн.—1996.—Т. 37, № 1.—С. 70–89.
9. *Водопьянов С. К., Ухлов А. Д.* Операторы суперпозиции в пространствах Лебега и дифференцируемость квазиаддитивных функций множества // Владикавк. мат. журн.—2002.—Т. 4, № 1.—С. 11–33.
10. *Постников М. М.* Группы и алгебры Ли.—М.: Наука, 1982.—447 с.
11. *Решетняк Ю. Г.* Пространственные отображения с ограниченным искажением.—Новосибирск: Наука, 1982.—278 с.
12. *Решетняк Ю. Г.* Соболевские классы функций со значениями в метрическом пространстве // Сиб. мат. журн.—1997.—Т. 38, № 3.—С. 657–675.
13. *Хелгасон С.* Дифференциальная геометрия и симметрические пространства. Т. I.—М.: Мир, 1964.—533 с.
14. *Chernikov V. M., Vodop'yanov S. K.* Sobolev Spaces and Hypoelliptic Equations. I // Siberian Advances in Mathematics.—1996.—V. 6, № 3.—P. 27–67.
15. *Chernikov V. M., Vodop'yanov S. K.* Sobolev Spaces and Hypoelliptic Equations. II // Siberian Advances in Mathematics.—1996.—V. 6, № 4.—P. 64–96.
16. *Cheeger J.* Differentiability of Lipschitz functions on metric measure spaces // Geometric and Functional Analysis.—1999.—V. 9.—P. 428–517.
17. *Folland G. B., Stein I. M.* Hardy spaces on homogeneous groups.—Princeton: Princeton Univ. Press, 1982.—274 p. (Math. Notes; 28)
18. *Fanghua L., Xiaoping Y.* Geometric measure theory.—Beijing–New York: Science Press, 2002.—237 p.
19. *Federer H.* Geometric measure theory.—Berlin: Springer, 1969.—676 p.
20. *Gromov M.* Carnot–Caratheodory spaces seen from within / In: Sub-Reimannian geometry.—Basel: Birkhäuser, 1996.—P. 79–323.
21. *Hajlasz P.* Sobolev spaces on an arbitrary metric space // Potential Analysis.—1996.—V. 6.—P. 403–415.
22. *Heinonen J.* Lectures on analysis on metric spaces.—NY: Springer, 2001.—140 p.
23. *Hörmander L.* Hypoelliptic second order differential equations // Acta Math.—1967.—V. 119.—P. 147–171.
24. *Jerison D.* The Poincaré inequality for vector fields satisfying Hörmander's condition // Duke Math. J.—1986.—V. 53, № 2.—P. 503–523.
25. *Koranyi A., Reimann H. M.* Foundations for the theory of quasiconformal mappings on the Heisenberg group // Adv. Math.—1995.—V. 111.—P. 1–87.
26. *Lu G.* Weighted Poincaré and Sobolev inequalities for vector fields satisfying Hörmander's condition and applications // Rev. Mat. Iberoamericana.—1992.—V. 8, № 3.—P. 367–439.
27. *Lu G.* The sharp Poincaré inequality for free vector fields: An endpoint result // Rev. Mat. Iberoamericana.—1994.—V. 10, № 3.—P. 453–466.
28. *Magnani V.* Differentiability and area formula on stratified Lie groups // Houston Journal of Math.—2001.—V. 27, № 2.—P. 297–323.

29. *Margulis G. A., Mostow G. D.* The differential of quasi-conformal mapping of a Carnot–Carathéodory spaces // Geometric and Functional Analysis.— 1995.—V. 5, № 2.—P. 402–433.
30. *Martio O., Malý J.* Luzin's condition (N) and mappings of the class $W^{1,n}$ // J. Reine Angew. Math.— 1995.—V. 485.—P. 19–36.
31. *Mitchell J.* On Carnot–Carathéodory metrics // J. Differential Geometry.— 1985.—V. 21.—P. 35–45.
32. *Montgomery R.* A tour of subriemannian geometries, their geodesics and applications.—Providence: American Mathematical Society, 2002.—260 p.
33. *Mostow G. D.* Strong Rigidity of Locally Symmetric Spaces // Annals of Mathematics Studies, No. 78.—Princeton, N.J.: Princeton University Press; Tokyo: Tokyo Univ. Press, 1973.—195 p.
34. *Nagel A., Stein E. M., Wainger S.* Balls and metrics defined by vector fields I: Basic properties // Acta Math.—1985.—V. 155.—P. 103–147.
35. *Pansu P.* Métriques de Carnot–Carathéodory et quasiisométries des espaces symétriques de rang un // Ann. of Math.—1989.—V. 119.—P. 1–60.
36. *Reshetnyak Yu. G.* Some geometric properties of functions and mappings with generalized derivatives // Mat. Sb.—1966.—V. 7, № 4.—P. 886–919.
37. *Rademakher H.* Ueber partielle und totale Differenzierbarkeit. I // Math. Ann.—1919.—V. 79.— P. 340–359.
38. *Pauls S. D.* A notion of rectifiability modeled on Carnot groups.—Hanover, 2001.—21 p. (Preprint, Dartmooth College, http://hilbert.dartmooth.edu/~pauls/preprin4.html).
39. *Stein E. M.* Harmonic Analysis: Real-Variables Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals.— Princeton: Princeton Univ. Press, 1993.—695 p.
40. *Stepanoff W.* Ueber totale Differenzierbarkeit // Math. Ann.— 1923.—V. 90.—P. 318–320.
41. *Vodop'yanov S. K.* $\mathcal{P}$-differentiability on Carnot groups in different topologies and related topics // Труды по анализу и геометрии (Редактор-составитель С. К. Водопьянов).—Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН.—2000.—P. 603–670.
42. *Vodop'yanov S. K.* Sobolev classes and quasiconformal mappings on Carnot-Caratheodory spaces // In: Geometry, Topology and Physics. Proceedings of the First Brazil-USA Workshop held in Campinas, Brazil, June 30-July 7, 1996 / Editors: B. N. Apanasov, S. B. Bradlow, W. A. Rodrigues, K. K. Uhlenbeck.—Berlin–New York: Walter de Gruyter & Co.—1997.—P. 301–316.
43. *Vodop'yanov S. K., Greshnov A. V.* Quasiconformal mappings and BMO-spaces on metric structures // Siberian Advances in Mathematics.—1998.—V. 8, № 3.—P. 132–150.

г. Новосибирск *Статья поступила 20 февраля 2003*