Владикавказский математический журнал
Октябрь–декабрь, 2002, Том 4, Выпуск 4

УДК **517.55**

О КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ РИМАНА ДЛЯ ФУНКЦИЙ МНОГИХ КОМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ, ГОЛОМОРФНЫХ В КРАТНОКРУГОВЫХ ОБЛАСТЯХ $\mathbb{C}^n$

Нелаев А. В.

Автором продолжено исследование свойств функций многих комплексных переменных, представимых интегралом типа Темлякова I рода с n-круговой определяющей областью D типа A:

$$D = \{z \in \mathbb{C}^n : c_1|z_1| + \dots + c_n|z_n| < 1,\ c_1 > 0, \dots, c_n > 0\}.$$

Математический аппарат рассматриваемого интеграла применятся к постановке и решению задачи линейного сопряжения (пространственной задачи Римана).

Введение

Теория краевых задач для аналитических функций одного комплексного переменного ([3, 11]) нашла многочисленные применения как в самой математике (сингулярные интегральные уравнения, уравнения типа свертки и др.), так и в решении прикладных вопросов (в теории упругости, гидроаэродинамике, теории переноса частиц, теории массового обслуживания и т. д.). При решении одномерных краевых задач основным математическим аппаратом является интеграл типа Коши.

Начиная с середины XX века сильно возрос интерес к теории функций многих комплексных переменных. Эта теория в работах научных школ академиков Н. Н. Боголюбова, В. С. Владимирова, Ю. В. Линника получила эффективные приложения в квантовой теории поля [2] и математической статистике [6]. В последние годы описан широкий класс задач квантовой механики, теории вероятностей, математической физики, которые соответствующим преобразованием Фурье приводятся к многомерным краевым задачам линейного сопряжения (пространственной задаче Римана).

Установленные А. А. Темляковым в 1954 году интегральные представления голоморфных функций для ограниченных выпуклых полных двоякокруговых областей и развитый на их базе математический аппарат интегралов типа Темлякова (см., например, [4, 18]) явились той основой, на которой Г. Л. Луканкин (см., например, [7–9]) и его ученики (В. И. Боганов, И. Н. Виноградова, Х. П. Дзебисов, С. Ю. Колягин и др.) начали исследования по разработке теории краевых задач линейного сопряжения функций двух комплексных переменных, голоморфных в двоякокруговых областях.

Параллельно велись работы по распространению интегральных представлений Темлякова в пространство $\mathbb{C}^n$ $(n \geqslant 2)$. На этом пути польские математики З. Опиал и Ё. Сичак [19] получили интегральную формулу (n-мерный аналог интегралов Темлякова) для введенного ими класса ограниченных выпуклых полных n-круговых областей типа (T). И. И. Баврин (см. [1]) с помощью созданного им метода интегро-дифференциальных операторов голоморфных функций установил для этих областей ряд интегральных представлений более общей природы.

Автором, с помощью развиваемого метода линейных дифференциальных операторов с переменными коэффициентами (см. [13]), были исследованы [12] интегралы типа Темлякова и Темлякова — Баврина с определяющими областями $D \in (T)$.

В настоящей статье продолжена разработка математического аппарата интеграла типа Темлякова I рода с определяющей n-круговой ($n > 2$) областью D типа A. Этот аппарат применяется для постановки и решения однородной и неоднородной задач линейного сопряжения в $\mathbb{C}^n$.

§1. Исследование поведения интеграла типа Темлякова I рода с определяющей областью $D \in (T)$ типа A

Важным подклассом областей типа (T) являются области D типа A:

$$D = \{z \in \mathbb{C}^n : c_1|z_1| + \cdots + c_n|z_n| < 1,\ c_1, \ldots, c_n > 0\}. \tag{1}$$

Рассмотрим интеграл типа Темлякова I рода с определяющей областью D типа A:

$$F(z) = \frac{1}{(2\pi)^n i} \int d\omega_\tau \int d\omega_\theta \int\limits_{|\eta|=1} \frac{f(\tau, \theta, \eta)}{\eta - u}\, d\eta, \tag{2}$$

где

$$u = c_1 z_1 + c_2 z_2 e^{-i\theta_2} + \cdots + c_n z_n e^{-i\theta_n},$$

$$\theta = (\theta_2, \ldots, \theta_n), \quad 0 \leqslant \theta_j \leqslant 2\pi,\ j = \overline{2, n}, \quad \tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n) \in \Delta,$$

Δ — $(n-1)$-мерный симплекс, т. е.

$$\begin{aligned}\Delta &= \{\tau :\ \tau_1 + \cdots + \tau_n = 1,\ \tau_1 > 0, \ldots, \tau_n > 0\}\\ &= \{\tau :\ \tau_1 = 1 - \tau_2 - \cdots - \tau_n,\ (\tau_2, \ldots, \tau_n) \in \Delta^*\},\end{aligned}$$

$$\Delta^* = \{(\tau_2, \ldots, \tau_n) :\ 0 < \tau_2 < 1,\ 0 < \tau_3 < 1 - \tau_2, \ldots, 0 < \tau_n < 1 - \tau_2 - \cdots - \tau_{n-1}\},$$

$$\int d\omega_\tau = \int\limits_{\Delta^*} d\tau_2 \ldots d\tau_n, \qquad \int d\omega_\theta = \int\limits_0^{2\pi} d\theta_2 \cdots \int\limits_0^{2\pi} d\theta_n$$

и окружность $|\eta| = 1$ ориентирована как обычно в положительном направлении.

