Владикавказский математический журнал
Июль–сентябрь, 2002, Том 4, Выпуск 3

УДК **517.98**

О ТЕОРЕМАХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ А. Д. АЛЕКСАНДРОВА И А. А. МАРКОВА ДЛЯ МАЖОРИРУЕМЫХ ОПЕРАТОРОВ

А. Г. Кусраев, С. А. Малюгин

Для мажорируемых операторов, действующих из решетки ограниченных непрерывных функций в решеточно нормированное пространство, установлены две теоремы об интегральном представлении, обобщающие результаты А. Д. Александрова и А. А. Маркова. Доказан также вариант теоремы С. Улама о радоновости любой борелевской меры на польском пространстве.

§ 1. Введение

Рассмотрим произвольный компакт Q, понимаемый в данной работе как хаусдорфово компактное топологическое пространство. Пусть $C(Q)$ — пространство всех непрерывных действительных функций, определенных на Q и $\mathrm{rca}(Q)$ — пространство всех ограниченных регулярных счетно аддитивных мер, определенных на борелевской σ-алгебре Q. Напомним, что регулярность меры означает возможность приближения произвольных значений меры ее значениями на замкнутых множествах. Как известно, $C(Q)$ — векторная решетка, а $\mathrm{rca}(Q)$ — порядково полная векторная решетка (относительно поточечного упорядочения). Более того, если снабдить $C(Q)$ sup-нормой, а норму в $\mathrm{rca}(Q)$ определить формулой $\|\mu\| := |\mu|(Q)$, где $|\mu|$ — вариация (или, что то же, модуль) меры $\mu \in \mathrm{rca}(Q)$, то эти пространства становятся банаховыми решетками, см. [8].

1.1. *Теорема Рисса — Маркова — Какутани.* *Для любого линейного непрерывного функционала $f \in C(Q)'$ существует единственная ограниченная счетно аддитивная регулярная борелевская мера $\mu_f := \mu \in \mathrm{rca}(Q)$ такая, что*

$$f(x) = \int\limits_Q x(q)\,d\mu(q) \quad (x \in C(Q)).$$

Соответствие $f \leftrightarrow \mu_f$ служит линейной изометрией и решеточным изоморфизмом банаховых решеток $C(Q)'$ и $\mathrm{rca}(Q)$.

$\triangleleft$ Доказательство см., например, в книгах Н. Данфорда и Дж. Шварца [7], П. Халмоша [16], А. Цаанена [52]. $\triangleright$

Считается, что первое корректное доказательство этой теоремы для случая $Q = [0, 1]$ дал Ф. Рисс в 1909 году, причем он, в отличие от приведенной формулировки, использовал интеграл Римана — Стилтьеса вместо интеграла Лебега. В случае произвольного компакта Q для положительных функционалов утверждение 1.1 содержится по существу в работе А. А. Маркова [15] 1938 года, хотя явной формулировки не приводится. Почти в указанном виде теорема 1.1 установлена С. Какутани [26] в 1941 году. Однако следует подчеркнуть, что современная форма теоремы 1.1, а также различные ее варианты, называемые часто теоремами Рисса о представлении, — дело рук гораздо большего числа математиков (Ж. Адамар, А. Д. Александров, С. Банах, И. Радон, С. Сакс, М. Фреше, Э. Хелли, и др.). Раннюю историю теоремы Рисса о представлении см. в статье Дж. Д. Грея [25], а различные аспекты, обобщения и приложения — в обзорах Дж. Батта [18] и Р. Ф. Вилера [45]. Краткий исторический комментарий по этому вопросу имеется и в книгах Н. Динкуляну [22], Дж. Дистеля и Дж. Уля [21], З. Семадени [44], Р. Эдвардса [17].

Для некомпактного пространства Q вместо $C(Q)$ рассматривают пространство ограниченных непрерывных функций на Q, снабженное sup-нормой и обозначаемое символом $C_b(Q)$. Первое описание элементов пространства $C_b(Q)'$ принадлежит А. А. Маркову [15], который привлек для этой цели конечно аддитивные регулярные меры (внешние плотности), поскольку для некомпактного Q множества $\mathrm{rca}(Q)$ оказалось недостаточным для представления линейных ограниченных функционалов на $C_b(Q)$. Затем А. Д. Александров [1–3] развил теорию конечно аддитивных регулярных мер (зарядов) и, в частности, дал полное описание пространства $C_b(Q)'$. Пусть $\mathcal{A}(Q)$ обозначает алгебру множеств, порожденную совокупностью всех открытых множеств в Q, а $\mathrm{ra}(\mathcal{A}(Q))$ — множество всех ограниченных конечно аддитивных регулярных мер, определенных на алгебре $\mathcal{A}(Q)$.

1.2. *Теорема Александрова — Маркова.* *Пусть Q — нормальное топологическое пространство. Для любого линейного непрерывного функционала $f \in C_b(Q)'$ существует и притом единственная ограниченная конечно аддитивная регулярная мера $\mu_f := \mu \in \mathrm{ra}(\mathcal{A}(Q))$ такая, что*

$$f(x) = \int_Q x(q)\, d\mu(q) \quad (x \in C(Q)).$$

Соответствие $f \leftrightarrow \mu_f$ служит линейной изометрией и решеточным изоморфизмом банаховых решеток $C_b(Q)'$ и $\mathrm{ra}(\mathcal{A}(Q))$.

$\lhd$ Доказательство для положительных функционалов, принимающих единичное значение на тождественной единице (средних значений на Q), получено А. А. Марковым [15; теорема 22]. Общий случай содержится в результатах А. Д. Александрова [2; теоремы 1 и 2]. $\rhd$

1.3. *Теорема Александрова.* *Для произвольного топологического пространства Q имеет место «бэровский» вариант теоремы 1.2, т. е. теорема 1.2 остается в силе, если заменить алгебру $\mathcal{A}(Q)$ на алгебру $\mathcal{A}_0(Q)$, порожденную всеми функционально открытыми множествами в Q.*

$\lhd$ А. Д. Александров [1–3] использовал пространства, несколько более общие, чем топологические. В частности, в качестве совокупности всех открытых множеств можно рассматривать функционально открытые множества, для которых аксиома нормальности выполняется автоматически. Тем самым, требуемое является частным случаем [2; теоремы 1 и 2]. $\rhd$

Теорему представления Рисса для положительного оператора со значениями в K-пространстве впервые получил, по-видимому, Р. Р. Кристиан [20], а затем повторил

Е. Берц [19]. Варианты этих результатов получены также в работах З. Липецкого [33, 36]. Все упомянутые работы содержатся в круге идей А. А. Маркова и А. Д. Александрова и, по существу, адаптируют рассуждения, известные для скалярного случая. Принципиально новые идеи появились в связи с работами М. Райта [46–51]. М. Райт обнаружил, в частности, что задача продолжения меры со значениями в K-пространстве не разрешима методом Каратеодори, в связи с чем он ввел понятие квазирегулярной меры. Другой подход к задаче продолжения меры нашел С. Хурана [27, 28]. Разные аспекты этого же круга проблем изучали А. Г. Кусраев и С. А. Малюгин [10, 11], Т. В. Панчепагесан и Ш. В. Паллед [37, 38], Д. Фремлин [23], Б. Ричан [40, 41] и др.

Цель настоящей работы — доказать теоремы А. Д. Александрова и А. А. Маркова (теоремы 1.2 и 1.3) для операторов, действующих в решеточно нормированные пространства. Будем придерживаться терминологии и обозначений из монографий [5, 8, 9, 31].

§ 2. Вспомогательные сведения

Напомним некоторые понятия и факты из теории векторных мер и теории решеточно нормированных пространств. Подробности можно найти в [10] и [31].

