Владикавказский математический журнал
Июль–сентябрь, 2002, Том 4, Выпуск 3

УДК **517.98**

О ЙОРДАНОВЫХ АЛГЕБРАХ БЭРОВСКОГО ТИПА

Ф. Н. Арзикулов

Работа посвящена изучению йорданова аналога бэровских иволютивных алгебр. Для рассматриваемого случая введено понятие абстрактного измеримого оператора, присоединенного к алгебре, и установлено, что широкий класс упорядоченных йордановых алгебр реализуется как подалгебры алгебр абстрактных измеримых операторов, присоединенных к модулярной монотонно полной йордановой банаховой алгебре. В качестве вспомогательного средства построено пирсовское разложение по бесконечному семейству проекторов.

1. Введение

В работах Сато и Бербериана [1–5] были исследованы ассоциативные алгебры абстрактных измеримых операторов для AW^*-алгебры. Было доказано, что они являются бэровскими $*$-алгебрами.

Цель данной работы — исследовать йордановы аналоги бэровских $*$-алгебр. В работах [6, 7] было установлено, что в классе JB-алгебр имеется подкласс, представители которого удовлетворяют йорданову аналогу условия Бэра. Эти алгебры, следуя Топпингу, были названы AJW-алгебрами. Далее, в работе [8] были изучены йордановы алгебры абстрактных измеримых операторов для JBW-алгебр. Было доказано, что эти алгебры являются йордановыми аналогами бэровских инволютивных алгебр. В работах [9] и [10] были введены и изучены OJ-алгебры. Один из основных результатов этих работ утверждает, что всякая OJ-алгебра вложима в йорданову алгебру локально измеримых операторов относительно JW-алгебры своих ограниченных элементов. В данной работе этот результат перенесен на случай OJ-алгебры с модулярной AJW-алгеброй ограниченных элементов и доказано, что такие OJ-алгебры являются йордановыми аналогами бэровских инволютивных алгебр. В данной работе построено также пирсовское разложение произвольной монотонно полной JB-алгебры (AJW-алгебры). Дело в том, что до сих пор в теории йордановых алгебр использовались пирсовские разложения йордановых алгебр по конечным семействам проекторов. В то же время, пирсовское разложение по бесконечному ортогональному семейству проекторов существенно упростило бы доказательства многих фактов. В данной статье дано условие построения пирсовского разложения монотонно полной JB-алгебры A по бесконечному ортогональному семейству $\{p_\xi\}$ с условием $\sup p_\xi = 1$.

2. Измеримые и локально измеримые операторы для модулярной AJW-алгебры

Всюду в данной статье, если не оговорено противное, A — модулярная AJW-алгебра и $P(A)$ — решетка проекторов в A. Для последовательности $\{e_n\}$ элементов $P(A)$ будем писать $e_n \uparrow$, если $e_n \leqslant e_{n+1}$ для всех n; если, кроме того, $\sup e_n = e$, то пишем $e_n \uparrow e$. Последовательность $\{e_n\}$ элементов $P(A)$ будем называть *сильно плотной областью*, если $e_n \uparrow 1$. *Существенно измеримый оператор* — это последовательность пар $\{(x_n, e_n)\}$, где $x_n \in A$ и $\{e_n\}$ — сильно плотная область, такая, что из $m \leqslant n$ следует $e_m x_n = e_m x_m$. Например, если $x \in A$ и $x_n = x$, $e_n = 1$ для всех n, то $\{(x_n, e_n)\}$ — существенно измеримый оператор, который будем обозначать через $\{(x, 1)\}$. Если $x \in A$ и $e \in P(A)$, то наибольший аннулирующий проектор элемента $(1 \Leftrightarrow e)x$ обозначается через $x^{-1}[e]$, т. е. $1 \Leftrightarrow x^{-1}[e]$ является носителем $(1 \Leftrightarrow e)x$. Введем отношение эквивалентности на множестве всех существенно измеримых операторов. Два существенно измеримых оператора $\{(x_n, e_n)\}$ и $\{(y_n, f_n)\}$ *эквивалентны* (пишем $\{(x_n, e_n)\} \equiv \{(y_n, f_n)\}$), если существует сильно плотная область $\{g_n\}$ такая, что $g_n x_n = g_n y_n$ для всех n. Класс эквивалентности $[x_n, e_n]$ существенно измеримых операторов $\{(x_n, e_n)\}$ называется *измеримым оператором*, присоединенным к алгебре A. Обозначим множество всех измеримых операторов, присоединенных к A, через $C(A)$. Так же, как в случае JBW-алгебры (см. [8]) вводятся алгебраические операции в $C(A)$: пусть $\lambda \in \mathbb{R}$ и $[x_n, e_n]$, $[y_n, f_n]$ измеримые операторы, присоединенные к алгебре A, положим

