Владикавказский математический журнал
Октябрь–декабрь, 2002, Том 4, Выпуск 4

УДК **517.956**

О НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ОДНОГО СМЕШАННОГО УРАВНЕНИЯ С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

В. А. Елеев, З. Х. Жемухова

В явном виде найдено регулярное решение краевой задачи для одного смешанного уравнения с разрывными коэффициентами в прямоугольной области.

Рассмотрим уравнение

$$0 = \begin{cases} u_{xx} + u_{yy} + \rho_1 u + f_0, & y > 0, \\ u_{xx} - (-y)^m u_{yy} + \rho_2 u_y + \rho_3 u, & y < 0,\ m = 0, 1 \end{cases} \tag{1}$$

в области Ω, ограниченной отрезками $A_0A_0', A_0'B_0', B_0'B_0, B_0A_0$ прямых $x = 0$, $y = h > 0$, $x = l$, $y = -\alpha$ $(\alpha > 0)$. Обозначим через $\Omega_1 = \Omega \cap (y > 0)$ и $\Omega_2 = \Omega \cap (y < 0)$ эллиптическую и гиперболическую части области Ω соответственно. Пусть AB — открытый интервал $(0, l)$ при $y = 0$; $AB_0 : x + 2\sqrt{-y} = 0$; $BA_0 : x - 2\sqrt{-y} = l$ — характеристики уравнения (1) при $y < 0$; $f_0 = \mathrm{const} \geqslant 0$; $\rho_1, \rho_2 = \mathrm{const}$, причем $\rho_2 < 1$.

Задача (А). Найти регулярное в области Ω решение $u(x, y)$ уравнения (1), непрерывное в замкнутых областях $\overline{\Omega}_1$ и $\overline{\Omega}_2$, дважды непрерывно дифференцируемое в областях Ω_1 и Ω_2 и удовлетворяющее краевым условиям

$$R_1 u \equiv (\alpha_1 u_x - \beta_1 u)\big|_{x=0} = \varphi_0(y), \quad -\alpha \leqslant y \leqslant h; \tag{2}$$

$$R_2 u \equiv (\alpha_2 u_x + \beta_2 u)\big|_{x=l} = \varphi_l(y), \quad -\alpha \leqslant y \leqslant h; \tag{3}$$

$$R_3 u \equiv (\alpha_3 u_y + \beta_3 u)\big|_{y=h} = \psi_h(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l; \tag{4}$$

$$u(x, -\alpha) = \psi_{-\alpha}(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{5}$$

где α_i, β_i — постоянные, причем $|\alpha_i| + |\beta_i| \neq 0$, $i = 1, 2, 3$.

В зависимости от значений $\alpha_i, \beta_i, \rho_i$ $(i = 1, 2, 3)$, свойства функций $\varphi_0, \varphi_l, \psi_h, \psi_{-\alpha}$ будут определены каждый раз.

Пусть $\alpha_i = 0$, $\beta_i = 1$ $(i = 1, 2, 3)$, $f_0 = 0$, $m = 1$, $\rho_3 = 0$, $\rho_2 \neq 0$ и выполняются условия склеивания

$$\lim_{y \to 0+} u(x, y) = \lim_{y \to 0-} (-y)^{\rho_2 - 1} u(x, y), \tag{6}$$

$$\lim_{y \to 0+} u_y(x, y) = \lim_{y \to 0-} (-y)^{\rho_2} u_y(x, y). \tag{7}$$

Решение задачи (1)–(7) будем искать в виде суммы $u(x, y) = u_1(x, y) + u_2(x, y)$, где, в свою очередь, функция u_2 имеет вид $u_1(x, y) = V_1(x, y) + U_1(x, y)$.

Здесь $V_1(x,y)$ — решение задачи:

$$V_{1xx} + V_{1yy} + \rho_1 V_1 = 0; \tag{8}$$

$$V_1(0,y) = 0, \quad V_1(l,y) = 0, \quad 0 \leqslant y \leqslant h; \tag{9}$$

$$V_1(x,h) = \psi_h(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{10}$$

а $U_1(x,y)$ — решение задачи:

$$U_{1xx} - U_{1yy} + \rho_1 U_1 = 0; \tag{8$'$}$$

$$U_1(0,y) = \varphi_0(y), \quad U_1(l,y) = \varphi_l(y), \quad 0 \leqslant y \leqslant h; \tag{9$'$}$$

$$U_1(x,h) = 0. \tag{10$'$}$$

Решение $u_2(x,y)$ ищется в виде суммы $u_2(x,y) = V_2(x,y) + U_2(x,y)$.
Здесь $V_2(x,y)$ — решение задачи:

$$V_{2xx} + yV_{2yy} + \rho_2 V_{2y} = 0; \tag{11}$$

$$V_2(0,y) = 0, \quad V_2(l,y) = 0, \quad -\alpha \leqslant y \leqslant 0; \tag{12}$$

$$V_2(x,-\alpha) = \psi_{-\alpha}(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{13}$$