2.1. Пусть $\mathcal{A}$ — произвольная булева алгебра. Отображение μ, определенное на $\mathcal{A}$ и действующее в произвольное векторное пространство Z, называют (*конечно аддитивной векторной*) *мерой,* если $\mu(a_1 \vee a_2) = \mu(a_1) + \mu(a_2)$ для любой пары дизъюнктных элементов $a_1, a_2 \in \mathcal{A}$. Пусть $Z = F$ — векторная решетка. Меру $\mu : \mathcal{A} \to F$ называют *ограниченной,* если $\mu(\mathcal{A})$ — порядково ограниченное множество в F. Если же $\mu(a) \geqslant 0$ для всех $a \in \mathcal{A}$, то μ именуют *положительной.* Обозначим символом $\mathrm{ba}(\mathcal{A}, F)$ $\big(\mathrm{ba}_+(\mathcal{A}, F)\big)$ пространство всех ограниченных (положительных) векторных мер, определенных на $\mathcal{A}$ и действующих в F. Ясно, что пространство $\mathrm{ba}(\mathcal{A}, F)$ с операциями, индуцированными из $F^{\mathcal{A}}$, и упорядоченное конусом положительных мер $\mathrm{ba}_+(\mathcal{A}, F)$, будет упорядоченным векторным пространством.

Предположим, что Y — решеточно-нормированное пространство над векторной решеткой F и возьмем векторную меру $\mu : \mathcal{A} \to Y$. Если для некоторой положительной меры $\nu : \mathcal{A} \to F$ выполняется соотношение $\lvert\mu(a)\rvert \leqslant \nu(a)$ $(a \in \mathcal{A})$, то μ назовем *мажорируемой векторной мерой,* а меру ν — *мажорантой* меры μ. Обозначим символом $\mathrm{da}(\mathcal{A}, Y)$ векторное пространство всех мажорируемых векторных мер, определенных на $\mathcal{A}$ и действующих в Y. Если существует наименьший элемент в множестве $\mathrm{maj}(\mu)$ всех мажорант меры μ (относительно порядка, индуцированного из $\mathrm{ba}(\mathcal{A}, F)$), то его называют *точной мажорантой* или, реже, *точной доминантой* меры μ и обозначают символом $\lvert\mu\rvert$. Мажорируемую меру принято называть также *мерой ограниченной векторной вариации,* а точную мажоранту $\lvert\mu\rvert$ — векторной вариацией меры μ.

Пусть $\mathrm{dca}(\mathcal{A}, Y)$ — пространство всех счетно аддитивных мер, действующих из $\mathcal{A}$ в Y. Счетная аддитивность $\mu \in \mathrm{da}(\mathcal{A}, Y)$ означает, как обычно, что для последовательности попарно дизъюнктных элементов $(a_n) \subset \mathcal{A}$ выполняется

$$\mu\left(\bigvee_{k=1}^{\infty}\right) = bo\text{-}\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu(a_k).$$

Пусть (Y, F) — решеточно нормированное пространство над K-пространством F. Каждая мажорируемая векторная мера $\mu \in \mathrm{da}(\mathcal{A}, Y)$ имеет точную мажоранту $\lvert\mu\rvert$, *которую можно вычислить по формуле:*

$$|\mu|(a) = \sup\Big\{\sum_{k=1}^{n} \big|\mu(a_k)\big| : a_1, \dots, a_n \in \mathcal{A}, \quad a_k \wedge a_l = 0\,(k \neq l),\ \bigvee_{k=1}^{n} a_k = a\Big\}.$$

◁ См. [31; 4.2.9 (1)]. ▷

2.2. Пусть E и F — векторные решетки, X и Y — решеточно нормированные пространства над E и F соответственно. Возьмем линейный оператор $T : X \to Y$ и положительный оператор $S : E \to F$. Если выполнено соотношение

$$|Tx| \leqslant S\big(|x|\big) \quad (x \in X),$$

то будем говорить, что S *мажорирует* T или, что S является *мажорантой* оператора T. В этой ситуации оператор T называют *мажорируемым.* Пусть $\mathrm{maj}(T)$ обозначает множество всех мажорант оператора T. Множество всех мажорируемых операторов из X в Y обозначается символом $M(X, Y)$, следовательно,

$$T \in M(X, Y) \iff \mathrm{maj}(T) \neq \varnothing.$$

Если в множестве $\mathrm{maj}(T)$ имеется наименьший элемент относительно порядка, индуцированного из $L^{\sim}(E, F)$, то его называют *точной мажорантой* или *наименьшей мажорантой* T и обозначают символом $|T|$. Точную мажоранту называют еще *мажорантной нормой.* Если мажорируемый оператор $T : X \to Y$ имеет точную мажоранту $|T|$, то

$$|Tx| \leqslant |T|\big(|x|\big) \quad (x \in X).$$

(1) *Всякий мажорируемый оператор $T \in M(X, Y)$ br-непрерывен, т. е. если последовательность $(x_n) \subset X$ br-сходится к $x \in X$, то последовательность (Tx_n) br-сходится к Tx в Y. Мажорируемый оператор $T_0 \in M(X_0, Y)$, заданный на br-плотном подпространстве $X_0 \subset X$ допускает единственное продолжение до мажорируемого оператора $T_0 \in M(X_0, Y)$ с сохранением мажоранты.*

◁ См. [31; 4.1.1]. ▷

(2) *Если решеточно нормированное пространство X разложимо, а векторная решетка F порядково полна, то каждый мажорируемый оператор $T : X \to Y$ имеет точную мажоранту $|T|$. При этом имеют место формулы*

$$|T|\,e = \sup\left\{\sum_{k=1}^{n} |Tx_k| : x_1, \dots, x_n \in X, \quad \sum_{k=1}^{n} |x_k| = e,\ n \in \mathbb{N}\right\} \quad (e \in E_{0+}),$$

$$|T|\,e = \sup\{|T|\,e_0 : e_0 \in E_{0+},\ e_0 \leqslant e\} \quad (e \in E_+),$$

$$|T|\,e = |T|\,e^+ - |T|\,e^- \quad (e \in E).$$

◁ См. [31; 4.1.2, 4.1.5]. ▷

2.3. Пусть G — расширенное K_σ-пространство с порядковой единицей $\mathbf{1}$, а (Y,F) — секвенциально bo-полное решеточно нормированное пространство над K-пространством F. Рассмотрим подалгебру $\mathcal{A}$ σ-полной булевой алгебры $\mathfrak{E}(\mathbf{1})$ единичных элементов пространства G и конечно аддитивную меру $\mu : \mathcal{A} \to Y$ с точной можорантой $|\!|\mu|\!| : \mathcal{A} \to F$. Обозначим символом $S(\mathcal{A})$ векторную подрешетку в G, состоящую из всех $\mathcal{A}$-простых (конечнозначных) элементов G, т. е. $x \in S(\mathcal{A})$ означает, что имеет место представление $x = \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k$, где $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ произвольны, а $e_1, \dots, e_n \in \mathcal{A}$ попарно дизъюнктны. Положим

$$I_\mu(x) := \int x\, d\mu := \sum_{k=1}^n \alpha_k \mu(e_k) \quad \bigl(x \in S(\mathcal{A})\bigr).$$

Ясно, что эта формула корректно определяет мажорируемый оператор $I_\mu : S(\mathcal{A}) \to Y$, причем

$$\left|\!\left| \int x\, d\mu \right|\!\right| \leqslant \int |x|\, d\,|\!|\mu|\!| \quad \bigl(x \in S(\mathcal{A})\bigr).$$

Рассмотрим главный идеал $G(\mathbf{1})$, порожденный единицей $\mathbf{1}$, и введем в нем норму $\|x\| := \inf\{\lambda : |x| \leqslant \lambda \mathbf{1}\}$. Тогда $G(\mathbf{1})$ — AM-пространство. Пусть $C(\mathcal{A})$ — замыкание $S(\mathcal{A})$ в AM-пространстве $G(\mathbf{1})$. Оператор I_μ допускает единственное мажорируемое продолжение на $C(\mathcal{A})$, которое обозначим тем же символом. При этом $|\!|I_\mu|\!| = I_{|\!|\mu|\!|}$.