$$\lambda[x_n, e_n] = [\lambda x_n, e_n],$$

$$[x_n, e_n] + [y_n, f_n] = [x_n + y_n, e_n \wedge f_n],$$

$$[x_n, e_n][y_n, f_n] = [x_n y_n, g_n],$$

где $g_n = e_n \wedge f_n \wedge ((x_n)^{-1}[e_n]) \wedge ((y_n)^{-1}[f_n])$ для всяких n. Относительно этих операций $C(A)$ является йордановой алгеброй.

Пусть $S(X, M_3^8)$ — йорданова алгебра, где X — экстремальный компакт, построенная так же, как и в [9; гл. III]. Если перенести теоремы 1.20 и 2.9 из [8] на случай AJW-алгебры, то получатся следующие результаты.

Теорема 1. *Пусть A — модулярная AJW-алгебра и $A = \sum_i^{\oplus} A_i$, где A_i — AJW-подалгебра алгебры A для каждого i. Тогда $C(A) = \prod_i C(A_i)$, где $\prod_i C(A_i)$ — алгебра всех семейств $\{x_i\}$, $x_i \in C(A_i)$, с покомпонентными операциями. В частности, имеет место разложение $C(A) = C(A_{sp}) \oplus S(X, M_3^8)$.*

Так же, как и в [8] можно ввести существенно локально измеримые операторы, локально измеримые операторы и йорданову алгебру $S(A)$ локально измеримых операторов для модулярной AJW-алгебры A. В этом случае, имеет место следующая теорема:

Теорема 2. *Пусть A — модулярная AJW-алгебра. Тогда $C(A) = S(A)$.*

3. Бесконечное пирсовское разложение монотонно полной AJW-алгебры

Введем понятие бесконечной суммы пирсовских компонент монотонно полной AJW-алгебры A. Пусть $\{p_\xi\}$ — бесконечное ортогональное семейство проекторов с точной верхней границей 1 в A. Через $\sum_{\xi\eta}^{\oplus}\{p_\xi A p_\eta\}$ обозначим множество

$$\Big\{\{a_{\xi\eta}\} : (\forall \xi, \eta) a_{\xi\eta} \in \{p_\xi A p_\eta\}\, (\exists K \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N})$$
$$\big(\forall \{a_{\xi_k \eta_l}\}_{k,l=1}^{n} \subset \{a_{\xi\eta}\}\big) \Big\| \sum_{k,l=1}^{n} a_{\xi_k \eta_l} \Big\| \leqslant K \Big\}.$$