а $U_2(x,y)$ — решение задачи:

$$U_{2xx} - U_{2yy} + \rho_2 U_{2y} = 0; \tag{11$'$}$$

$$U_2(0,y) = \varphi_0(y), \quad U_2(l,y) = \varphi_l(y), \quad -\alpha \leqslant y \leqslant 0; \tag{12$'$}$$

$$U_2(x,-\alpha) = 0. \tag{13$'$}$$

Решение задачи (8)–(10) будем искать в виде

$$V_1(x,y) = X(x)Y(y). \tag{14}$$

Подставляя (14) в уравнение (8), получим два обыкновенных дифференциальных уравнения

$$X''(x) + k_1^2 X(x) = 0, \quad Y''(y) - k_2^2 Y(y) = 0, \tag{15}$$

где $k_2^2 = -\rho_1 + k_1^2$. Учитывая граничные условия (9), получим краевую задачу

$$X''(x) + k_1^2 X(x) = 0, \quad X(0) = X(l) = 0,$$

решение которой имеет вид

$$X(x) = X_n(x) = \sin k_{1n} x, \quad k_{1n} = \frac{n\pi}{l} \ \ (n = 1, 2 \dots).$$

При $k_{2n}^2 = k_{1n}^2 - \rho_1$ общее решение второго уравнения (15) запишем в виде

$$Y(y) = Y_n(y) = C_{1n} \operatorname{ch} k_{2n} + C_{2n} \operatorname{sh} k_{2n} y,$$

где C_{1n}, C_{2n} — коэффициенты, подлежащие определению. Все функции

$$V_{1n}(x,y) = X_n(x)Y_n(y) = (C_{1n}\operatorname{ch} k_{2n}y + C_{2n}\operatorname{sh} k_{2n}y)\sin k_{1n}x$$

удовлетворяют уравнению (8) и граничным условиям (9) при любых постоянных C_{1n}, C_{2n}. В силу линейности и однородности уравнения (8), бесконечная сумма таких решений

$$V_1(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[C_{1n}\operatorname{sh} k_{2n}y + C_{2n}\operatorname{sh} k_{2n}(h-y)\right]\sin k_{1n}x \tag{16}$$

также удовлетворяет уравнению (1) и граничным условиям $u_1(0,y) = u_1(l,y) = 0$, $y > 0$.

Рассмотрим теперь задачу (11), (12). С введением новых независимых переменных $\xi = x$, $\eta = 2\sqrt{-y}$, уравнение (11) принимает вид

$$V_{2\xi\xi} - V_{2\eta\eta} - \frac{2\rho_2 - 1}{\eta}V_{2\eta} = 0. \tag{17}$$

Это уравнение относится к классу уравнений Бесселя.

Из уравнения (17) после разделения переменных, с учетом граничных условий (12), получим

$$X''(\xi) + k_1^2 X(\xi) = 0, \quad X(0) = X(l) = 0, \tag{18}$$

$$Y''(\eta) + \frac{2\rho_2 - 1}{\eta}Y'(\eta) + k_1^2 Y(\eta) = 0. \tag{19}$$

Задача (18), как известно, имеет собственные значения k_{1n} и собственные функции $X_n(\xi) = \sin k_{1n}\xi$. Этим же собственным значениям соответствуют решения уравнения (19)

$$Y_n(\eta) = \eta^{1-\rho_2}\left[C_{3n}J_{1-\rho_2}(k_{1n}\eta) + C_{4n}J_{\rho_2-1}(k_{1n}\eta)\right],$$

где C_{3n}, C_{4n} — произвольные постоянные. Возвращаясь к переменным x, y, решение $V_2(x,y)$ уравнения (11) в области Ω_2, обращающееся в нуль при $x = 0$ и $x = l$, запишется в виде

$$V_2(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}(2\sqrt{-y})^{1-\rho_2}\left[C_{3n}J_{1-\rho_2}(k_{1n}\sqrt{-y}) + C_{4n}J_{\rho_2-1}(k_{1n}\sqrt{-y})\right]\sin k_{1n}x. \tag{20}$$

Совокупность функций (16) и (20) представляет собой множество решений уравнения (1) в подобластях Ω_1 и Ω_2 соответственно, обращающееся в нуль при $x = 0$ и $x = l$. Обозначим $\bar{u}_1(x,y) = V_1(x,y) + V_2(x,y)$. Рассмотрим задачу: найти решение $\bar{u}_1(x,y)$ уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям

$$\bar{u}_1(x,h) = \psi_h(x), \quad \bar{u}_1(x,-\alpha) = \psi_{-\alpha}(x), \tag{21}$$

причем $\psi_h(x),\ \psi_{-\alpha}(x) \in C^3[-\alpha, l],\ \psi_h^{(\nu)}(0) = \psi_{-\alpha}^{(\nu)}(l) = 0,\ \nu = \overline{0,3}$.