Для каждого мажорируемого оператора $T : C(\mathcal{A}) \to Y$ существует единственная мажорируемая мера $\mu := \mu_T : \mathcal{A} \to Y$ такая, что

$$Tx = \int x\, d\mu \quad \bigl(x \in C(\mathcal{A})\bigr).$$

Соответствие $T \mapsto \mu_T$ осуществляет линейную изометрию решеточно нормированных пространств $M(C(\mathcal{A}), Y)$ и $\mathrm{da}(\mathcal{A}, Y)$.

$\lhd$ См. [31; 6.1.1]. $\rhd$

2.4. Ниже будем рассматривать также тот частный случай ситуации 2.3, когда в качестве расширенного K-пространства G фигурирует векторная решетка $\mathbb{R}^Q$ всех вещественных функций, определенных на непустом множестве Q. Пусть $\mathcal{A}$ — алгебра подмножеств множества Q, т. е. $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(Q)$. Эту алгебру можно отождествить с изоморфной алгеброй характеристических функций $\{1_A := \chi_A : A \in \mathcal{A}\}$, так что $S(\mathcal{A})$ — пространство всех $\mathcal{A}$-простых функций на Q. Если $f = \sum_{k=1}^n \alpha_k \chi_{A_k}$ $(A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A})$ и $\mu \in \mathrm{da}(\mathcal{A}, Y)$, то по определению

$$I_\mu(f) := \int f\, d\mu = \sum_{k=1}^n \alpha_k \mu(A_k).$$

Интеграл I_μ можно продолжить на пространство μ-суммируемых функций, см. [10, 31].

Зафиксируем следующие обозначения: Q — топологическое пространство; $\mathcal{T} := \mathcal{T}_Q$, $\mathcal{F} := \mathcal{F}_Q$ и $\mathcal{K} := \mathcal{K}_Q$ — соответственно совокупности открытых, замкнутых и компактных подмножеств Q; $C_b(Q)$ — пространство всех ограниченных непрерывных функций на Q. Для семейства $\mathcal{D}$ подмножеств Q обозначим символом $\Sigma_0(\mathcal{D})$ (соответственно, $\Sigma(\mathcal{D})$) наименьшую подалгебру (соответственно, наименьшую σ-подалгебру) в $\mathcal{P}(Q)$, содержащую $\mathcal{D}$. В этом случае будем говорить, как обычно, что $\Sigma_0(\mathcal{D})$ *порождена* (а $\Sigma(\mathcal{D})$ *σ-порождена*) семейством $\mathcal{D}$.

(1) Пусть $C \in \mathcal{A}$. Рассмотрим семейства множеств $\mathcal{K}_C := \{K \in \mathcal{K} \cap \mathcal{A} : K \subset C\}$ и $\mathcal{F}_C := \{D \in \mathcal{F} \cap \mathcal{A} : D \subset C\}$, упорядоченные по включению. Меру $\mu : \mathcal{A} \to Y$ называют *радоновой* (или *квазирадоновой*), если для любого $C \in \mathcal{A}$ (соответственно, для каждого $C \in \mathcal{T} \cap \mathcal{A}$) выполняется $\mu(C) = bo\text{-}\lim\{\mu(K) : K \in \mathcal{K}_C\}$. Меру $\mu : \mathcal{A} \to Y$ называют *регулярной* (или *квазирегулярной*), если для любого $C \in \mathcal{A}$ (соответственно, для каждого $C \in \mathcal{T} \cap \mathcal{A}$) выполняется $\mu(C) = bo\text{-}\lim\{\mu(D) : D \in \mathcal{F}_C\}$.

Как видно, в случае компактного Q эти два определения равносильны.

(2) *Мера $\mu \in \mathrm{da}(\mathcal{A}, Y)$ будет радоновой (регулярной) в том и только в том случае, когда радонова (регулярна) ее векторная вариация $|\mu| \in \mathrm{ba}(\mathcal{A}, F)$.*

$\triangleleft$ См. [31; теорема 6.2.2.]. $\triangleright$

Аналогичный результат для свойства квазирадоновости (квазирегулярности) существенно сложнее и имеет место лишь при дополнительных требованиях.

(3) *Предположим, что мера $\mu \in \mathrm{da}(\mathcal{A}, Y)$ удовлетворяет одному из следующих условий:*

(a) *алгебра $\mathcal{A}$ порождается входящими в нее замкнутыми множествами, т. е. $\mathcal{A} = \Sigma_0(\mathcal{F} \cap \mathcal{A})$;*

(b) *μ счетно аддитивна и алгебра $\mathcal{A}$ σ-порождается входящими в нее замкнутыми множествами, т. е. $\mathcal{A} = \Sigma(\mathcal{F} \cap \mathcal{A})$.*

Тогда мера μ квазирадонова (квазирегулярна) в том и только в том случае, если ее векторная вариация $|\mu|$ квазирадонова (квазирегулярна).

$\triangleleft$ См. [10; теорема 2] и [31; теорема 6.2.3.]. $\triangleright$

§ 3. Формулировка основных результатов

Здесь дадим формулировки результатов о представлении мажорируемых операторов. Доказательства приводятся в следующем параграфе.

3.1. Пусть E — расширенное K-пространство с единицей $\mathbf{1}$, а L — подрешетка E, содержащая единицу и состоящая только из ограниченных элементов. Через $\mathfrak{E}(\mathbf{1})$ обозначается полная булева алгебра всех единичных элементов K-пространства E. В $\mathfrak{E}(\mathbf{1})$ выделяется подрешетка всех спектральных характеристик $\mathcal{T}_L^\circ = \{e_\lambda^x : \lambda \in \mathbb{R},\, x \in L\}$ и подрешетка $\mathcal{F}_L^\circ = \{\mathbf{1} - e_\lambda^x : \lambda \in \mathbb{R},\, x \in L\}$. Символом $\mathcal{T}_L$ (соответственно $\mathcal{F}_L$) обозначаем точные верхние (нижние) границы всевозможных подмножеств из $\mathcal{T}_L^\circ$ (из $\mathcal{F}_L^\circ$) и называем элементы из $\mathcal{T}_L$ открытыми, а из $\mathcal{F}_L$ — замкнутыми. Если $\mathcal{E}$ — семейство элементов из $\mathfrak{E}(\mathbf{1})$, то через $\Sigma_0(\mathcal{E})$ $(\Sigma(\mathcal{E}))$ обозначается наименьшая алгебра (σ-алгебра), порожденная $\mathcal{E}$. В дальнейшем всегда будем считать, что Y — это bo-полное решеточно нормированное пространство с нормирующим K-пространством F.

3.2. Векторную подрешетку $L \subseteq E$ называют *разделяющей*, если для любых $e_1 \in \mathcal{F}_L$ и $e_2 \in \mathcal{T}_L$, удовлетворяющих неравенству $e_1 \leqslant e_2$, существует элемент $x \in L$ такой, что $e_1 \leqslant x \leqslant e_2$. Укажем два примера разделяющих подрешеток.

(1) Пусть Q — нормальное топологическое пространство. Положим $E = \mathbb{R}^Q$ — пространство всех вещественных функций на Q, а $L = C_b(Q)$ — пространство всех ограниченных непрерывных функций на Q. Тогда L является разделяющей векторной подрешеткой в E.

(2) Пусть L является порядковым идеалом всех ограниченных элементов в расширенном K-пространстве E. Тогда $\mathcal{T}_L = \mathcal{F}_L = \mathfrak{E}(\mathbf{1})$ и L тривиальным образом является разделяющей решеткой.

Пусть $\mathcal{F} \subset \mathfrak{E}(\mathbf{1})$ и $\mathcal{A} := \Sigma(\mathcal{F})$. Меру $\mu : \mathcal{A} \to Y$ назовем *$\mathcal{F}$-регулярной*, если $\mu(a) = bo\text{-}\lim\{\mu(a') : a' \in \mathcal{F}, a' \leqslant a\}$. Следующий результат — вариант теоремы А. Д. Александрова для мажорируемых операторов.