Ясно, что относительно покомпонентных алгебраических операций оно будет векторным пространством. Нетрудно проверить, что пространство $\sum_{\xi\eta}^{\oplus}\{p_\xi A p_\eta\}$ с нормой $\|\cdot\| : \{x_{\xi\eta}\} \to \|\{x_{\xi\eta}\}\|(\{x_{\xi\eta}\} \in \sum_{\xi\eta}^{\oplus}\{p_\xi A p_\eta\})$ является банаховым пространством, где $\|\{x_{\xi\eta}\}\| = \sup_{\{x_{\xi_k\eta_l}\}_{k,l=1}^m \subset \{x_{\xi\eta}\}} \|\sum_{k,l=1}^m x_{\xi_k\eta_l}\|$. Относительно покомпонентного порядка $\sum_{\xi\eta}^{\oplus}\{p_\xi A p_\eta\}$ является упорядоченным нормированным пространством с единицей. Заметим, что если $a \in A$, то $\{p_\xi a p_\eta\} \in \sum_{\xi\eta}^{\oplus}\{p_\xi A p_\eta\}$. При этом, так как $\sup p_\xi = 1$, то в силу леммы 2 из [7] A можно вложить в $\sum_{\xi\eta}^{\oplus}\{p_\xi A p_\eta\}$ как упорядоченное нормированное подпространство с единицей. Пусть $\{a_{\xi\eta}\} \in \sum_{\xi\eta}^{\oplus}\{p_\xi A p_\eta\}$ такой, что $\{a_{\xi\eta}\} \geqslant 0$. Заметим, что тогда для любого n и для любого конечного набора $\{a_{\xi_k\eta_l}\}_{k,l=1}^n \subset \{a_{\xi\eta}\}$ элемент $a_\alpha := \{a_{\xi_k\eta_l}\}_{k,l=1}^n$, где $\alpha := (n, \xi_1, \dots, \xi_n, \eta_1, \dots, \eta_n)$, является элементом алгебры A и множество элементов a_α образует ограниченную в A монотонно возрастающую сеть (a_α). При этом существует число K такое, что $\|a_\alpha\| \leqslant K$ для всех α. Нетрудно установить, что $a_\alpha \uparrow \{a_{\xi\eta}\}$. Отсюда, так как A монотонно полна, то $\{a_{\xi\eta}\} \in A$. Поэтому A допускает бесконечное пирсовское разложение по семейству $\{p_\xi\}$, т. е. $A = \sum_{\xi\eta}^{\oplus}\{p_\xi A p_\eta\}$.

Предложение 1. *Пусть A — монотонно полная AJW-алгебра и $\{p_\xi\}$ — семейство попарно ортогональных проекторов с условием $\sup p_\xi = 1$. Тогда $A = \sum_{\xi\eta}^{\oplus}\{p_\xi A p_\eta\}$.*

4. Множество ограниченных элементов $C(A)$ совпадает с A

Лемма 1. *Пусть A — монотонно полная модулярная AJW-алгебра, $[x_n, e_n] \in C(A)$, $f_1 = e_1$, $f_2 = e_2 \Leftrightarrow e_1, \dots$ $f_n = e_n \Leftrightarrow e_{n-1}, \dots$. Тогда $U_{f_k}x_n = U_{f_k}x_{n+m}$ $(k, m, n \in \mathbb{N},\ k \leqslant n)$, $\{f_k x_n f_l\} = \{f_k x_{m+n} f_l\}$ $(k, l, m, n \in \mathbb{N},\ l \leqslant n)$ и $\{f_i x_k f_p\} = \{f_i x_{k+m} f_p\}$ $(i, k, m, p \in \mathbb{N},\ i \leqslant k \leqslant p)$.*

$\lhd$ По определению имеем $e_1x_1 = e_1x_{1+m}$, $U_{e_1}x_1 + \{e_1x_1e_1^\perp\} = U_{e_1}x_{1+m} + \{e_1x_{1+m}e_1^\perp\}$, и отсюда $U_{e_1}x_1 = U_{e_1}x_{1+m}$, $U_{f_1}x_1 = U_{f_1}x_{1+m}$. Из равенства $\{e_1x_1e_1^\perp\} = \{e_1x_{1+m}e_1^\perp\}$ следует, что $\{f_1x_1f_k^\perp\} = \{f_1x_{1+m}f_k^\perp\}$ $(k \neq 1)$. Берем произвольное равенство $e_kx_k = e_kx_{k+m}$. В силу теоремы о пирсовском разложении $U_{e_k}x_k + \{e_kx_ke_k^\perp\} = U_{e_k}x_{k+m} + \{e_kx_{k+m}e_k^\perp\}$. Отсюда $U_{e_k}x_k = U_{e_k}x_{k+m}$ и $U_{f_i}x_k = U_{f_i}x_{k+m}$, $\{f_ix_kf_k\} = \{f_ix_{k+m}f_k\}$ $(i \leqslant k)$. В свою очередь из равенства $\{e_kx_ke_k^\perp\} = \{e_kx_{k+m}e_k^\perp\}$ следует, что $\{f_ix_kf_p\} = \{f_ix_{k+m}f_p\}$ $(i \leqslant k, p \geqslant k)$. $\rhd$