Будем предполагать, что плотность интеграла (2) $f(\tau, \theta, \eta)$ есть функция класса μ $(f(\tau, \theta, \eta))$, т. е. определена и непрерывна по совокупности аргументов на множестве

$$M = \{(\tau, \theta, \eta) :\ \tau \in \overline{\Delta},\ 0 \leqslant \theta_j \leqslant 2\pi,\ |\eta| = 1, j = \overline{2, n}\}$$

2π-периодична по θ_j, $j = \overline{2, n}$, и удовлетворяет по η условию Гёльдера H_α $(0 < \alpha \geqslant 1)$, а именно

$$|f(\tau, \theta, \eta') - f(\tau, \theta, \eta'')| < K|\eta' - \eta''|^\alpha,$$

где постоянные $K > 0$ и α не зависят от τ и θ. Учитывая, что ядро интеграла (2) не зависит от τ, условимся далее рассматривать этот интеграл в виде

$$F(z) = \frac{1}{(2\pi)^n i} \int d\omega_\theta \int\limits_{|\eta|=1} \frac{\varphi(\theta, \eta)}{\eta - u}\, d\eta, \tag{3}$$

где $\varphi(\theta,\eta)=\int f(\tau,\theta,\eta)\,d\omega_\tau$.

Как было установлено в [12], определяемые интегралом (3) функции являются голоморфными в области D и в неограниченных областях

$$E_\nu=\{z\in\mathbb{C}^n : c_\nu|z_\nu|-c_1|z_1|-\cdots-c_{\nu-1}|z_{\nu-1}|-c_{\nu+1}|z_{\nu+1}|-\cdots-c_n|z_n|>1\}, \qquad (4)$$

$\nu=\overline{1,n}$, неголоморфными, вообще говоря, в $\mathbb{C}^n\backslash(\overline{D\cup E_1\cup\cdots\cup E_n})$ и непрерывными во всем пространстве $\mathbb{C}^n$, за исключением расположенных на соответствующих координатных плоскостях окружностей

$$B_\nu=\{z\in\mathbb{C}^n : z=(0,\ldots,0,z_\nu,0,\ldots,0),\quad |z_\nu|=c_\nu^{-1}\},\quad \nu=\overline{1,n}, \qquad (5)$$

называемых *окружностями особенностей* интеграла (3) (легко видеть, что в их точках тождественно по всем θ_j выполняется равенство $|u|=1$).

Внутренний интеграл в (3) (по η) будем в дальнейшем понимать как *особый* (*сингулярный*) в смысле главного значения по Коши.

Отметим, что сопряжение области D с каждой из областей E_ν происходит по соответствующей окружности B_ν, $\nu=\overline{1,n}$.

Для случая пространства трех комплексных переменных $\mathbb{C}^3$ расположение образов областей E_1,E_2 и E_3 в «абсолютном октанте» проиллюстрировано на рис. 1.

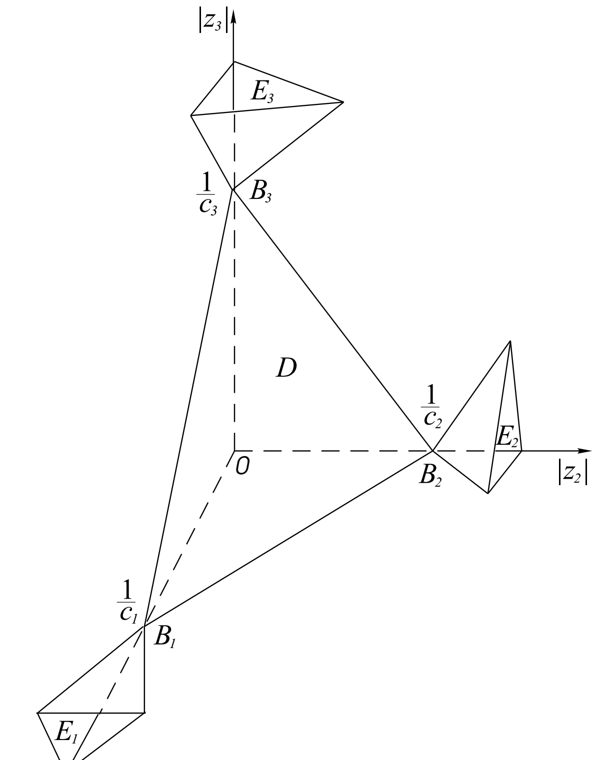

Рис.1.

Введем обозначение

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\eta|=1}\frac{\varphi(\theta,\eta)}{\eta-u}\,d\eta=\begin{cases}\Phi^+(\theta,u), & \text{если } |u|<1,\\ \Phi^-(\theta,u), & \text{если } |u|>1,\end{cases}$$

и будем называть функции $\Phi^+(\theta,u)$ и $\Phi^-(\theta,u)$ *определяющими функциями* интеграла типа Темлякова I рода (3).

