Владикавказский математический журнал
Январь–март, 2003, Том 5, Выпуск 1

УДК **517.5**

АППРОКСИМАЦИЯ В L_p РЕШЕНИЯМИ КВАЗИЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

М. С. Алборова

Изучается L_p-аппроксимационная проблема для квазиэллиптического оператора. Найдены функционально-геометрические характеристики множества K, обеспечивающие плотность пространства $\eta(K)$ в $\eta^p(K)$ относительно L_p-нормы.

Пусть $P(x,D) = \sum\limits_{|\alpha\,:\,\vec{l}|=1} a_\alpha(x)D^\alpha$ дифференциальный оператор в частных производных, определенный на открытом подмножестве $\Omega\subset\mathbb{R}^n$. Если $\omega\subset\Omega$ открыто, мы обозначаем через $\eta(\omega)$ пространство распределений u, определенных и удовлетворяющих однородному уравнению $P(x,D)u=0$ в ω. Если F — относительно замкнутое подмножество Ω, мы обозначаем через $\eta(F)$ множество всех распределений u, определенных и удовлетворяющих уравнению $P(x,D)u=0$ в некоторой окрестности F. Для $1\leqslant p<\infty$, $\eta^p(F)=L_p(F)\cap\eta(\mathring{F})$, найдется множество функций $u\in L_p(\mathring{F})$, которые удовлетворяют уравнению $P(x,D)u=0$ во внутренности F. Если $K\subset\Omega$ — компакт, то очевидно $\eta(K)\subset\eta^p(K)$. Задача состоит в определении функционально-геометрических характеристик компакта K, обеспечивающих плотность пространства $\eta(K)$ в $\eta^p(K)$ относительно $L_p(K)$ нормы.

Классическими результатами в этом направлении являются работы Мергеляна [1] и Витушкина. Витушкин охарактеризовал те компактные множества, для которых голоморфное приближение возможно, пользуясь идеей емкости, соответствующей оператору Коши — Римана. Для оператора Лапласса проблема равномерного приближения была изучена Келдышем [2], Хедбергом [3], Полкингом [4] и др. Эти результаты установлены в терминах емкости Ньютона. Для основных операторов проблема равномерного приближения была изучена Браудером [5].

Пусть $\mathbb{R}^n$ — евклидово пространство точек $x=(x_1,\ldots,x_n)$, а $\vec{l}=(l_1,\ldots,l_n)\in\mathbb{N}^n$ — мультииндекс. Рассмотрим однопараметрическую группу преобразований $\mathbb{R}^n$

$$H_t(x) = (t^{\frac{l^*}{l_1}}x_1,\ldots,t^{\frac{l^*}{l_n}}x_n) \quad (t\in\mathbb{R}^+),$$

где $\frac{1}{l^*}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\frac{1}{l_i}$, и гладкую H_t-однородную метрику, непрерывную на $\mathbb{R}^n$ и определяемую вектором $\vec{l}\in\mathbb{N}^n$ по формуле

$$\rho(x,y) = \left(\sum_{i=1}^n |x_i-y_i|^{2l_i}\right)^{\frac{1}{2l^*}}. \tag{1}$$

Шаром с центром в точке x радиуса r называется, как обычно, множество

$$B_r(x) := \{y \in \mathbb{R}^n : \rho(x,y) < r\}.$$

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — открытое подмножество, $p \geqslant 1$. Будем говорить, что функция $f \in L_p(\Omega)$ принадлежит классу $L_p^{\vec{l}}(\Omega)$, если функция имеет обобщенные производные $D^\alpha f \in L_p(\Omega)$, $|\alpha : \vec{l}| = 1$. Здесь $D^\alpha f = \frac{\partial^\alpha f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ и $|\alpha : \vec{l}| = \frac{\alpha_1}{l_1} + \dots + \frac{\alpha_n}{l_n}$. Для таких функций определим полунорму

$$\|f\|_{L_p^{\vec{l}}(\Omega)} = \sum_{|\alpha : \vec{l}|=1} \|D^\alpha f\|_{L_p(\Omega)}. \tag{2}$$

Пространством $\overset{\circ}{L}{}_p^{\vec{l}}(\Omega)$ назовем замыкание в норме (2) множества $C_0^\infty(\Omega)$ бесконечно дифференцируемых функций с носителем в Ω.

Пусть K — подмножество $\mathbb{R}^n$. Обозначим множество функций из $L_p^{\vec{l}}(\mathbb{R}^n)$, имеющих компактные носители в K через $(L_p^{\vec{l}})_K$.