Предложение 2. *Пусть A — монотонно полная модулярная AJW-алгебра. Тогда множество ограниченных элементов йордановой алгебры $C(A)$ совпадает с A.*

$\lhd$ Докажем что, если $[x_n, e_n] \leqslant 1\lambda$, то $[x_n, e_n] \in A$. Берем $\{f_mx_mf_n\}_{m,n=1}^\infty$. Нетрудно заметить, что в силу леммы 1 $\{f_mx_mf_n\}_{m,n=1}^\infty$ удовлетворяет условию определения пирсовского разложения $A = \sum_{n,m}^{\oplus}\{f_nAf_m\}$. Пусть $x = \sum_{n,m}^\infty \sum_{n,m}^\infty \{f_mx_mf_n\}$. Тогда $x \in A$. При этом $[x_n, e_n] \equiv [x, 1]$, т. е. $[x, 1] = [x_n, e_n]$. Отсюда и получим, что $x \in A$. $\rhd$

5. OJ-алгебры

Определение. OJ-алгебру E (см. [9, гл. III]) назовем *универсальной*, если для любого спектрального семейства $\{e_\lambda\}$ в E существует интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda de_\lambda$.

Из теоремы 2, так же, как и в [10], выводится следующее предложение:

Предложение 3. *Пусть A — монотонно полная модулярная AJW-алгебра. Тогда $C(A)$ является OJ-алгеброй.*

Теорема 3. *Для монотонно полной модулярной AJW-алгебры A соответствующая ей OJ-алгебра $C(A)$ универсальна.*

$\lhd$ Пусть $x = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda de_\lambda$. По определению x есть (o)-предел сумм $\sigma = \sum_{-\infty}^{+\infty} \ln(e^x_{\lambda_n} \Leftrightarrow e^x_{\lambda_{n-1}})$, где $\lambda_n > l_n > \lambda_{n-1}$. Ясно, что $\{e_{\lambda_n}\}$ является сильно плотной областью и $e^x_{\lambda_n} x \in A$ для любого $n \in N$. Тогда $[xe^x_{\lambda_n}, e^x_{\lambda_n}]$ является измеримым оператором, спектральное разложение которого есть $\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda de_\lambda$. $\rhd$

Следующую теорему можно доказать также, как теорему 3.2 из [9].

Теорема 4. *Совокупность ограниченных элементов алгебры $S(X, M_3^8)$ это AJW-алгебра $\mathrm{C}(X, M_3^8)$.*

Следующие две теоремы являются очевидными следствиями теоремы 3.3 из [9] и соответственно теорем 3 и 4.

Теорема 5. *Пусть E — OJ-алгебра, у которой JB-алгебра ограниченных элементов изоморфна модулярной AJW-алгебре A. Тогда E изоморфна нормальной OJ-подалгебре универсальной OJ-алгебры $C(A)$ абстрактных измеримых операторов, присоединенных к A.*

Теорема 6. *Пусть E — OJ-алгебра, у которой JB-алгебра ограниченных элементов изоморфна AJW-алгебре $\mathrm{C}(X, M_3^8)$. Тогда E изоморфна нормальной OJ-подалгебре универсальной OJ-алгебры $S(X, M_3^8)$.*

Предложение 4. *Пусть A — монотонно полная AJW-алгебра. Тогда для всякой максимальной сильно ассоциативной подалгебры E_0 алгебры $C(A)$ существует максимальная сильно ассоциативная подалгебра A_0 алгебры A такая, что $C(A_0) = E_0$ и A_0 совпадает с множеством ограниченных элементов E_0.*

$\lhd$ В качестве A_0 берем множество всех ограниченных элементов алгебры E_0. Решетка $P(A_0)$ модулярна. Тогда, если для существенно измеримого оператора $\{x_n, e_n\}$, $\{y_n, f_n\} \in C(A_0)$ имеет место $\{x_n, e_n\} \equiv \{y_n, f_n\}$, то эти существенно измеримые операторы эквивалентны и в A. Таким образом $C(A_0)$ гомоморфно вложится в $C(A)$. Нетрудно проверить, что $C(A_0)$ гомоморфно, но необязательно инъективно вложится в E_0. В то же время, в силу теоремы 5 $E_0 \subseteq C(A_0)$. Отсюда, так как рассмотренные выше гомоморфизмы идентичны, то $E_0 = C(A_0)$. $\rhd$