Учитывая, что всюду в области D тождественно по всем θ_j выполняется неравенство $|u|<1$, а в областях E_ν $(\nu=\overline{1,n})$ — неравенство $|u|>1$, заключаем, что в D справедлива формула

$$F(z)=\frac{1}{(2\pi)^{n-1}}\int \Phi^+(\theta,u)\,d\omega_\theta, \tag{6}$$

а в E_ν — формула

$$F(z)=\frac{1}{(2\pi)^{n-1}}\int \Phi^-(\theta,u)\,d\omega_\theta. \tag{7}$$

Без ограничения общности рассуждений, далее для определенности будем считать $\nu=1$ и коэффициент $c_1=1$ (к области типа A общего вида легко перейти элементарным преобразованием подобия). Пусть точка $\tilde z_1\equiv(\eta_1,0,\dots,0)\in B_1$. Обозначим

$$F^+(\tilde z_1)=\lim_{\substack{z\to\tilde z_1\\ z\in D}}F(z),\quad F^-(\tilde z_1)=\lim_{\substack{z\to\tilde z_1\\ z\in E_1}}F(z),\quad u_1\equiv u\big|_{z=\tilde z_1}=\eta_1.$$

Теорема 1. *Если функция $\varphi(\theta,\eta)$ такова, что интеграл $\int\limits_{|\eta|=1}\frac{\varphi(\theta,\eta)}{\eta-u}\,d\eta$ имеет равностепенно абсолютно непрерывные $(n-1)$-кратные интегралы по $\theta_j, j=\overline{2,n}$, и сингулярный интеграл $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\eta|=1}\frac{\varphi(\theta,\eta)}{\eta-u_1}\,d\eta$ $(|u_1|=1)$ существует почти всюду на окружности особенностей B_1, то интеграл типа Темлякова I рода почти всюду на B_1 имеет конечные предельные значения из областей D и E_1, вычисляемые по формулам*

$$F^+(\tilde z_1)=\frac{1}{(2\pi)^n i}\int d\omega_\theta\int\limits_{|\eta|=1}\frac{\varphi(\theta,\eta)}{\eta-\eta_1}\,d\eta+\frac{1}{(2\pi)^{n-1}}\int\varphi(\theta,\eta_1)\,d\omega_\theta, \tag{8}$$

$$F^-(\tilde z_1)=\frac{1}{(2\pi)^n i}\int d\omega_\theta\int\limits_{|\eta|=1}\frac{\varphi(\theta,\eta)}{\eta-\eta_1}\,d\eta-\frac{1}{(2\pi)^{n-1}}\int\varphi(\theta,\eta_1)\,d\omega_\theta, \tag{9}$$

причем эти значения не зависят от пути приближения точки z к $\tilde z_1\in B_1$.

$\lhd$ Доказательство теоремы основано на формулах Сохоцкого для определяющих функций:

$$\lim_{\substack{z\to\tilde z_1\\ z\in D}}\Phi^+(\theta,u)\equiv\Phi^+(\theta,\eta_1)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\eta|=1}\frac{\varphi(\theta,\eta)}{\eta-\eta_1}\,d\eta+\frac12\varphi(\theta,\eta_1),$$

$$\lim_{\substack{z\to\tilde z_1\\ z\in E_1}}\Phi^-(\theta,u)\equiv\Phi^-(\theta,\eta_1)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\eta|=1}\frac{\varphi(\theta,\eta)}{\eta-\eta_1}\,d\eta-\frac12\varphi(\theta,\eta_1).\ \rhd$$

Теорема 2. *Предельные значения интеграла типа Темлякова I рода (3) из областей D и E_1 в точках окружностей B_1 удовлетворяют условию Гёльдера H_λ, причем $\lambda=\alpha$, если $0<\alpha<1$, и $\lambda=1-\sigma$, если $\alpha=1$, где σ — сколь угодно малое положительное число.*

$\lhd$ Доказательство теоремы сводится к проверке выполнимости для любой пары точек $\tilde{z}_1' = (\eta_1', 0, \dots, 0)$, $\tilde{z}_1'' = (\eta_1'', 0, \dots, 0) \in B_1$ неравенств

$$\left|F^+(\tilde{z}_1') - F^+(\tilde{z}_1'')\right| < K|\eta_1' - \eta_1''|^\lambda, \tag{10}$$

$$\left|F^-(\tilde{z}_1') - F^-(\tilde{z}_1'')\right| < K|\eta_1' - \eta_1''|^\lambda. \ \rhd \tag{11}$$

Рассмотрим теперь вопрос о поведении интеграла (3) на множестве бесконечно удаленных точек пространства $\overline{\mathbb{C}}^n$ (это множество состоит из точек $(z_1, \dots, z_n)$, у которых хотя бы одна координата равна ∞) при стремлении к ним из области E_1.