3.3. Теорема. *Пусть $T : L \to Y$ — мажорируемый оператор, заданный на разделяющей подрешетке L K-пространства E. Тогда существует единственная конечно аддитивная $\mathcal{F}_L$-регулярная мера $\mu : \mathcal{A}(\mathcal{F}_L) \to Y$, имеющая ограниченную векторную вариацию, такая, что*

$$Tx = \int x\,d\mu \quad (x \in L).$$

Сопоставление $T \leftrightarrow \mu$ осуществляет линейную изометрию $M(L, Y)$ и пространства $\operatorname{dar}(\mathcal{A}(\mathcal{F}_L), Y)$ регулярных конечно аддитивных мажорируемых мер.

$\lhd$ Доказательство приводится ниже в 4.1–4.7. $\rhd$

Пусть $\mathcal{A}(Q)$ обозначает алгебру множеств, порожденную совокупностью открытых множеств топологического пространства Q.

3.4. Теорема. *Пусть Q — нормальное топологическое пространство, F — некоторое K-пространство, а $T : C_b(Q) \to F$ — положительный оператор. Тогда существует единственная положительная конечно аддитивная регулярная мера $\mu : \mathcal{A}(Q) \to F$ такая, что*

$$Tx = \int\limits_Q x(q)\,d\mu(q) \quad (x \in C_b(Q)).$$

Соответствие $T \leftrightarrow \mu_T$ служит линейным и порядковым изоморфизмом векторных решеток $L^\sim(C_b(Q), F)$ и $\operatorname{bra}(\mathcal{A}(Q), F)$.

$\lhd$ Согласно 3.2 $L := C_b(Q)$ — разделяющая подрешетка K-пространства $E = \mathbb{R}^Q$. Поэтому требуемое следует из теоремы 3.4. $\rhd$

3.5. Рассмотрим бэровский вариант теоремы 3.2. Для этого нужна соответствующая модификация понятия разделяющей подрешетки. Векторную подрешетку $L \subset E$ называем *σ-разделяющей*, если для любых $e_1 \in \mathcal{F}_L^\circ$, $e_2 \in \mathcal{T}_L^\circ$, удовлетворяющих неравенству $e_1 \leqslant e_2$, существует элемент $x \in L$ такой, что $e_1 \leqslant x \leqslant x_2$. Примером σ-разделяющей решетки является пространство $C_b(Q)$, где Q — произвольное топологическое пространство.

3.6. Теорема. *Пусть $T : L \to Y$ мажорируемый оператор, заданный на σ-разделяющей решетке L. Тогда существует единственная конечно аддитивная $\mathcal{F}_L^\circ$-регулярная мера $\mu : \mathcal{A}(\mathcal{F}_L^\circ) \to Y$, имеющая ограниченную вариацию, для которой справедливо интегральное представление из теоремы 3.2.*

$\lhd$ Доказательство аналогично 3.2. $\rhd$

Пусть $\mathcal{A}_0(\Omega)$ обозначает алгебру множеств, порожденную совокупностью функционально открытых множеств топологического пространства Ω.

3.7. Теорема. *Пусть Q — произвольное топологическое пространство, F — некоторое K-пространство, а $T : C_b(Q) \to F$ — порядково ограниченный оператор. Тогда существует единственная ограниченная конечно аддитивная регулярная мера $\mu := \mu_T : \mathcal{A}_0(Q) \to F$ такая, что*

$$Tx = \int\limits_Q x(q)\,d\mu(q) \quad (x \in C_b(Q)).$$

Соответствие $T \leftrightarrow \mu_T$ служит линейным и порядковым изоморфизмом векторных решеток $L^{\sim}(C_b(Q), F)$ и $\mathrm{bra}(\mathcal{A}_0(Q), F)$.

$\lhd$ Нетрудно видеть, что $L := C_b(Q)$ — σ-разделяющая подрешетка K-пространства $E = \mathbb{R}^Q$. Поэтому требуемое следует из теоремы 3.6. $\rhd$

3.8. Теорему 3.4 для положительного T установил Р. Кристиан [20], а затем Е. Берц [19]. Некоторое уточнение этой теоремы содержится в работе З. Липецкого [36]. Теорему 3.7 получил З. Липецки в [36]. О других разновидностях теоремы представления типа Рисса см. Е. Берц [19], Дж. Дистель и Дж. Уль [21], А. Г. Кусраев и С. А. Малюгин [10], Т. Панчапагесан и Ш. В. Паллед [38], А. Седа [43], Б. Фукс-штейнер и В. Ласки [24], С. Хурана [27, 28].

§ 4. Доказательство основного результата

Ограничимся доказательством теоремы 3.4. Теорема 3.6 устанавливается аналогично, а остальные факты из параграфа 3, как было отмечено в предыдущем параграфе, непосредственно следуют из указанных теорем. Начнем с простого вспомогательного утверждения.

4.1. Для произвольного $f \in \mathcal{F}_L$ рассмотрим множество $\Phi(f) := \{x \in L : x \geqslant f\}$ с индуцированным из L порядком. Как видно, $\Phi(f)$ фильтруется по убыванию. Для пары элементов $f_1, f_2 \in \mathcal{F}_L$ введем множество

$$\Psi(f_1, f_2) := \{(x, x_1, x_2) \in \Phi(f_1 \vee f_2) \times \Phi(f_1) \times \Phi(f_2) : \ x_1 + x_2 \leqslant x\}$$

с покоординатным упорядочением.

Если f_1 и f_2 дизъюнктны, то множество $\Psi(f_1, f_2)$ фильтруется вниз и коинициально в $\Phi := \Phi(f_1 \vee f_2) \times \Phi(f_1) \times \Phi(f_2)$. Последнее означает, что для любого $\varphi \in \Phi$ существует такой $\psi \in \Psi$, что $\psi \leqslant \varphi$.

$\lhd$ Нужно лишь убедиться в справедливости последнего утверждения. Возьмем $(x, x_1, x_2) \in \Phi$. Из свойства отделимости решетки L следует существование $y \in L$ такого, что $f_1 \leqslant y \leqslant \mathbf{1} - f_2$. Положим по определению $x_1' := x_1 \wedge x \wedge y$, $x' := x$ и $x_2' := (x - x_1') \wedge x_2$. Как видно, тройка (x', x_1', x_2') входит в $\Psi(f_1, f_2)$ и $(x', x_1', x_2') \leqslant (x, x_1, x_2)$, что и требовалось. $\rhd$

4.2. *Пусть $S : L \to F$ — положительный оператор. Для произвольного $f \in \mathcal{F}_L$ положим*

$$\nu_0(f) = \bigwedge \{Sx : \ f \leqslant x, \ x \in L\}.$$

Тогда отображение $\nu_0 : \mathcal{F}_L \to F$ аддитивно, и при $f_1, f_2 \in \mathcal{F}_L$, $f_1 \leqslant f_2$ выполняется свойство плотности

$$\nu_0(f_2) = \nu_0(f_1) + \bigvee \{\nu_0(f) : \ f \leqslant f_2 - f_1, \ f \in \mathcal{F}_L\}.$$

$\lhd$ Непосредственно из определения ν_0 видно, что $\nu_0(f_1 \vee f_2) \leqslant \nu_0(f_1) + \nu_0(f_2)$. Пусть $x' \in L$, $x' \geqslant f_1 \vee f_2$. Тогда $(x', x', x') \in \Phi$ и в соответствии с 4.1 найдется тройка $(x, x_1, x_2) \in \Psi(f_1, f_2)$ такая, что $(x', x', x') \geqslant (x, x_1, x_2)$. Отсюда выводим $Sx' \geqslant Sx \geqslant S(x_1) + S(x_2) \geqslant \nu_0(f_1) + \nu_0(f_2)$. Переход к инфимуму по всем указанным x' дает неравенство $\nu_0(f_1 \vee f_2) \geqslant \nu_0(f_1) + \nu_0(f_2)$.