Имеет место

Утверждение 1. *Пусть* $\rho_1, \rho_2, \alpha, h$ *удовлетворяют условиям*

$$\rho_1 \neq k_{1n}^2,\ \alpha \neq (\mu_{1+\rho_2}^2, m)/k_{1n},\ \operatorname{th} k_{2n}h \neq k_{2n}/(1-\rho_2)(\sqrt{k_{1n}})^{1-\rho_2}. \tag{22}$$

Тогда задача (1), (21) *всегда разрешима и притом единственным образом.*

Здесь через $\mu_{1+\rho_2}^2, m$ обозначены корни функции Бесселя первого рода порядка $(1-\rho_2)$.

$\lhd$ Удовлетворяя $\bar{u}_1(x,y)$ условиям (6), (7), (21), относительно постоянных C_{jn}, $j=\overline{1,4}$ получим системы алгебраических уравнений для каждого фиксированного n

$$\Gamma(2-\rho)\operatorname{sh} k_{2n}hC_{2n} - C_{4n} = 0,$$

$$\Gamma(2-\rho_2)k_{2n}\operatorname{ch} k_{2n}hC_{2n} - (1-\rho_2)(\sqrt{k_{1n}})^{1-\rho_2}C_{4n} = 0,\ \operatorname{sh} k_{2n}hC_{1n} = \psi_{hn}, \tag{23}$$
$$(2\sqrt{\alpha})^{1-\rho_2}J_{1-\rho_2}(k_{1n}\sqrt{\alpha})C_{3n} + (2\sqrt{\alpha})^{1-\rho_2}J_{\rho_2-1}(k_{1n}\sqrt{\alpha})C_{4n} = \psi_{-\alpha n},$$

где

$$\psi_{hn} = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \psi_h(\xi)\sin k_{1n}\xi\, d\xi, \quad \psi_{-\alpha n} = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \psi_{-\alpha}(\xi)\sin k_{1n}\xi\, d\xi.$$

Определитель Δ системы (23) имеет вид

$$\Delta = \Gamma(2-\rho_2)(2\sqrt{\alpha})^{1-\rho_2}J_{1-\rho_2}(k_{1n}\sqrt{\alpha}) \times \Big[(1-\rho_2)(\sqrt{k_{1n}})^{1-\rho_2}\operatorname{sh} k_{2n}h - k_{2n}\operatorname{ch} k_{2n}h\Big]\operatorname{sh} k_{2n}h \tag{24}$$

и отличен от нуля, если выполнены условия (22).

Итак, система (23) для произвольного натурального значения n всегда имеет решение и оно единственно. Решая систему (23), находим

$$C_{2n} = 0,\ C_{4n} = 0,\ C_{1n} = \psi_{hn}/\operatorname{sh} k_{2n}h,$$

$$C_{3n} = \psi_{-\alpha n}\big/\big[(2\sqrt{\alpha})^{1-\rho_2}J_{1-\rho_2}(k_{1n}\sqrt{\alpha})\big].$$

Подставляя значения коэффициентов в (16), (20), получим

$$\bar{u}_1(x,y) = \begin{cases} V_1(x,y) & = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\psi_{hn}M_n(y)\sin k_{1n}x, \\ V_2(x,y) & = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\psi_{-\alpha n}N_n(y)\sin k_{1n}x, \end{cases} \tag{25}$$

где

$$M_n(y) = \frac{\operatorname{sh} k_{2n}y}{\operatorname{sh} k_{2n}h}, \quad N_n(y) = \frac{(2\sqrt{-y})^{1-\rho_2}J_{1-\rho_2}(k_{1n}\sqrt{-y})}{(2\sqrt{\alpha})^{1-\rho_2}J_{1-\rho_2}(k_{1n}\sqrt{\alpha})}.\ \rhd \tag{26}$$

Обозначим $\bar{u}_2(x,y) = U_1(x,y) + U_2(x,y)$, где $U_1(x,y)$ — решение задачи $(8')$–$(10')$, а $U_2(x,y)$ — решение задачи $(11')$–$(13')$.