Пусть $p > 1$ — произвольное положительное число. Тогда для области

$$E_{1,p} = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_1| - c_2|z_2| - \dots - c_n|z_n| > p\}$$

тождественно по всем $\theta_j, j = \overline{2,n}$, выполняется неравенство $|u| > p$. Следовательно, если $z \in E_{1,p}$, то

$$F(z) = \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \int \Phi_p^-(\theta, u)\, d\omega_\theta, \tag{12}$$

где $\Phi_p^-(\theta, u) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\eta|=1} \frac{\varphi(\theta,\eta)}{\eta - u}\, d\eta, \ |u| > p.$

Далее, пусть точка z стремиться к бесконечно удаленной точке из области $E_{1,p}$ (понятно, что это не может быть точка, у которой ограничена первая координата) и $p \geqslant p_0 = \frac{c}{\delta} + 1$, где δ — сколь угодно малое положительное число, $c = \sup\big\{|\varphi(\theta,\eta)| : 0 \leqslant \theta_j \leqslant 2\pi,\ j = \overline{2,n},\ |\eta| = 1\big\}$. Тогда $|\Phi_p^-(\theta, u)| < \delta$ и, следовательно,

$$|F(z)| \leqslant \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \int |\Phi_p^-(\theta, u)|\, d\omega_\theta < \frac{\delta}{(2\pi)^{n-1}} \int d\omega_\theta = \delta. \tag{13}$$

Полученное неравенство показывает, что в бесконечно удаленных точках при стремлении к ним произвольным способом из области $E_{1,p}$ интеграл типа Темлякова I рода (3) обращается в нуль.

Определение 1. Будем говорить, что функция $f(z)$ есть функция класса (T), если она:

1) непрерывна во всем пространстве $\mathbb{C}^n$ за исключением точек окружностей B_ν $(\nu = \overline{1,n})$;

2) голоморфна в $D \cup E_1 \cup \dots \cup E_n$;

3) неголоморфна, вообще говоря, в $\mathbb{C}^n \setminus (\overline{D \cup E_1 \cup \dots \cup E_n})$;

4) $f(z)$ имеет конечные предельные значения в точках окружностей B_ν при стремлении точки z к $\tilde{z}_\nu = (0, \dots, 0, c_\nu^{-1}\eta_\nu, 0, \dots, 0) \in B_\nu$ $(|\eta_\nu| = 1)$ из D и E_ν.

Следствие 1. *Всякая функция, определяемая интегралом типа Темлякова I рода (3) принадлежит классу (T).*

§2. Постановка и решение однородной задачи линейного сопряжения в классе функций (T)

Постановка задачи. Пусть в пространстве $\mathbb{C}^n$ задана область D типа A:

$$D = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_1| + c_2|z_2| + \dots + c_n|z_n| < 1,\ c_2 > 0, \dots, c_n > 0\}.$$

Требуется найти функцию $f(z)$ класса (T), исчезающую в бесконечно удаленных точках при стремлении к ним из области E_1, удовлетворяющую в точках окружности $B_1 = \{z \in \mathbb{C}^n : z = \tilde{z}_1 \equiv (\eta_1, 0 \ldots, 0),\ |\eta_1| = 1\}$ краевому условию

$$f^+(\tilde{z}_1) = G(\eta_1) f^{-1}(\tilde{z}_1), \tag{14}$$

где

$$f^+(\tilde{z}_1) = \lim_{\substack{z \to \tilde{z}_1 \\ z \in D}} f(z), \quad f^-(\tilde{z}_1) = \lim_{\substack{z \to \tilde{z}_1 \\ z \in E_1}} f(z),$$

а функция $G(\eta_1)$ определена на окружности B_1, нигде на ней не обращается в нуль и удовлетворяет условию Гёльдера, причем ее индекс $\varkappa = \operatorname{Ind} G(\eta_1) \geqslant 0$.

Решение. Учитывая, что функции, определяемые интегралом типа Темлякова I рода (3), являются функциями класса (T) будем искать решение задачи в виде интеграла (3). Подставляя в соотношение (14) предельные значения интеграла (3), выраженные по формулам (8) и (9), получим

$$\frac{1}{(2\pi)^n i} \int d\omega_\theta \int\limits_{|\eta|=1} \frac{\varphi(\theta, \eta)}{\eta - \eta_1}\, d\eta + \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \int \varphi(\theta, \eta_1)\, d\omega_\theta$$
$$= G(\eta_1) \cdot \left[\frac{1}{(2\pi)^n i} \int d\omega_\theta \int\limits_{|\eta|=1} \frac{\varphi(\theta, \eta)}{\eta - \eta_1}\, d\eta - \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \int \varphi(\theta, \eta_1)\, d\omega_\theta \right]$$

или

$$\frac{1}{2 \cdot (2\pi)^{n-1}} \cdot \int \left[(1 + G(\eta_1)) \cdot \varphi(\theta, \eta_1) + \frac{1 - G(\eta_1)}{\pi i} \int\limits_{|\eta|=1} \frac{\varphi(\theta, \eta)}{\eta - \eta_1}\, d\eta \right] d\omega_\theta = 0.$$

Отсюда следует, что

$$(1 + G(\eta_1)) \cdot \varphi(\theta, \eta_1) + \frac{1 - G(\eta_1)}{\pi i} \int\limits_{|\eta|=1} \frac{\varphi(\theta, \eta)}{\eta - \eta_1}\, d\eta = 2\lambda(\theta, \eta_1), \tag{15}$$

где функция $\lambda(\theta, \eta_1)$, предполагаемая непрерывной по совокупности аргументов и удовлетворяющей по η_1 условию Гёльдера, независимому от θ_j, $j = \overline{2, n}$, является решением уравнения $\int \lambda(\theta, \eta_1)\, d\omega_\theta = 0$, а коэффициент 2 в правой части взят для удобства дальнейших выкладок.