Далее, пусть $f \in \mathcal{F}_L$, $f \leqslant f_2 - f_1$ и $x_2 \in L$, $f_2 \leqslant x_2$. Так как решетка L разделяющая, то существует $y \in L$, для которого $f_1 \leqslant y \leqslant \mathbf{1} - f \in \mathcal{T}_L$. Для элемента $x_1 = x_2 \wedge y$ будет $f \leqslant x_2 - x_1$ и

$$Sx_2 = S(x_2 - x_1) + Sx_1 \geqslant \nu_0(f) + \nu_0(f_1).$$

Последнее неравенство выполняется для любого $x_2 \in L$ при $x_2 \geqslant f_2$, следовательно,

$$\nu_0(f_2) \geqslant \nu_0(f_1) + \nu_0(f) \quad (f \leqslant f_2 - f_1). \tag{$*$}$$

Далее, для $x_1 \in L$, $x_1 \geqslant f_1$ и числа $0 < \varepsilon < 1$ полагаем $f := (\mathbf{1} - e_0^{(\mathbf{1} - \varepsilon \mathbf{1} - x_1)}) \wedge f_2$. Тогда $f \leqslant f_2 - f_1$ и для любого $x \in L$ при $x \geqslant f$ верно $(1-\varepsilon)^{-1}(x_1 + x) \geqslant f_2$. Тем самым $\nu_0(f_2) \leqslant (1-\varepsilon)^{-1}(Sx_1 + Sx)$. Последнее неравенство выполняется для каждого $x \in L$ при $x \geqslant f$, стало быть,

$$\nu_0(f_2) \leqslant (1-\varepsilon)^{-1}(Sx_1 + \nu_0(f)) \leqslant (1-\varepsilon)\Big(Sx_1 + \bigvee\{\nu_0(f) :\ f \leqslant f_2 - f_1,\ f \in L\}\Big).$$

Полученное неравенство имеет место для любых $x_2 \in L$ при $x_2 \geqslant f_2$ и $\varepsilon > 0$, поэтому

$$\nu_0(f_2) \leqslant \nu_0(f_1) + \bigvee\{\nu_0(f) :\ f \leqslant f_2 - f_1,\ f \in \mathcal{F}_L\}.$$

Сопоставляя последнее неравенство с $(*)$, получаем свойство требуемое плотности ν_0. $\rhd$

4.3. *Функция ν_0 допускает и притом единственное аддитивное $\mathcal{F}_L$-регулярное продолжение ν с множества $\mathcal{F}_L$ на всю алгебру $\mathcal{A}(\mathcal{F}_L) = \mathcal{A}(\mathcal{T}_L)$.*

$\lhd$ Это утверждение выводится из свойства плотности. Для $e \in \mathcal{A}(\mathcal{F}_L)$ полагаем по определению

$$\nu(e) := \bigvee\{\nu_0(f) :\ f \in \mathcal{F}_L,\ f \leqslant e\}.$$

Легко проверяется, что множество

$$\mathcal{E} := \{e \in \mathcal{A}(\mathcal{F}_L) :\ (\forall e' \in \mathcal{A}(\mathcal{F}_L)\, \nu(e') = \nu(e' \wedge e) + \nu(e' \setminus e)\}$$

является подалгеброй в $\mathcal{A}(\mathcal{F}_L)$, содержащей $\mathcal{F}_L$. Значит, $\mathcal{E} = \mathcal{A}(\mathcal{F}_L)$ и ν является аддитивной $\mathcal{F}_L$-регулярной мерой на $\mathcal{A}(\mathcal{F}_L)$. $\rhd$

4.4. *Формула $\mu_0(f) := bo\text{-}\lim\{Tx :\ x \in \Phi(f)\}$ определяет аддитивное отображение $\mu_0 : \mathcal{F}_L \to Y$, обладающее свойством плотности*

$$\mu_0(f_2) = \mu_0(f_1) + bo\text{-}\lim\{\mu_0(f) :\ f \leqslant f_2 - f_1,\ f \in \mathcal{F}_L\}.$$

$\lhd$ Прежде всего заметим, что для любого $f \in \mathcal{F}_L$ сеть $(Tx)_{x \in \Phi(f)}$ bo-фундаментальна, так как при $x_1, x_2 \in \Phi(f)$ справедливы соотношения

$$|Tx_1 - Tx_2| \leqslant S(|x_1 - x_2|) \leqslant S(x_1 - x_1 \wedge x_2) + S(x_2 - x_1 \wedge x_2) \xrightarrow{(o)} 0.$$

В силу $bo-$полноты Y предел $bo\text{-}\lim\{Tx :\ x \in \Phi(f)\}$ существует и отображение μ_0 определено корректно. Докажем аддитивность. Для этого возьмем дизъюнктные

$f_1, f_2 \in \mathcal{F}_L$ и покажем, что $\mu_0(f_1 \vee f_2) = \mu_0(f_1) + \mu_0(f_2)$. Пользуясь утверждением и обозначениями из 4.1, из определения μ_0 выводим:

$$\begin{aligned}\bigl|\mu_0(f_1 \vee f_2) - \mu_0(f_1) - \mu_0(f_2)\bigr| &= o\text{-}\lim\,\bigl\{\bigl|T(x - x_1 - x_2)\bigr| :\ (x, x_1, x_2) \in \Phi\bigr\} \\ &= o\text{-}\lim\,\{\bigl|T(x - x_1 - x_2)\bigr| :\ (x, x_1, x_2) \in \Psi(f_1, f_2)\} \\ &\leqslant o\text{-}\lim\,\{S(x - x_1 - x_2) :\ (x, x_1, x_2) \in \Psi(f_1, f_2)\} \\ &= o\text{-}\lim\,\{S(x - x_1 - x_2) :\ (x, x_1, x_2) \in \Phi\} \\ &= \nu(f_1 \vee f_2) - \nu(f_1) - \nu(f_2) = 0,\end{aligned}$$

откуда и видна аддитивность μ_0.

Покажем, что имеет место неравенство

$$\bigl|\mu_0(f_2) - \mu_0(f_1)\bigr| \leqslant \nu(f_2 - f_1) \quad (f_1, f_2 \in \mathcal{F}_L,\ f_1 \leqslant f_2). \tag{$**$}$$

Для этого введем множество $\Psi' := \{(x_1, x_2) \in \Phi(f_1) \times \Phi(f_2) : x_1 \leqslant x_2\}$ и заметим, что оно фильтруется по убыванию и коинициально в $\Phi(f_1) \times \Phi(f_2)$. Пользуясь этим, напишем

$$\begin{aligned}&\bigl|\mu_0(f_2) - \mu_0(f_1)\bigr| = o\text{-}\lim\,\{|Tx_2 - Tx_1| :\ (x_1, x_2) \in \Phi(f_1) \times \Phi(f_2)\} \\ &= o\text{-}\lim\,\{\bigl|T(x_2 - x_1)\bigr| :\ (x_1, x_2) \in \Psi'\} \leqslant o\text{-}\lim\,\{S(x_2 - x_1) :\ (x_1, x_2) \in \Psi'\} \\ &= o\text{-}\lim\,\{S(x_2 - x_1) :\ (x_1, x_2) \in \Phi(f_1) \times \Phi(f_2)\} = \nu(x_2) - \nu(x_1) = \nu(x_2 - x_1).\end{aligned}$$