Относительно заданных функций $\varphi_0(y)$, $\varphi_l(y)$ будем предполагать, что они кусочно-гладкие непрерывные функции на отрезке $[-\alpha, h]$ и удовлетворяют условиям

$$\varphi_0^{(\nu)}(-\alpha) = \varphi_0^{(\nu)}(0) = \varphi_0^{(\nu)}(h) = 0,$$

$$\varphi_l^{(\nu)}(-\alpha) = \varphi_l^{(\nu)}(0) = \varphi_l^{(\nu)}(h) = 0, \ \nu = \overline{1,4}.$$

Предположим так же, что граничные функции $\varphi_0(y)$, $\varphi_l(y)$ удовлетворяют условиям теоремы Гобсона [1], которая заключается в следующем:

Пусть $f(z)$ — произвольная функция, определенная на промежутке $[0,a)$ и удовлетворяет условиям:

1) *$f(z)$ — кусочно-непрерывна и имеет ограниченную вариацию во всем открытом промежутке $(0,a)$;*

2) *интеграл*

$$\int\limits_0^a z^{\frac{1}{2}} \big|f(z)\big|\, dz$$

имеет конечное значение.

Тогда ряд Фурье — Бесселя

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n J_\nu \left(\mu_{\nu n}\frac{z}{a}\right) \quad (0 < z < a) \tag{27}$$

сходится и имеет своей суммой $\frac{1}{2}[f(z+0) + f(z-0)]$, т. е. представляет $f(z)$ во всякой точке непрерывности этой функции, где $\mu_{\nu n}$ — положительные корни уравнения $J_\nu(z) = 0$, расположенные в порядке возрастания, а коэффициенты Фурье C_n определяются по формуле

$$C_n = \frac{2}{a^2 J^2_{\nu+1}(\mu_{\nu n})} \int\limits_0^1 z f(z) J_\nu \left(\mu_{\nu n}\frac{z}{a}\right) dz, \quad \nu \geqslant -\frac{1}{2} \ \ (n = 1, 2, \dots). \ \triangleright$$

Рассмотрим задачу: Найти решение $\bar{u}_2(x,y)$ уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям:

$$\bar{u}_2(0,y) = \varphi_0(y), \quad \bar{u}_2(l,y) = \varphi_l(y), \quad \bar{u}_2(x,h) = \bar{u}_2(x,-\alpha) = 0. \tag{28}$$

Имеет место

Утверждение 2. *Пусть $\rho_1, \rho_2, \alpha, h$ удовлетворяют условиям $\rho_1 \neq k_1^2$, $\sqrt{\alpha} \neq [l\mu_{\rho_2-1,m}]/2\pi n$. Тогда задача (1), (28) разрешима и притом единственным образом.*

$\triangleleft$ Согласно методу Фурье ищем частные решения уравнения (1) в виде

$$\bar{u}_2(x,y) = X(x)Y(y). \tag{29}$$

Подставляя (29) в (1), получим уравнения (15), (19) относительно $Y(y)$, общие решения которых задаются формулами

$$Y_n(y) = C_{1n}\cos\sqrt{\rho_1 + k_1^2}y + C_{2n}\sin\sqrt{\rho_1 + k_1^2}y, \ y > 0, \tag{30}$$

$$Y_m(y) = (2\sqrt{-y})^{1-\rho_2}[C_{1m}J_{1-\rho_2}(2\sqrt{-my}) + C_{2m}J_{\rho_2-1}(2\sqrt{-my})],\ y<0, \tag{31}$$

где C_{jn}, C_{jm} $(j=1,2)$ — произвольные постоянные.

Функции $Y_n(y), Y_m(y)$ вдоль прямой $y=0$ должны удовлетворять условиям склеивания (6), (7) и однородным граничным условиям

$$C_{1n}\cos\sqrt{\rho_1+k_1^2}h + C_{2n}\sin\sqrt{\rho_1+k_1^2}h = 0, \tag{32}$$

$$(2\sqrt{\alpha})^{1-\rho_2}[C_{1m}J_{1-\rho_2}(2\sqrt{m\alpha}) + C_{2m}J_{\rho-1}(2\sqrt{m\alpha})] = 0. \tag{33}$$