Решать полученное сингулярное интегральное уравнение с ядром Коши (15) будем тем же способом, каким решают характеристическое уравнение в теории функций одного комплексного переменного (см. [3, §21]). Рассмотрим с этой целью интеграл типа Коши

$$\Phi(\theta, u) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\eta|=1} \frac{\varphi(\theta, \eta)}{\eta - u}\, d\eta, \tag{16}$$

где $u = z_1 + c_2 z_2 e^{-i\theta_2} + \cdots + c_n z_n e^{-i\theta_n}$.

Учитывая равенство $\lim_{z\to\tilde{z}_1} u = \eta_1$ и используя формулы Сохоцкого для интеграла (16), перепишем уравнение (15) в виде

$$\varphi(\theta,\eta_1) + G(\eta_1)\cdot\varphi(\theta,\eta_1) + 2\Phi^+(\theta,\eta_1) - \varphi(\theta,\eta_1) \\ - G(\eta_1)\cdot\varphi(\theta,\eta_1) - 2G(\eta_1)\cdot\Phi^-(\theta,\eta_1) = 2\lambda(\theta,\eta_1),$$

или, что тоже самое,

$$\Phi^+(\theta,\eta_1) = G(\eta_1)\cdot\Phi^-(\theta,\eta_1) + \lambda(\theta,\eta_1). \tag{17}$$

Таким образом, решение сингулярного интегрального уравнения (15) (а значит и поставленной однородной задачи линейного сопряжения) свелось к решению задачи Римана с краевым условием (17). Решение этой задачи, учитывая, что $\varkappa \geqslant 0$, имеет вид

$$\Phi(\theta,u) = \frac{X(u)}{2\pi i}\int\limits_{|\eta|=1}\frac{\lambda(\theta,\eta)}{X^+(\eta)}\cdot\frac{d\eta}{\eta-u} + X(u)\cdot P_{\varkappa-1}(u), \tag{18}$$

где

$$X(u) = \begin{cases} e^{\Gamma^+(u)}, & \text{если } |u|<1, \\ u^{-\chi}\cdot e^{\Gamma^-(u)}, & \text{если } |u|>1, \end{cases} \quad \Gamma(u) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\eta|=1}\frac{\ln[\eta^{-\varkappa}\cdot G(\eta)]}{\eta-u}\,d\eta,$$

$P_{\varkappa-1}(u)$ — полином степени не выше $\varkappa-1$ с произвольными комлексными переменными (при $\varkappa=1$ $P_{\varkappa-1}(u)=C_0$; при $\varkappa=0$ полагаем $P_{\varkappa-1}(u)\equiv 0$).

Итак, найдены определяющие функции $\Phi^{\pm}(\theta,u)$ интеграла (3). Далее, используя формулу (18), по формулам (6) и (7) (последняя записана относительно E_1) получаем решение поставленной задачи.

Замечание 1. Вычислив с помощью формул Сохоцкого предельные значения определяющих функций, можно найти плотность интеграла типа Темлякова I рода $\varphi(\theta,\eta)$, где $\varphi(\theta,\eta_1) = \Phi^+(\theta,\eta_1) - \Phi^-(\theta,\eta_1)$, а значит по формуле (3) и решение поставленной однородной задачи линейного сопряжения.

Замечание 2. Наличие в найденном решении задачи полинома $P_{\varkappa-1}(u)$ с произвольными коэффициентами и некоторой неизвестной функции $\lambda(\theta,\eta)$ указывают на неоднозначность решения. Решение задачи станет вполне определенным, если наложить на искомую функцию $F^+(z) \equiv \underset{z\in D}{F(z)}$ (или $F^-(z) \equiv \underset{z\in E_1}{F(z)}$) $\varkappa$ независимых условий. Например, это можно сделать следующим образом: задать в начале координат (где $u=0$) значение определяющей функции $\Phi^+(\theta,u)$ и всех ее производных по u до порядка $\varkappa-1$ включительно. Это позволит найти коэффициенты полинома $P_{\varkappa-1}(u)$.

Найдем, например, коэффициент C_0. Пусть задано значение $\Phi^+(\theta,u)\big|_{u=0} = \Phi^+(\theta,0)$. Из формулы (18) следует, что

$$\frac{\Phi^+(\theta,0)}{X^+(0)} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\eta|=1}\frac{\lambda(\theta,\eta)}{X^+(\eta)}\cdot\frac{d\eta}{\eta} + C_0. \tag{19}$$

Интегрируя данное соотношение по θ_j, $j=\overline{2,n}$, в пределах от 0 до 2π и учитывая, что $\int \lambda(\theta,\eta)\,d\omega_\theta=0$, получаем

$$C_0=\frac{1}{(2\pi)^{n-1}}\int\frac{\Phi^+(\theta,0)}{X^+(0)}\,d\omega_\theta=\frac{1}{(2\pi)^{n-1}\cdot X^+(0)}\int\Phi^+(\theta,0)\,d\omega_\theta,$$

или

$$C_0=\frac{F^+(0)}{X^+(0)},\tag{20}$$

так как $F^+(0)=\frac{1}{(2\pi)^{n-1}}\int\Phi^+(\theta,0)\,d\omega_\theta$.

Далее, для нахождения функции $\lambda(\theta,\eta)$ надо решать уравнение (19), в котором C_0 определяется по формуле (20).