Мы будем полагать, что $P(x,D)$ имеет *бирегулярное фундаментальное решение* $E(x,y)$ на Ω, т. е. удовлетворяет уравнениям

$$P(x,D)E(x,y) = \delta_y, \quad {}^tP(y,D)E(x,y) = \delta_x \tag{3}$$

и

$$E(x,y) \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega \times \Omega).$$

Пусть

$$A^q(K) = \{f \in L_p(K) : (f,u) = 0 \text{ для всех } u \in \eta(K)\}.$$

Для доказательства теоремы 1 нам потребуется следующая лемма:

Лемма 1. *Предположим, что $1 < p < \infty$ и $K \subset \Omega$ — компакт. Тогда отображение*

$${}^tP(x,D) : (L_q^{\vec{l}})_K \to A^q(K)$$

является взаимнооднозначным.

$\lhd$ Если $v \in (L_q^{\vec{l}})_K$ и $u \in \eta(K)$, то $(u, {}^tP(x,D)v) = (P(x,D)u, v) = 0$. Тем самым ${}^tP(x,D)v \in A^q(K)$. Так как $P(x,D)$ имеет бирегулярное фундаментальное решение, то ${}^tP(x,D)$ является взаимнооднозначным на $\mathcal{E}'(\Omega)$. Далее покажем, что ${}^tP(x,D)$ отображает $(L_p^{\vec{l}})_K$ на $A^q(K)$.

Предполагаем, что $f \in A^q(K)$ и пусть $\tilde{f}(y) = \int E(x,y)f(x)\,dx$. Тогда согласно (3) ${}^tP(x,D)\tilde{f} = f$ и $P(x,y)E(x,y) = 0$ если $x \neq y$, так что, если $y \notin K$, то $E(x,y) \in \eta(K)$ как функция от x. Более того, $\mathrm{supp} f \subset K$. Стандартные теоремы регулярности теперь показывают, что $\tilde{f} \in L_q^{\vec{l}}$ и, следовательно, $\tilde{f} \in (L_p^{\vec{l}})_K$. $\rhd$

Теорема 1. *Предположим $P(x,D)$ — квазиэллиптический дифференциальный оператор порядка $\vec{l}$ с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами, определенными в Ω, имеющий фундаментальное решение. Тогда, если $K \subset \Omega$ — компакт и $1 < p < \infty$, то следующие утверждения эквивалентны:*

(i) $\eta(K)$ *плотно в* $\eta^p(K)$;

(ii) $C_0^\infty(K)$ *плотно в* $(L_p^{\vec{l}})_K$;

(iii) $C_0^\infty(\mathbb{R}^n\backslash K)$ *плотно в* $(L_p^{-\vec{l}})_{\mathbb{R}^n\backslash K}$;

(iv) $(u,f)=0$ *для всех* $u\in(L_p^{-\vec{l}})_{\mathbb{R}^n\backslash K}$ *и* $f\in(L_q^{\vec{l}})_K$.

$\lhd$ Предположим, что U и V — подпространства Банахова пространства B и $U\subset V$. Непосредственным следствием теоремы Хана — Банаха является то, что U плотно в V, все линейные функционалы на B, которые уничтожают U, также уничтожают V. Этот факт будет использован в каждой части доказательства.

(i) $\Longrightarrow$ (ii): В силу леммы 1 достаточно показать, что ${}^tP(x,D)C_0^\infty(\overset{\circ}{F})$ плотно в ${}^tP(x,D)(L_q^{\vec{l}})_K=A^q(K)$. Предположим, что $f\in L_p(K)$ удовлетворяет $(f,{}^tP(x,D)\phi)=0$ для всех $\phi\in C_0^\infty(\overset{\circ}{F})$. Тогда $P(x,D)f=0$ в $\overset{\circ}{F}$ и, следовательно, $f\in\eta^p(K)$. По предположению существует последовательность $\{f_\nu\}\subset\eta(K)$, которая сходится к f в $L_p(K)$. Следовательно, если $u\in A^q(K)$, то $(f,u)=\lim\limits_{\nu\to\infty}(f_\nu,u)=0$.

(ii) $\Longrightarrow$ (i): Пусть $f\in L_p(K)$ и $(f,u)=0$ для всех $u\in\eta(K)$. Тогда $f\in A^q(K)$ согласно (ii) и лемме 1 существует последовательность $\{\phi^\nu\}\subset C_0^\infty(\overset{\circ}{K})$ такая, что ${}^tP(x,D)\phi_\nu$ сходится к f в $L^q(K)$. Следовательно, если $u\in\eta^p(K)$, мы имеем

$$(f,u)=\lim_{\nu\to\infty}({}^tP(x,D)\phi_\nu,u)=\lim_{\nu\to\infty}(\phi_\nu,P(x,D)u)=0,$$

так как

$$\phi_\nu\in C_0^\infty(\overset{\circ}{K})\ \text{и}\ P(x,D)u=0\ \text{в}\ \overset{\circ}{K}.$$