Удовлетворив (30), (31) условиям (6), (7) получим соотношения, из которых непосредственно следует, что $C_{1n} = C_{1m} = 0$. Учитывая это обстоятельство, из (32) и (33) получаем равенства $C_{2n}\sin\sqrt{\rho_1+k_1^2}h = 0$, $C_{2m}J_{\rho_2-1}(2\sqrt{m\alpha}) = 0$. Выберем параметры k_1, m таким образом, чтобы $\sin\sqrt{\rho_1+k_1^2}h = 0$, $J_{\rho_2-1}(2\sqrt{m\alpha}) = 0$. Тогда собственные значения будут определяться равенством $k_{1n}^2 = (n\pi/h)^2 - \rho_1$, $\chi_n = [\mu^2_{\rho_2-1}, n]/4\alpha$. Подстановка этих значений в уравнение $X'' \mp k_1^2X = 0$ приводит нас к соотношениям

$$X_n^-(x) = C_{3n}\operatorname{ch}k_{1n}x + C_{4n}\operatorname{sh}k_{1n}x,$$

$$X_n^+(x) = C_{5n}\cos\chi_n x + C_{6n}\sin\chi_n x,$$

где C_{jn} $(j=\overline{3,6})$ — произвольные постоянные.

Таким образом, мы можем получить решение задачи (1), (28) в виде формальных функциональных рядов в Ω_1 и Ω_2

$$U_1(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}(C_{7n}\operatorname{ch}k_{21n}x + C_{8n}\operatorname{sh}k_{1n}x)\sin\frac{n\pi}{h}y, \tag{34}$$

$$U_2(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{-y})^{1-\rho_2}J_{\rho_2-1}\left(\mu_{\rho_2-1,n}\sqrt{-\frac{y}{\alpha}}\right)(C_{9n}\cos\chi_n x + C_{10n}\sin\chi_n x), \tag{35}$$

где C_{jn} $(j=\overline{7,10})$ — произвольные постоянные.

Предположения, сделанные относительно граничных функций $\varphi_0(y)$ и $\varphi_l(y)$ при $y<0$, позволяют представить их в виде рядов Фурье — Бесселя при помощи системы взвешенных бесселевых функций [1].

Определим теперь произвольные постоянные C_{jn} $(j=\overline{7,10})$, входящие в (34), (35). Для этого представим граничные функции $\varphi_0(y)$, $\varphi_l(y)$ при $y<0$ в виде рядов Фурье — Бесселя по функциям

$$(\sqrt{-y})^{1-\rho_2}J_{\rho_2-1}\left(\mu_{\rho_2-1,n}\sqrt{-\frac{y}{\alpha}}\right).$$

Будем иметь

$$\varphi_0(y) = \sum_{n=1}^{\infty}\varphi_{0n}(\sqrt{-y})^{1-\rho_2}J_{\rho_2-1}\left(\mu_{\rho_2-1,n}\sqrt{-\frac{y}{\alpha}}\right),$$

$$\varphi_l(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{ln} (\sqrt{-y})^{1-\rho_2} J_{\rho_2-1}\left(\mu_{\rho_2-1,n}\sqrt{-\frac{y}{\alpha}}\right),$$

где коэффициенты Фурье — Бесселя вычисляются по известным формулам [2, 3]

$$\varphi_{0n} = \frac{1}{\alpha J^2_{\rho_2}(\mu_{\rho_2-1,n})} \int\limits_0^{-\alpha} \varphi_0(y)\left(\sqrt{-y}\right)^{\rho_2-1} J_{\rho_2-1}\left(\mu_{\rho_2-1,n}\sqrt{-\frac{y}{\alpha}}\right) dy, \tag{36}$$

$$\varphi_{ln} = \frac{1}{\alpha J^2_{\rho_2}(\mu_{\rho_2-1,n})} \int\limits_l^{-\alpha} \varphi_l(y)\left(\sqrt{-y}\right)^{\rho_2-1} J_{\rho_2-1}\left(\mu_{\rho_2-1,n}\sqrt{-\frac{y}{\alpha}}\right) dy. \tag{37}$$

Удовлетворяя (34), (35) неоднородным граничным условиям (28), получим

$$\overline{u}_2(x,y) = \begin{cases} U_1(x,y) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\varphi'_{0n}\operatorname{ch} k_{1n}x + \overline{\varphi}'_{ln}\operatorname{sh} k_{1n}x\right)\sin\frac{n\pi}{h}y, \\ U_2(x,y) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{-y}\right)^{1-\rho_2} J_{\rho_2-1}\left(\mu_{\rho_2-1,n}\sqrt{-\frac{y}{\alpha}}\right)(\varphi_{0n}\cos\chi_n x + \overline{\varphi}_{ln}\sin k_{1n}x), \end{cases}$$

$$\overline{\varphi}'_{ln} = \frac{\varphi'_{ln} - \overline{\varphi}'_{0n}\operatorname{ch} k_{1n}l}{\operatorname{sh} k_{1n}l}, \quad \varphi'_{0n} = \frac{2}{h}\int\limits_0^h \varphi_0(y)\sin\frac{n\pi}{h}y\,dy,$$

$$\varphi'_{ln} = \frac{2}{h}\int\limits_0^h \varphi_l(y)\sin\frac{n\pi}{h}y\,dy, \quad \overline{\varphi}_{ln} = \frac{\varphi'_{ln} - \varphi_{0n}\cos\chi_n l}{\sin\chi_n l},$$