§3. Постановка и решение неоднородной задачи линейного сопряжения в классе функций (T)

Постановка задачи. Пусть в пространстве $\mathbb{C}^n$ задана область D типа A. Требуется найти функцию $f(z)$ класса (T), исчезающую в бесконечно удаленных точках при стремлении к ним из области E_1 и удовлетворяющую в точках окружности B_1 краевому условию

$$f^+(\tilde z_1)=G(\eta_1)f^-(\tilde z_1)+g(\eta_1),\tag{21}$$

где функции $G(\eta_1)$ и $g(\eta_1)$ определены и удовлетворяют условию Гёльдера на окружности B_1, причем $G(\eta_1)$ нигде на B_1 не обращается в нуль.

Решение. Будем искать решение задачи в виде интеграла типа Темлякова I рода (3). Подставляя формулы предельных значений этого интеграла (8) и (9) в краевое условие (21), получаем

$$\frac{1}{(2\pi)^n i}\int d\omega_\theta\int\limits_{|\eta|=1}\frac{\varphi(\theta,\eta)}{\eta-\eta_1}\,d\eta+\frac{1}{(2\pi)^{n-1}}\int\varphi(\theta,\eta_1)\,d\omega_\theta$$
$$=G(\eta_1)\cdot\left[\frac{1}{(2\pi)^n i}\int d\omega_\theta\int\limits_{|\eta|=1}\frac{\varphi(\theta,\eta)}{\eta-\eta_1}\,d\eta-\frac{1}{(2\pi)^{n-1}}\int\varphi(\theta,\eta_1)\,d\omega_\theta\right]+g(\eta_1),$$

или

$$\frac{1}{2\cdot(2\pi)^{n-1}}\cdot\int\left[(1+G(\eta_1))\cdot\varphi(\theta,\eta_1)+\frac{1-G(\eta_1)}{\pi i}\int\limits_{|\eta|=1}\frac{\varphi(\theta,\eta)}{\eta-\eta_1}\,d\eta-2g(\eta_1)\right]d\omega_\theta=0.$$

Отсюда следует, что

$$(1+G(\eta_1))\cdot\varphi(\theta,\eta_1)+\frac{1-G(\eta_1)}{\pi i}\int\limits_{|\eta|=1}\frac{\varphi(\theta,\eta)}{\eta-\eta_1}\,d\eta=2(g(\eta_1)+\lambda_1(\theta,\eta_1)),\tag{22}$$

где $\lambda_1(\theta,\eta_1)$ — некоторая функция, предполагаемая непрерывной по совокупности аргументов и удовлетворяющей по η_1 условию Гёльдера, независимому от θ, является решением уравнения $\int\lambda_1(\theta,\eta_1)\,d\omega_\theta=0$.

Полученное уравнение (22) есть сингулярное интегральное уравнение с ядром Коши, решать которое будем тем же способом, каким решают характеристическое уравнение в теории функций одного комплексного переменного ([3, §21]). Рассмотрим с этой целью интеграл типа Коши (16). Учитывая равенство $\lim\limits_{z \to \tilde{z}_1} u = \eta_1$ и используя формулы Сохоцкого для интеграла (16), перепишем уравнение (22) в виде

$$\varphi(\theta,\eta_1) + G(\eta_1)\varphi(\theta,\eta_1) + 2\Phi^+(\theta,\eta_1) - \varphi(\theta,\eta_1) \\ - G(\eta_1)\varphi(\theta,\eta_1) - 2G(\eta_1)\Phi^-(\theta,\eta_1) = 2(g(\eta_1) + \lambda_1(\theta,\eta_1))$$

или

$$\Phi^+(\theta,\eta_1) = G(\eta_1)\Phi^-(\theta,\eta_1) + g(\eta_1) + \lambda_1(\theta,\eta_1). \tag{23}$$

Решение сингулярного интегрального уравнения (22), а значит и поставленной неоднородной задачи линейного сопряжения, свелось, таким образом, к решению задачи Римана с краевым условием (23).

Рассмотрим два возможных случая.

1) Пусть $\varkappa = \operatorname{Jnd} G(\eta_1) \geqslant 0$. Тогда решение задачи имеет вид

$$\Phi(\theta,u) = \frac{X(u)}{2\pi i} \int\limits_{|\eta|=1} \frac{g(\eta) + \lambda_1(\theta,\eta)}{X^+(\eta)} \cdot \frac{d\eta}{\eta - u} + X(u)P_{\varkappa-1}(u), \tag{24}$$

где

$$X(u) = \begin{cases} e^{\Gamma^+(u)}, & \text{если } |u| < 1, \\ u^{-\varkappa} \cdot e^{\Gamma^-(u)}, & \text{если } |u| > 1, \end{cases} \quad \Gamma(u) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\eta|=1} \frac{\ln[\eta^{-\varkappa} \cdot G(\eta)]}{\eta - u}\, d\eta,$$

$P_{\varkappa-1}(u)$ — полином степени не выше $\varkappa - 1$ с произвольными комплексными коэффициентами (при $\varkappa = 0$ полагаем $P_{\varkappa-1}(u) \equiv 0$).