(ii) $\Longleftrightarrow$ (iii): Так как $(L_q^{\vec{l}})_K=\{u\in L_q^{\vec{l}}:(u,\phi)=0$ для всех $\phi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n\backslash K)\}$, то очевидно, что $C_0^\infty(R^n\backslash K)$ плотно в $(L_q^{\vec{l}})_{K^\perp}=\{f\in L_p^{-\vec{l}}:(f,u)=0$ для всех $u\in(L_q^{\vec{l}})_K\}$. Более того,

$$(L_q^{\vec{l}})_{K^\perp}\subset(L_p^{-\vec{l}})_{\mathbb{R}^n\backslash\overset{\circ}{K}}=\left\{f\in L_q^{-\vec{l}}:(f,\phi)=0\ \text{для всех}\ \phi\in C_0^\infty\backslash(K)\right\}.$$

Следовательно, $C_0^\infty(\mathbb{R}^n\backslash K)$ плотно в $(L_p^{-\vec{l}})_{\mathbb{R}^n\backslash\overset{\circ}{K}}$, если и только если $(L_q^{\vec{l}})_{K^\perp}=(L_p^{-\vec{l}})_{R^n\backslash\overset{\circ}{K}}$. Обратное верно, если и только если $C_0^\infty(\overset{\circ}{K})$ плотно в $(L_q^{\vec{l}})_K$.

(ii) $\Longrightarrow$ (iv): Очевидно.

(iv) $\Longrightarrow$ (ii): Предположим, что (ii) не верно. Тогда существуют $u\in L_p^{-\vec{l}}$ и $f\in(L_q^{\vec{l}})_K$ такие, что $(u,f)\neq0$, но $(u\phi)=0$ для всех $\phi\in C_0^\infty(\overset{\circ}{K})$. Следовательно, $u\in(L_p^{-\vec{l}})_{\mathbb{R}^n\backslash\overset{\circ}{K}}$, что противоречит (iv).

Если K нигде не плотно, то $C_0^\infty(\overset{\circ}{K})=\{0\}$ и $\eta^p(K)=L_p(K)$. Отсюда, по теореме 1 $\eta(K)$ плотно в $L_p(K)$, если и только если $(L_q^{\vec{l}})_K=\{0\}$. $\rhd$

Рассмотрим область K удовлетворяющую условию (A):

(A) Существуют $\tau>0$, $\delta>0$ такие, что для любых $x,y\in\mathbb{R}^n\backslash K$, удовлетворяющих неравенству $\rho(x,y)<\delta$ найдется спрямляемая дуга $\gamma\subset\mathbb{R}^n\backslash K$ длиной $l(\gamma)$, соединяющая x и y, причем $l(\gamma)\leqslant C\rho(x,y)$ и для любого $z\in\gamma$ имеют место неравенства

$$\rho(z,\partial K)>\tau\rho(x,\partial K),\quad \rho(z,\partial K)<\tau\rho(y,\partial K),$$

здесь постоянная C не зависит от x и y, а метрика ρ берется вида (1).

Теорема о плотности. *Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ — компакт, удовлетворяющий условию* (A). *Тогда $C_0^\infty(K)$ плотно $(L_p^{\vec{l}})_K$.*

Теорема 2. *Пусть $P(x, D)$ — квазиэллиптический оператор с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами, определенными в Ω, и предположим, что $P(x, D)$ имеет бирегулярное фундаментальное решение в Ω. Пусть $K \subset \Omega$ компакт, удовлетворяющий условию* (A), *тогда $\eta(K)$ плотно в $\eta^p(K)$.*

$\lhd$ Теорема 2 является очевидным следствием теоремы 1 и теоремы о плотности из [6]. $\rhd$

Литература

1. *Mergelyan S. N.* On the completeness of systems of anlytic functions // Amer. Math. Soc. Trans.—1962.—V. 19, № 2.—P. 109–166.
2. *Keldysh M. V.* On the solubility and the stability of Dirichlet's problem // Amer. Math. Sos. Trans.—1966.—V. 51 (2).
3. *Hedberg L. I.* Approximation the mean by the analytic functions // Trans. Amer. Math. Soc.—1972.—V. 163.—P. 157–171.
4. *Polking J. C.* Approximation in L^p by solutions of elliptie partal differential equations // Amer. J. Math.—1972.—V. 94, № 4.—P. 1231–1244.
5. *Browder F. E.* Approximation by solutions of partial differential equations // Amer. J. of Math.—1962.—V. 84.—P. 134–160.
6. *Алборова М. С.* Теорема о плотности // Владикавк. мат. журн.—2001.—Т. 3, вып. 3, С. 3–7.

г. Владикавказ *Статья поступила 20 января 2003 г.*