$\varphi_{0n}, \varphi_{ln}$ определяются формулами (36), (37) соответственно. $\triangleright$

Полученное формальное решение $u(x,y) = \bar{u}_1(x,y) + \bar{u}_2(x,y)$ задачи (1)–(7) при наших предположениях относительно граничных функций $\psi_{-\alpha}(x), \psi_h(x), \varphi_0(y), \varphi_l(y)$ является регулярным. Справедливость этого факта при $y > 0$ устанавливается с помощью общей теории рядов Фурье [2], а при $y < 0$ опираясь на результаты, полученные в [4].

Пусть теперь $\rho_1 = \rho_3 = 0, f_0 = 0, \rho_2 = -2\nu, \nu > 0, \overline{m} = 0$.

Решение задачи (1)–(7) снова будем искать в виде суммы двух функций $u(x,y) = u_1(x,y) + u_2(x,y)$, где в свою очередь функция $u_1(x,y)$ ищется в виде суммы $u_1(x,y) = V_1(x,y) + U_1(x,y)$, причем $V_1(x,y)$ является решением уравнения (8) и удовлетворяет граничным условиям

$$R_1V_1(0,y) = R_2V_1(l,y) = 0, \tag{38}$$

$$R_3V_1(x,h) = \psi_h(x), \tag{39}$$

а $U_1(x,y)$ — решение уравнения (8′), удовлетворяющее граничным условиям

$$R_1U_1(0,y) = \varphi_0(y), \quad R_2U_1(l,y) = \varphi_l(y), \tag{40}$$

$$R_3U_1(x,h) = 0. \tag{41}$$

Функция $u_2(x,y)$ ищется в виде суммы $u_2(x,y) = V_2(x,y) + U_2(x,y)$, где $V_2(x,y)$ — решение уравнения

$$V_{2xx} - V_{2yy} - 2\nu V_{2y} = 0, \tag{42}$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$R_1V_2(0,y) = 0, \quad R_2V_2(l,y) = 0, \quad V_2(x,-\alpha) = \psi_{-\alpha}(x), \tag{43}$$

а $U_2(x,y)$ — решение уравнения

$$U_{2xx} - U_{2yy} - 2\nu U_{2y} = 0, \tag{43$'$}$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$R_1U_2(0,y) = \varphi_0(y), \quad R_2U_2(l,y) = \varphi_l(y), \tag{44}$$

$$U_2(x,-\alpha) = 0. \tag{45}$$

Положим $V_1(x,y) = X(x)Y(y)$. Тогда из уравнения (8) и граничных условий (38) относительно $X(x)$ будем иметь задачу Штурма — Лиувилля

$$X'' + \lambda X = 0, \quad \alpha_1X'(0) - \beta_1X(0) = 0, \quad \alpha_2X'(l) + \beta_2X(l) = 0, \tag{46}$$

а относительно $Y(y)$ получаем уравнение

$$Y'' - \lambda Y = 0. \tag{47}$$

Собственные функции задачи (46) имеют вид

$$X_n(x) = a_n\sin\sqrt{\lambda_n}x + b_n\cos\sqrt{\lambda_n}x,$$

где

$$a_n = \beta_1\Big/\sqrt{\lambda_n\alpha_1^2 + \beta_1^2}, \quad b_n = \left(\alpha_1\sqrt{\lambda_n}\right)\Big/\sqrt{\lambda_n\alpha_1^2 + \beta_1^2},$$

а λ_n — корни уравнения $(\alpha_1\alpha_2\lambda - \beta_1\beta_2)\mathrm{tg}\sqrt{\lambda}l = \sqrt{\lambda}(\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2)$, причем

$$\|X_n(x)\|^2 = \int\limits_0^l X_n^2(x)\,dx = \frac{l}{2} + \frac{(\beta_1\alpha_2 + \beta_2\alpha_1)(\lambda_n\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2)}{2(\lambda_n\alpha_1^2 + \beta_1^2)(\lambda_n\alpha_2^2 + \beta_2^2)}.$$

При $\lambda = \lambda_n$ общее решение уравнения (47) запишем в виде

$$Y(y) = Y_n(y) = c_{1n}\,\mathrm{sh}\,\sqrt{\lambda_n}y + c_{2n}\,\mathrm{sh}(h-y). \tag{48}$$