2) Пусть $\varkappa = \operatorname{Jnd} G(\eta_1) < 0$. Тогда решение задачи имеет вид

$$\Phi(\theta,u) = \frac{X(u)}{2\pi i} \int\limits_{|\eta|=1} \frac{g(\eta) + \lambda_1(\theta,\eta)}{X^+(\eta)} \cdot \frac{d\eta}{\eta - u}. \tag{25}$$

Отметим следующее обстоятельство. Неоднородная задача Римана в случае $\varkappa < -1$, вообще говоря, неразрешима. Для ее разрешимости необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие $|\varkappa|$ условий:

$$\int\limits_{|\eta|=1} \frac{g(\eta) + \lambda_1(\theta,\eta)}{X^+(\eta)} \cdot \eta^{k-1}\, d\eta = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, |\varkappa|.$$

Итак, найдены определяющие функции $\Phi^+(\theta,u)$ и $\Phi^-(\theta,u)$, задаваемые формулой (24), если $\varkappa \geqslant 0$, или формулой (25), если $\varkappa < 0$. Подставляя их в формулы (6) и (7) получим решение поставленной задачи.

Замечание 3. Решение поставленной неоднородной краевой задачи можно найти в виде интеграла типа Темлякова I рода (3) с плотностью $\varphi(\theta,\eta)$, где $\varphi(\theta,\eta_1) = \Phi^+(\theta,\eta_1) - \Phi^-(\theta,\eta_1)$, а $\Phi^+(\theta,\eta_1)$ и $\Phi^-(\theta,\eta_1)$ есть предельные значения определяющих функций, вычисленные по формулам Сохоцкого.

Замечание 4. Если для нахождения решения краевой задачи используется формула (24), то решение зависит от полинома $P_{\varkappa-1}(u)$ с произвольными комплексными коэффициентами и некоторой неизвестной функции $\lambda_1(\theta,\eta)$. Решение задачи станет вполне определенным, если наложить на искомую функцию $F^+(z)$ (или $F^-(z)$) $\varkappa$ независимых условий. Это, например, можно сделать так: задать в начале координат (где $u=0$) значение определяющей функции $\Phi^+(\theta,u)$ и всех ее производных по u до порядка $\varkappa-1$ включительно. Это позволит найти коэффициенты полинома $P_{\varkappa-1}(u)$.

Найдем, например, коэффициент C_0 Пусть задано значение $\Phi^+(\theta,u)\big|_{u=0} = \Phi^+(\theta,0)$. Из формулы (24) следует, что

$$\frac{\Phi^+(\theta,0)}{X^+(0)} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\eta|=1} \frac{g(\eta)+\lambda_1(\theta,\eta)}{X^+(\eta)}\cdot\frac{d\eta}{\eta} + C_0. \tag{26}$$

Интегрируя это соотношение по θ_j, $j=\overline{2,n}$, в пределах от 0 до 2π и учитывая, что $\int \lambda_1(\theta,\eta_1)\,d\omega_\theta = 0$, получаем

$$C_0 = \frac{1}{(2\pi)^{n-1}}\int\left(\frac{\Phi^+(\theta,0)}{X^+(0)} - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\eta|=1}\frac{g(\eta)}{X^+(\eta)}\cdot\frac{d\eta}{\eta}\right)d\omega_\theta,$$

т. е.

$$C_0 = \frac{F^+(0)}{X^+(0)} - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\eta|=1}\frac{g(\eta)}{X^+(\eta)}\cdot\frac{d\eta}{\eta},$$

поскольку

$$F^+(0) = \frac{1}{(2\pi i)^{n-1}}\int \Phi^+(\theta,0)\,d\omega_\theta.$$

Подставив значение коэффициента C_0 в соотношение (26), получаем уравнение для нахождения функции $\lambda_1(\theta,\eta)$:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\eta|=1}\frac{\lambda_1(\theta,\eta)}{X^+(\eta)}\cdot\frac{d\eta}{\eta} = \frac{\Phi^+(\theta,0)-F^+(0)}{X^+(0)}.$$

Если же решение краевой задачи находится с использованием формулы (25) (т. е. индекс $\varkappa<0$), то это решение будет содержать неизвестную функцию $\lambda_1(\theta,\eta)$. В этом случае для получения определенного решения надо на функцию $F^+(z)$ (или $F^-(z)$) наложить одно условие. Например, так же, как в рассмотренном случае, можно задать в начале координат (где $u=0$) значение определяющей функции $\Phi^+(\theta,0)$. Тогда для нахождения функции $\lambda_1(\theta,\eta)$ следует рассмотреть уравнение

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\eta|=1}\frac{\lambda_1(\theta,\eta)}{X^+(\eta)}\cdot\frac{d\eta}{\eta} = \frac{\Phi^+(\theta,0)}{X^+(0)} - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\eta|=1}\frac{g(\eta)}{X^+(\eta)}\cdot\frac{d\eta}{\eta}.$$

Следствие 2. *В случае* $G(\eta_1) \equiv 1$ *неоднородная задача линейного сопряжения обращается в задачу о скачке с краевым условием*

$$f^+(\tilde{z}_1) - f^-(\tilde{z}_1) = g(\eta_1).$$

§4. Прибавление

Отметим, что краевые задачи линейного сопряжения, близкие по постановке к рассмотренным выше, но решение которых ищется в классах функций, определяемых различными интегралами типа Темлякова — Барвина, были изучены в совместных работах автора и его учеников.