Теперь докажем свойство плотности для функции μ_0. Пусть $e \in \mathcal{A}(\mathcal{F}_L)$ и $f_1, f_2 \in \mathcal{F}_L$, $f_1 \leqslant e$, $f_2 \leqslant e$. Тогда из оценки $\bigl|\mu_0(f_1) - \mu_0(f_2)\bigr| \leqslant \nu(f_1 \vee f_2 - f_1) + \nu(f_1 \vee f_2 - f_2)$ видна bo-фундаментальность сети $\{\mu_0(f) : f \in \Phi(f)\}$, и поэтому существует $bo\text{-}\lim\,\{\mu_0(f) : f \in \mathcal{F}_L \wedge e\}$. Используя свойство плотности ν и аддитивность μ_0 можем написать при любых $f_1, f_2 \in \mathcal{F}_L$, $f_1 \leqslant f_2$ следующую цепочку соотношений:

$$\begin{aligned}&\bigl|\mu_0(f_2) - \mu_0(f_1) - bo\text{-}\lim\,\{\mu_0(f) :\ f \in \mathcal{F}_L,\ f \leqslant f_2 - f_1\}\bigr| \\ &= o\text{-}\lim\,\bigl\{\bigl|\mu_0(f_2) - \mu_0(f_1 \vee f)\bigr| :\ f \in \mathcal{F}_L,\ f \leqslant f_2 - f_1\bigr\} \\ &\leqslant o\text{-}\lim\,\{\nu(f_2 - f_1 \vee f_2) :\ f \in \mathcal{F}_L,\ f \leqslant f_2 - f_1\} \\ &= \nu(f_2) = \nu(f_1) - \bigvee\{\nu(f) :\ f \in \mathcal{F}_L,\ f \leqslant f_2 - f_1\} = 0,\end{aligned}$$

что и требовалось. $\triangleright$

4.5. *Функция μ_0 допускает и притом единственное аддитивное $\mathcal{F}_L$-регулярное продолжение μ с множества $\mathcal{F}_L$ на всю алгебру $\mathcal{A}(\mathcal{F}_L) = \mathcal{A}(\mathcal{T}_L)$. При этом*

$$\mu(e) = bo\text{-}\lim\,\{\mu_0(f) :\ f \in \mathcal{F}_L \wedge e\} \quad (e \in \mathcal{A}(\mathcal{F}_L)).$$

$\triangleleft$ Этот факт можно проверить непосредственно по той же схеме, что и для функции ν, см., например, [35; теорема 1]. Здесь дадим другое доказательство. Из свойства плотности вытекает, что величина $\mu(f_2) - \mu(f_1)$ зависит только от элемента $e = f_2 - f_1$. Отсюда, в частности, следует модулярное тождество

$$\mu_0(f_1 \vee f_2) + \mu_0(f_1 \wedge f_2) = \mu_0(f_1) + \mu_0(f_2) \quad (f_1, f_2 \in \mathcal{F}_L).$$

Существование единственного аддитивного продолжения на порожденную алгебру $\mathcal{A}(\mathcal{F}_L)$ теперь сразу получается из следующего алгебраического факта 4.6. $\triangleright$

4.6. *Теорема.* *Пусть A — булева алгебра, L — подрешетка в A, содержащая 0 и порождающая A, т. е. $A = \mathcal{A}(L)$. Пусть $\mu_0 : L \to G$ — отображение из L в коммутативную группу G, удовлетворяющее равенству $\mu_0(0) = 0$ и модулярному тождеству*

$$\mu_0(a \vee b) + \mu_0(a \wedge b) = \mu_0(a) + \mu_0(b) \quad (a, b \in L).$$

Тогда существует единственное аддитивное отображение $\mu : \mathcal{A}(L) \to G$, продолжающее μ_0.

$\lhd$ Этот результат установлен в работе Б. Петтиса [39], затем переоткрыт Й. Кишинским [30]. Более простое доказательство найдено З. Липецким в [32]. $\rhd$

4.7. Остается установить интегральное представление оператора T.

В предположениях теоремы 3.2 имеет место интегральное представление

$$Tx = \int x\, d\mu \quad (x \in L),$$

где $\mu : \mathcal{A}(\mathcal{F}_L) \to Y$ — аддитивное $\mathcal{F}_L$-регулярное отображение, определяемое в соответствии с 4.4 и 4.5.

$\lhd$ Пусть $x \in L$ и $n \in \mathbb{N}$. Так как x ограниченный элемент, то он имеет конечную норму $\|x\| = \inf\{\lambda \in \mathbb{R}^+ : |x| \leqslant \lambda \mathbf{1}\}$. Положим $\lambda_k := k\|x\|/n$, $k = -n, \dots, n$. Из отделимости L следует существование $y_k \in L$ таких, что

$$\mathbf{1} - e^x_{\lambda_k} \leqslant y_k \leqslant e^{-x}_{-\lambda_{k-1}} \quad (k = -n+1, \dots, n).$$

Рассмотрим элемент

$$x_n = \frac{\|x\|}{n} \left(\sum_{k=-n+1}^{n} y_k - n\mathbf{1} \right).$$

Легко проверяется, что $|x - x_n| \leqslant (\|x\|/n)\mathbf{1}$. Кроме этого справедливы оценки

$$\begin{aligned} \bigl|Ty_k - \mu(\mathbf{1} - e^x_{\lambda_k})\bigr| &= o\text{-}\lim\{\bigl|Ty_k - Ty\bigr| : \ y \in L,\ \mathbf{1} - e^x_{\lambda_k} \leqslant y \leqslant y_k\} \\ &\leqslant o\text{-}\lim\{S(y_k - y) : \ y \in L,\ \mathbf{1} - e^x_{\lambda_k} \leqslant y \leqslant y_k\} \\ &= Sy_k - \nu(\mathbf{1} - e^x_{\lambda_k}) \leqslant \nu(e^{-x}_{-\lambda_k}) - \nu(\mathbf{1} - e^x_{\lambda_k}). \end{aligned}$$

Далее, полагаем

$$z_n = \frac{\|x\|}{n} \left(n\mathbf{1} - \sum_{k=-n+1}^{n} e^x_{\lambda_k} \right).$$

Вновь выполняется неравенство $|x - z_n| \leqslant (\|x\|/n)\mathbf{1}$. Теперь мы можем написать

$$\begin{aligned} \left|Tx_n - \int z_n\, d\mu\right| &= \frac{\|x\|}{n} \left| \sum_{k=-n+1}^{n} \Bigl(Ty_k - \mu\bigl(\mathbf{1} - e^x_{\lambda_k}\bigr)\Bigr) \right| \\ &\leqslant \frac{\|x\|}{n} \sum_{k=-n+1}^{n} \Bigl(\nu\bigl(e^{-x}_{-\lambda_{k-1}}\bigr) - \nu\bigl(\mathbf{1} - e^x_{\lambda_k}\bigr)\Bigr) \\ &\leqslant \frac{\|x\|}{n} \sum_{k=-n+1}^{n} \Bigl(\nu\bigl(\mathbf{1} - e^x_{\lambda_{k-1}}\bigr) - \nu\bigl(\mathbf{1} - e^x_{\lambda_k}\bigr)\Bigr) \\ &\leqslant \nu(\mathbf{1}) \cdot \frac{\|x\|}{n} = S(\mathbf{1}) \cdot \frac{\|x\|}{n}. \end{aligned}$$

Отсюда выводим

$$|Tx - Tx_n| \leqslant S(\mathbf{1}) \cdot \frac{\|x\|}{n};$$

$$\left|\int x\,d\mu - \int z_n\,d\mu\right| \leqslant |\mu|\,(\mathbf{1})\frac{\|x\|}{n} \leqslant \nu(\mathbf{1})\frac{\|x\|}{n} = S(\mathbf{1})\frac{\|x\|}{n}.$$

Сопоставляя это с предыдущим неравенством, заключаем

$$\left|Tx - \int x\,d\mu\right| \leqslant \frac{3\|x\|}{n}\,|T|\,(\mathbf{1}).$$

Ввиду произвольности n, получаем требуемое интегральное представление. $\triangleright$

§ 5. Представление радоновыми мерами

5.1. А. А. Марков [15; теорема 16], а затем А. Д. Александров [2; § 9, теоремы 2 и 5] установили, что в случае компактного топологического пространства вещественная регулярная мера счетно аддитивна на области своего задания. Таким образом, если Q — компакт, то представляющие меры из теоремы 1.2 счетно аддитивны и регулярны, следовательно, допускают и притом единственное регулярное счетно аддитивное продолжение на борелевскую σ-алгебру. Тем самым, теорема представления Рисса в форме 1.1 вытекает как из результатов А. А. Маркова [15] 1938 года, так и из результатов А. Д. Александрова [2] 1941 года. В то же время, как показал А. Д. Александров [2; § 9, теорема 5], для нормального топологического пространств Q классы ограниченных счетно аддитивных регулярных мер $\mathrm{rca}(Q)$ и ограниченных конечно аддитивных регулярных мер $\mathrm{ra}(Q)$ совпадают в том и только в том случае, когда Q — компакт. Таким образом, теорема представления Рисса в форме 1.1 имеет место только для компактных пространств Q. Счетная аддитивность радоновой меры имеет место и для мер со значениями в решеточно нормированных пространствах. Следующие два утверждения установлены С. А. Малюгиным в [12].