Тогда

$$V_1(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(c_{1n}\,\mathrm{sh}\,\sqrt{\lambda_n}y + c_{2n}\,\mathrm{sh}\,\sqrt{\lambda_n}(h-y)\right)X_n(x). \tag{49}$$

Решение задачи (8′), (40) будем искать в виде суммы $U_1(x,y) = \nu(x,y) + w(x,y)$, где функция $w(x,y)$ подбирается так, чтобы она удовлетворяла только граничным условиям (40). Ищем $w(x,y)$ в виде $w = k_1 + k_2 x$ и подбираем константы k_1 и k_2 так, чтобы выполнялись условия (40). Это дает систему двух алгебраических уравнений, решая которую находим k_i. Окончательно получаем

$$w(x,y) = \big\{(\alpha_2 + \beta_2(l-x))\varphi_0(y) - (\alpha_1 + \beta_1 x)\varphi_l(y)\big\}/\Delta,$$

где

$$\Delta = -(\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 l).$$

Подставляя $U_1(x,y)$ в уравнение (8) и краевые условия (40), (41), получим условия для определения $\nu(x,y)$:

$$\nu_{xx} + \nu_{yy} = 0, \tag{50}$$

$$R_1\nu(0,y) = 0, \quad R_2\nu(l,y) = 0, \tag{51}$$

$$R_3\nu(x,h) = \tilde{\psi}_h(x), \tag{52}$$

где

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}_h(x) = -\,\frac{1}{\Delta\alpha_3}\big\{&\alpha_3[(\alpha_2 + \beta_2(1-x))\varphi_0'(h) - (\alpha_1 + \beta_1 x)\varphi_l'(h)]\\ &+ \beta_3[(\alpha_2 + \beta_2(l-x))\varphi_0(h) - (\alpha_1 + \beta_1 x)\varphi_l(h)]\big\}.\end{aligned}$$

Решение задачи (50)–(52) будем искать в виде

$$\nu(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_n X_n\big(\operatorname{ch}\sqrt{\lambda_n}y + \gamma_n \operatorname{sh}\sqrt{\lambda_n}y\big), \quad \gamma_n = \beta_3/(\alpha_3\sqrt{\lambda_n}). \tag{53}$$

Здесь $X_n(x)$ — собственные функции, а λ_n — собственные значения краевой задачи (40).

Удовлетворяя (53) краевому условию (52), получим

$$\tilde{\phi}_h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_n \left\{2\frac{\beta_3}{\alpha_3}\operatorname{ch}\sqrt{\lambda_n}h + \left(\frac{\beta_3}{\alpha_3}\gamma_n + \sqrt{\lambda_n}\right)\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_n}h\right\} X_n(x).$$

Следовательно,

$$\chi_n = \left\{\int_0^n \tilde{\psi}_h(\xi)X_n(\xi)\,d\xi\right\}\Big/\left\{2\frac{\beta_3}{\alpha_3}\operatorname{ch}\sqrt{\lambda_n}h + \left(\frac{\beta_3}{\alpha_3}\gamma_n + \sqrt{\lambda_n}\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_n}h\right)\right\}\int_0^h X_n^2(\xi)\,d\xi.$$

Таким образом, решение задачи (8)–(40), (41) имеет вид

$$\begin{aligned}U_1(x,y) = &\sum_{n=1}^{\infty} \chi_n\big(\operatorname{ch}\sqrt{\lambda_n}y + \gamma_n \operatorname{sh}\sqrt{\lambda_n}y\big)X_n(x)\\ &+ \big[(\alpha_2 + \beta_2(l-x))\varphi_0(y) - (\alpha_1 + \beta_1 x)\varphi_l(y)\big]/\Delta.\end{aligned} \tag{54}$$

Собственные функции $X_n(x)$ и собственные значения λ_n задачи (42), (43) снова определяются из краевой задачи (40).

Для определения $Y_n(y)$ получим дифференциальное уравнение

$$Y_n''(y) + 2\nu Y_n'(y) + \lambda_n Y_n(y) = 0. \tag{55}$$

Общее решение уравнения (55) имеет вид [5]

$$Y_n(y) = \big(c_{3n} \operatorname{ch} w_n y + c_{4n} \operatorname{sh} w_n y\big) e^{-\nu y}, \quad w_n = \sqrt{\nu^2 - \lambda_n}, \quad \nu^2 > \lambda_n, \tag{56}$$

$$Y_n(y) = \big(c_{3n} \cos w_n y + c_{4n} \sin w_n y\big) e^{-\nu y}, \quad w_n = \sqrt{\lambda_n - \nu^2}, \quad \nu^2 < \lambda_n, \tag{57}$$

$$Y_n(y) = \big(c_{3n} + c_{4n} y\big) e^{-\nu y}, \quad \nu^2 = \lambda_n. \tag{58}$$

Решение краевой задачи (42)–(43) имеет вид

$$V_2(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{Y}_n(y) X_n(x), \tag{59}$$

где $\widetilde{Y}_n(y)$ соответствует одному из представлений (56)–(58).