Так, в совместном с А. Е. Луковниковым исследовании 2000 года [15], получившем дальнейшее развитие в его диссертационной работе [10], были рассмотрены однородная и неоднородная задачи, в которых решение искалось в классе интегралов типа Темлякова — Барвина I рода первого порядка

$$\frac{1}{(2\pi)^n i} \int_0^1 d\varepsilon \int d\omega_\theta \int_{|\eta|=1} \frac{\varphi(\theta,\eta)}{\eta - u}\, d\eta, \tag{27}$$

где $u = c_1 z_1 + c_2 \varepsilon z_2 e^{-i\theta_2} + \cdots + c_n \varepsilon z_n e^{-i\theta_n}$.

В работах, написанных в соавторстве с А. С. Якшиной (см., например, [16]), подобные задачи были рассмотрены и решены в классе функций, определяемых интегралом вида (27), но в котором $u = u_{\nu(k)} = c_1 \varepsilon^{\delta_1} z_1 + c_2 \varepsilon^{\delta_2} z_2 e^{-i\theta_2} + \cdots + c_n \varepsilon^{\delta_n} z_n e^{-i\theta_n}$, где показатели $\delta_1, \ldots, \delta_n$ представляют собой набор из нулей и единиц, причем нулю равны $\delta_{\nu_1}, \ldots, \delta_{\nu_k}$ ($\nu_1 < \nu_2 < \cdots < \nu_k$, $2 \leqslant k \leqslant n-1$), а единице — все остальные показатели.

Отметим, наконец, что автором в 2001–2002 годах произведена постановка и указано решение соответствующих краевых задач в классах функций, определяемых интегралом типа Темлякова I рода с более широким, чем n-круговые определяющие области D типа A, классом круговых определяющих областей.

Литература

1. *Баврин И. И.* Операторный метод в комплексном анализе.—М.: Изд-во МПГУ «Прометей», 1991.—200 с.
2. *Владимиров В. С.* Методы теории функций многих комплексных переменных.—М.: Наука, 1964.—411 с.
3. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. 3-е изд.—М.: Наука, 1977.—640 с.
4. История отечественной математики.—Киев: Наукова думка, 1970.—Т. 4.—Кн. 1.—С. 193–295.
5. *Какичев В. А.* Краевые задачи для функций, аналитических в биобластях // Вестн. Новгородского ун-та им. Ярослава Мудрого. Естественные и технические науки.—1995.—№ 1.—С. 110–114.
6. *Линник Ю. В.* Статистические задачи с мешающими параметрами.—М.: Наука, 1966.—342 с.
7. *Луканкин Г. Л.* Об однородной задаче линейного сопряжения // Учен. зап. МОПИ.—1970.—Т. 269.—С. 15–22.
8. *Луканкин Г. Л.* О неоднородной задаче линейного сопряжения // Теория функций, функциональный анализ и их приложения / сб. трудов.—М., 1973.—Вып. 15(1).—С. 45–52.

9. *Луканкин Г. Л.* Пространственная задача линейного сопряжения // Вестн. МАН ВШ.—1998.—№ 4(6).—С. 82–90.
10. *Луковников А. Е.* Исследование свойств интегральных голоморфных функций в $\mathbb{C}^n$ и решение многомерных краевых задач линейного сопряжения // Автореф. дисс. на соиск. степ. канд. физ.-мат. наук.—М., 2000.
11. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения.—М.: Наука, 1968.—511 с.
12. *Нелаев А. В.* Операторная связь между некоторыми интегралами // Математический анализ и теория функций / Респ. сб. трудов.—М., 1973.—Вып. 1.—С. 169–178.
13. *Нелаев А. В.* Метод линейных дифференциальных операторов с переменными коэффициентами в исследовании комплексных интегралов в $\mathbb{C}^n$ // Математика. Компьютер. Образование / Сб. науч. трудов.—М.: Прогресс-Традиция, 2000.—Вып. 7, Ч. 2.—С. 444–451.
14. *Нелаев А. В.* Пространственная краевая задача линейного сопряжения для функций, голоморфных в кратнокруговых областях $\mathbb{C}^n$.—М.: Прогресс-Традиция, 2001.—Вып. 8, Ч. 2.—С. 406–414.
15. *Нелаев А. В., Луковников А. Е.* (краевые задачи линейного сопряжения в $\mathbb{C}^n$ для функций, голоморфных в кратнокруговых областях.—М., 2000.—19 с. Деп. в ВИНИТИ 04.10.2000, № 2542–В00
16. *Нелаев А. В., Якшина А. С.* О неоднородной краевой задаче Римана для функций многих комплексных переменных, голоморфных в кратнокруговых областях.—М.: Прогресс-Традиция.—С. 415–423.
17. *Темляков А. А.* Интегральные представления аналитических функций двух комплексных переменных // Учен. зап. МОПИ.—1954.—Т. 21.—С. 7–21.
18. *Фукс Б. А.* Введение в теорию аналитических функций многих комплексных переменных.—М.: Физматгиз, 1962.—419 с.
19. *Opial Z., Siciar J.* Jntegral formulas for functions holomorphic in convex n-circular domains // Zesz. Nauk. Univ. Jagiell.—1963.—V. 9, No. 77.—P. 67–75.

г. Москва

Статья поступила 16 сентября 2002 г.