(1) *Если мажорируемая $\mu : \mathcal{A} \to Y$ радонова, то она σ-аддитивна.*

(2) *Если мажорируемая мера $\mu : \mathcal{A} \to Y$ квазирадонова, то ограничение μ на алгебру $\Sigma_0(\mathcal{F}_X \cap \mathcal{A})$ счетно аддитивно.*

Другим следствием упомянутых работ А. А. Маркова и А. Д. Александрова является тот факт, что для вещественных мер на компакте свойства радоновости и квазирадоновости совпадают. Для мер со значениями в векторной решетке дело обстоит сложнее. Вопрос о том, насколько класс квазирадоновых мер шире класса радоновых мер, принципиально решается в следующем утверждении.

5.2. ***Теорема.*** *Пусть Q — вполне регулярное пространство и дана σ-алгебра $\mathcal{A} = \Sigma(\mathcal{F}_Q \cap \mathcal{A})$. Пусть на K-пространстве F выполняется закон слабой (σ,∞)-дистрибутивности. В этом случае мера $\mu \in \mathrm{dca}(\mathcal{A}, Y)$ является радоновой (регулярной) тогда и только тогда, когда она квазирадонова (квазирегулярна).*

$\triangleleft$ Докажем, что при выполнении условий теоремы из квазирадоновости меры μ следует ее радоновость. Из теоремы 2.4 (3) следует квазирадоновость векторной вариации $\nu = |\mu|$. Следовательно, для любого $U \in \mathcal{T}_Q \cap \mathcal{A}$ имеем

$$\bigwedge\{|\mu|\,(U \setminus K) : K \in \mathcal{K}_U\} = 0.$$

Тем более для любого фиксированного $D \in \mathcal{F}_Q \cap \mathcal{A}$ получаем

$$\bigwedge\{|\mu|\,(U \cap D \setminus K \cap D) : K \in \mathcal{K}_U\} = 0.$$

Обозначим через $\mathcal{E}$ множество всех $E \in \mathcal{A}$, для которых

$$\bigwedge\{|\mu|\,(E \setminus K) : K \in \mathcal{K}_E\} = 0. \qquad (***)$$

Мы уже убедились, что $\mathcal{A}(\mathcal{F}_Q \cap \mathcal{A}) \subseteq \mathcal{E}$. Рассмотрим любую последовательность $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ элементов из $\mathcal{E}$ и докажем, что $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{E}$. Для этого рассмотрим любые компактные множества $K_n \in \mathcal{K}_{E_n}$ и положим $h_{K_n} = |\mu|\,(E_n \setminus K_n)$. Пусть $C_n = E_n \setminus K_n$. Индукцией по n легко доказываются неравенства

$$|\mu|\left(\bigcup_{i=1}^{n} C_i\right) \leqslant \bigvee_{i=1}^{n} 2^{i+1} h_{K_i}.$$

Пусть $h = |\mu|\,(E)$. Для любого $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим направленность $x_{K_n} = (2^{n+1} h_{K_n}) \wedge h$ $(K_n \in \mathcal{K}_{E_n})$. Очевидно, направленность x_{K_n} ограничена и убывает к нулю. Из оценки

$$|\mu|\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i\right) \leqslant \bigvee_{i=1}^{\infty} (2^{i+1} h_{K_i} \wedge h) = \bigvee_{i=1}^{\infty} x_{K_i}.$$

и слабой (σ, ∞)-дистрибутивности пространства F следует, что направленность

$$|\mu|\left(E \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n\right) \quad \left((K_n) \in \prod_{n=1}^{\infty} \mathcal{K}_{E_n}\right)$$

также стремится к нулю. Если обозначить через $\mathcal{K}_\sigma(E)$ множество всех счетных объединений компактных подмножеств E, то мы получим

$$|\mu|\,(E) = \bigvee\{|\mu|\,(G) :\ G \in \mathcal{K}_\sigma(E) \cap \mathcal{A}\}.$$

Так как мера $|\mu|$ σ-аддитивна, то из последнего равенства следует равенство $(***)$. Аналогичным образом доказывается, что $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{E}$. Поэтому из леммы о монотонном классе мы получаем равенство $\mathcal{E} = \Sigma(\mathcal{A}(\mathcal{F}_Q \cap \mathcal{A})) = \mathcal{A}$. Теорема доказана. $\rhd$

Часто возникает необходимость в установлении признаков радоновости и квазирадоновости данной борелевской меры. Например, справедливо следующее обобщение теоремы С. Улама о том, что любая борелевская мера на польском пространстве радонова.

5.3. *Теорема.* *Пусть (Q, ρ) — польское пространство и на F выполняется закон слабой σ-дистрибутивности. Тогда любая борелевская мера $\mu \in \mathrm{dca}(\mathcal{B}_Q, Y)$ является радоновой.*

$\lhd$ Так как на Q борелевская σ-алгебра совпадает с бэровской σ-алгеброй, то мера μ будет квазирегулярной. Из предыдущей теоремы следует, что мера μ регулярна. Для обоснования требуемого теперь достаточно показать, что

$$|\mu|(Q) = \bigvee\{|\mu|(K) : K \in \mathcal{K}_Q\}.$$

Пусть $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ — счетное плотное в Q множество и $(B_n(x_k))_{n,k\in\mathbb{N}}$ — последовательность замкнутых шаров, где радиус каждого $B_n(x_k)$ равен n^{-1}. Для любого $n \in \mathbb{N}$ справедливо равенство $Q = \bigcup\{B_n(x_k) : k \in \mathbb{N}\}$. Для удобства введем обозначение

$$h_{m,n} = |\mu|\left(x \setminus \bigcup_{k=1}^{m} B_n(x_k)\right) \quad (n, m \in \mathbb{N}).$$

Для любой функции $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ полагаем

$$K_\varphi = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\varphi(n)} B_n(x_k).$$

Множество K_φ замкнуто и вполне ограничено, следовательно, компактно. Кроме этого

$$|\mu|(Q \setminus K_\varphi) \leqslant \bigvee_n (h \wedge 2^n h_{n,\varphi(n)}) = \bigvee_n h'_{n,\varphi(n)},$$

где положено $h = |\mu|(Q)$, $h'_{n,m} = h \wedge 2^n h_{n,m}$. Для любого $n \in \mathbb{N}$ имеем $h'_{n,m} \searrow 0$ при $m \to \infty$. Значит,

$$\bigwedge\{|\mu|(Q \setminus K_\varphi) : \varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\} = 0.$$

что и доказывает радоновость меры μ. $\rhd$

5.4. Теория радоновых мер изложена в монографии Л. Шварца [42]. На основе понятия радоновой меры развивается теория интегрирования в трактате Н. Бурбаки [4]. Квазирегулярные меры ввел М. Райт в [46]. Им же введены квазирадоновы меры в работе [50], где они также названы квазирегулярными. Именно М. Райт обнаружил принципиальное отличие между радоновыми и квазирадоновыми мерами и значение этого отличия для проблемы продолжения мер и операторов со значениями в K-пространстве, см. [46–50]. Квазирадоновы меры со значениями в решеточно нормированных пространствах изучал С. А. Малюгин [12–14].