Решение задачи (43′)–(45) имеет такой же вид, что и $U_1(x,y)$, только h и $-\alpha$ нужно поменять ролями. Следовательно, в этом случае мы имеем решение в виде

$$\begin{aligned} U_2(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\chi}_n \big(\operatorname{ch} \sqrt{\lambda_n} y + \gamma_n \operatorname{sh} \sqrt{\lambda_n} y\big) X_n(x) \\ + \big[(\alpha_2 + \beta_2(l-x))\varphi_0(y) - (\alpha_1 + \beta_1 x)\varphi_l(y)\big]/\Delta, \end{aligned} \tag{60}$$

где

$$\overline{\chi}_n = \frac{\int_0^{-\alpha} \tilde{\psi}_{-\alpha}(\xi) X_n(\xi)\, d\xi}{2\frac{\beta_3}{\alpha_3} \operatorname{ch} \sqrt{\lambda_n}\alpha - \Big(\frac{\beta_3}{\alpha_3}\gamma_n + \sqrt{\lambda_n} \operatorname{sh} \sqrt{\lambda_n}\alpha\Big)} \int\limits_0^{-\alpha} X_n^2(\xi)\, d\xi,$$

$$\tilde{\psi}_{-\alpha}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\chi}_n \left\{ 2\frac{\beta_3}{\alpha_3} \operatorname{ch} \sqrt{\lambda_n}\alpha - \left(\frac{\beta_3}{\alpha_3}\gamma_n + \sqrt{\lambda_n}\right) \operatorname{sh} \sqrt{\lambda_n}\alpha \right\} X_n(x).$$

Удовлетворяя $u(x,y) = u_1(x,y) + u_2(x,y)$ граничным условиям (21) и условиям сопряжения $u^+(x,0) = u^-(x,0)$, $u_y^+(x,0) = u_y^-(x,0)$, получим систему линейных алгебраических уравнений относительно c_{in}, $i = \overline{1,4}$, которая однозначно разрешима, если определитель этой системы

$$\begin{aligned} \Delta = \operatorname{sh} \sqrt{\lambda_n} h \big(\nu \cdot \operatorname{sh} \sqrt{\lambda_n} h \cdot \operatorname{sh} \omega_n \alpha - \sqrt{\lambda_n} \cdot \operatorname{ch} \sqrt{\lambda_n} h \cdot \operatorname{sh} \omega_n \alpha \\ - \omega_n \cdot \operatorname{ch} \omega_n \alpha \cdot \operatorname{sh} \sqrt{\lambda_n} h\big) \neq 0. \end{aligned}$$

В силу условий, наложенных на заданные функции $\varphi_0(y), \varphi_l(y), \psi_h(x), \psi_{-\alpha}(x)$, можем заключить, что функция $u(x,y) = u_1(x,y) + u_2(x,y)$ и ее частные производные до второго порядка включительно непрерывны в областях Ω_1 и Ω_2, что означает равномерную сходимость как $u_1(x,y)$ и $u_2(x,y)$, так и рядов полученных от них путем дифференцирования до второго порядка.

Задача (A) при $f_0 \neq 0$, $\rho_2 \neq 0$, $\rho_3 \neq 0$, $m \neq 0$ решается аналогично предыдущему случаю.

Литература

1. *Лебедев Н. Н.* Специальные функции и их приложения.—М.: Наука, 1953.—379 с.
2. *Толстов Г. П.* Ряды Фурье.—М.-Л.: Наука, 1951.—396 с.
3. *Сохадзе Р. И.* Первая краевая задача для уравнения смешанного типа с весовыми условиями склеивания вдоль линии параболического вырождения // Дифференц. уравнения.—1981.—Т. 17, № 1.—С. 150–156.
4. *Сохадзе Р. И.* О первой краевой задаче для уравнения смешанного типа в прямоугольнике // Дифференц. уравнения.—1983.—Т. 19, № 1.—С. 127–133.
5. *Будак Б. М., Самарский А. А., Тихонов А. Н.* Сборник задач по математической физике.—М.: Наука, 1956.—683 с.

г. Нальчик *Статья поступила 18 апреля 2002 г.*