Литература

1. *Александров А. Д.* Additive set functions in abstract spaces // Мат. сборник (N.S.)—1940.—Т. 8, вып. 2.—С. 307–348.
2. *Александров А. Д.* Additive set functions in abstract spaces. II, III // Мат. сборник (N.S.)—1941.—Т. 9, вып. 3.—С. 563–628.
3. *Александров А. Д.* Additive set functions in abstract spaces. IV // Мат. сборник (N.S.)—1943.—Т. 13, вып. 2–3.—С. 169–243.
4. *Бурбаки Н.* Интегрирование. Меры на локально компактных пространствах, продолжение меры, интегрирование мер, меры на отделимых пространствах.—М.: Наука, 1977.—600 с.
5. *Вулих Б. З.* Введение в теорию полуупорядоченных пространств.—М.: ГИФМЛ, 1961.—407 с.

6. *Вулих Б. З.* Введение в теорию конусов в нормированных пространствах.—Калинин: Изд-во Калининск. гос. ун-та, 1977.—84 с.
7. *Данфорд Н., Шварц Дж.* Линейные операторы. Т. 1: Общая теория.—М.: ИЛ, 1962.—895 с.
8. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ.—М.: Наука, 1984.—752 с.
9. *Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г.* Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах.—М.-Л.: Гостехиздат, 1950.—548 с.
10. *Кусраев А. Г., Малюгин С. А.* Некоторые вопросы теории векторных мер.—Новосибирск: Изд-во ИМ СО АН СССР, 1988.—190 с.
11. *Кусраев А. Г., Малюгин С. А.* Произведение и проективный предел векторных мер // В кн: Современные проблемы геометрии и анализа.—Новосибирск: Наука, 1989.—С. 132–152.
12. *Малюгин С. А.* Квазирадоновы меры // Сиб. мат. журн.—1991.—Т. 32, № 5.—С. 101–111.
13. *Малюгин С. А.* Проблема моментов в K_σ-пространстве // Сиб. мат. журн.—1993.—Т. 34, № 2, 110–120.
14. *Малюгин С. А.* О лифтинге квазирадоновых мер // Сиб. мат. журн.—2001.—Т. 42, № 2.—С. 407–413.
15. *Марков А. А.* On mean values and exterior densities // Мат. сб. (N.S.)—1938.—Т. 4.—С. 165–191.
16. *Халмош П.* Теория меры. М.: ИЛ, 1953.—291 с.
17. *Эдвардс Р.* Функциональный анализ. Теория и приложения.—М.: Мир, 1969.—1071 с.
18. *Batt J.* Die Verallgemeinerungen des Darstellungssatzes von F. Riesz und ihre Anwendungen // Jahresber. Deutsch. Math.-Verein.—1973.—Bd. 74.—S. 147–181.
19. *Berz E.* Verallgemeineung eines Satzes von F. Riesz // Manuscripta Math.—1970.—Bd. 2.—S. 285–299.
20. *Christian R. R.* On order-preserving integration // Trans. Amer. Math. Soc.—1967.—V. 86.—P. 463–485.
21. *Diestel J., Uhl J. J.* Vector measures.—Providence: Amer. Math. Soc.—1977. (Series Math. Surveys, 15.)
22. *Dinculeanu N.* Vector Measures.—Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1966.—432 p.
23. *Fremlin D. H.* A direct proof of the Matthes–Wright integral extension theorem // J. London Math. Soc.—1975.—V. 11, No. 3.—P. 276–284.
24. *Fuchssteiner B., Lusky W.* Convex Cones.—Amsterdam ets.: North-Holland, 1981.
25. *Gray J. D.* The shaping of the Riesz representation theorem: A chapter in the history of analysis // Arch. Hist. Exact. Sci.—1984.—V. 31.—P. 127–187.
26. *Kakutani S.* Concrete representation of abstract (M)-space // Ann. Math.—1941.—V. 42.—P. 994–1024.
27. *Khurana S. S.* Lattice-valued Borel measures // Rocky Mountain J. Math.—1976.—V. 6, No. 2.—P. 377–382.
28. *Khurana S. S.* Lattice-valued Borel measures. II // Trans. Amer. Math. Soc.—1978.—V. 235, No. 2.—P. 205–211.
29. *Kirk R. B., Crenshaw J. A.* A generalized topological measure theory // Trans. Amer. Math. Soc.—1975.—V. 207.—P. 189–217.
30. *Kisyński J.* Remark on strongly additive set functions // Fund. Math.—1969.—V. 63.—P. 327–332.
31. *Kusraev A. G.* Dominated operators.—Dordrecht a. o.: Kluwer, 2000.—446 p.
32. *Lipecki Z.* On strongly additive set functions // Colloq. Math. 1971.—V. 22, № 2.—P. 255–256.
33. *Lipecki Z.* Extensions of additive set functions with values in topological group // Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math., Astronom., Phys.—1974.—V. 12, No. 1.—P. 19–27.
34. *Lipecki Z., Plachky D., Thomsen W.* Extensions of positive operators and extreme points. I // Colloq. Math.—1979.—V. 42.—P. 279–284.
35. *Lipecki Z.* Extention of tight set functions with values in a topological group // Bull. Acad. Polon. Sci.—1974.—V. 22, No. 2.—P. 105–113.
36. *Lipecki Z.* Extension of vector-lattice homomorphisms revisited // Indag. Math. (N.S.)—1985.—V. 47.—P. 229–233.
37. *Lipecki Z.* Riesz type representation theorems for positive operators // Math. Nachr.—1987.—V. 131.—P. 351–356.
38. *Panchapagesan T. V., Palled Sh. V.* On vector lattice-valued measures. I // Math. Slovaca.—1983.—V. 33, No. 3.—P. 269–292.
39. *Panchapagesan T. V., Palled Sh. V.* On vector lattice-valued measures. II // J. Austral. Math. Soc. (Ser. A)—1986.—V. 40, No. 2.—P. 234–252.
40. *Pettis B. J.* On the extension of measures // Ann. Math.—1951.—V. 54.—P. 186–197.
41. *Riečan B.* An extension of the Daniel integration scheme // Mat. Ĉas.—1975.—V. 25, No. 3.—P. 211–219.
42. *Riečan B.* A simplified proof of the Daniel integral extension theorem in ordered spaces // Math. Slovaca.—1982.—V. 32, No. 1.—P. 75–79.

43. *Schwartz L.* Radon measures on arbitrary topological spaces and cylindrical measures.—London: Oxford Univ. Press, 1983.—393 p.
44. *Seda A. K.* Integral representation of linear functionals on spaces sections // Proc. Amer. Math. Soc.—1984.—V. 91, No. 4.—P. 549–555.
45. *Semadeni Zb.* Banach Spaces of Continuous Functions.—Warsaw: Polish Scientific Publishers, 1971.—584.
46. *Wheeler R. F.* A survey of Baire measuresand strict topologies // Expositiones Math.—1984.—V. 1.—P. 97–190.
47. *Wright J. D. M.* Stone algebra valued measures and integrals // Proc. London Math. Soc. Proc.—1969.—V. 19, No. 3.—P. 107–122.
48. *Wright J. D. M.* The measure extension problem for vector lattices // Ann. Inst. Fourier (Grenoble).—1971.—V. 21.—P. 65–68.
49. *Wright J. D. M.* Vector lattice measure on locally compact spaces // Math. Z.—1971.—V. 120.—P. 193–203.
50. *Wright J. D. M.* An algebraic characterization of vector lattices with the Borel regularity property // J. London Math. Soc.—1973.—V. 7, No. 2.—P. 277–285.
51. *Wright J. D. M.* Products of positive vector measures // Quart. J. Math.—1973.—V. 24, No. 94.—P. 189–206.
52. *Wright J. D. M.* Measure with values in partially ordered spaces: regularity and σ-additivity // In: Measure Theory, Oberwolfach, 1975.—Berlin a.o.: Springer, 1976.—P. 267–276. (Lecture Notes in Math, 5.)
53. *Zaanen A. C.* Measurable functions and integral operators // Nieuw arch. wisk.—1985.—V. 3, No. 2.—P. 167–205.

гг. Владикавказ — Новосибирск *Статья поступила 10 сентября 2002г.*