Предложение 5. *Пусть A — монотонно полная модулярная AJW-алгебра, x, y — элементы алгебры $C(A)$, причем один из x, y положителен. Тогда следующие условия эквивалентны:* a) $x \cdot y = 0$, b) $x^2 \cdot y = 0$, c) $x^2 \cdot y^2 = 0$, d) $r(x) \cdot r(y) = 0$. При выполнении одного из этих условий $x \leftrightarrow y$, т. е. элементы x и y совместны.

$\lhd$ Допустим, что выполнено a). Пусть $x \geqslant 0$ и B — йорданова алгебра, порожденная элементами y и x. По известной теореме Ширшова алгебра B специальна. Тогда $xy = \Leftrightarrow yx$ относительно ассоциативного умножения, и $xyx = \Leftrightarrow yx^2$, $-x^2y = xyx$, т. е. $yx^2 = x^2y$. Отсюда по предложению 5 из [10] $x^2 \leftrightarrow y$ в B. Так как $C(A) = A_{sp} \oplus S(X, M_3^8)$ (теорема 1), то существует центральный проектор z с условиями $A_{sp} = C(zA_{sp})$, $S(X, M_3^8) = \mathrm{C}(A_{ex})$. Пусть x, $y \in A_{sp}$. Тогда $x^2 \leftrightarrow y$ в A_{sp} и существует максимальная сильно ассоциативная подалгебра $A_0 \subseteq A_{sp}$ такая, что $x, y \in A_0$. Имеем $A_0^{\text{огр}}$ — максимальная сильно ассоциативная подалгебра алгебры A. В силу предложения 4 $A_0 = C(A_0^{\text{огр}})$ и существует экстремальный компакт X такой, что $C(A_0^{\text{огр}}) \cong C_\infty(X)$, а следовательно, и $A_0 \cong C_\infty(X)$. Рассмотрим отображение $\phi(t) = \sqrt{x(t)^2}$, $\phi : X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Это отображение непрерывно и так как

$x(t)^2 \in C_\infty(X)$, то $\phi \in C_\infty(X)$. Следовательно, $\sqrt{x^2} = x \in C_\infty(X) = A_0$. Тогда $x \leftrightarrow y$ и $x^2 \cdot y = x \cdot (x \cdot y) = 0$. Итак, доказано, что a)⇒b) при $x, y \in A_{sp}$ и условие a) влечет $x \leftrightarrow y$.

Заметим, что когда $x, y \in S(X, M_3^8)$ и $x \geqslant 0$, то условие $x \cdot y = 0$ равносильно $x^2 \cdot y = 0$, причем $x \leftrightarrow y$. Действительно, $(\forall t \in X)\ x(t)y(t) = 0 \Leftrightarrow x(t)^2 \cdot y(t) = 0$ и $x(t) \leftrightarrow y(t)$ в M_3^8, если $x(t)$, $y(t) < \infty$ (см. [7]). Так как умножение поточечное, то $x^2 \cdot y = 0$ и $x \leftrightarrow y$. Из проведенных выше рассуждений следует, что $x^2 \cdot y = 0$ и $x \leftrightarrow y$ в $C(A)$. Значит, a)⇒b).

Так как a)⇒b) и x, y — произвольные, то b)⇒c). Далее, в силу работы [10] имеют место и остальные утверждения. ▷

Для подмножества $S \subseteq E_+$ йордановой алгебры E обозначим $S^\perp = \{a \in E : U_a s = 0, \forall s \in S\}$. Будем говорить, что E — *йорданова алгебра бэровского типа,* если для всякого $S \subseteq E_+$ существует проектор $e \in E$ такой, что $S^\perp = U_e(E)$.

Теорема 7. *Пусть E — OJ-алгебра, A — JB-алгебра ограниченных элементов алгебры E и A имеет разделяющее семейство нормальных функционалов. Тогда E является йордановой алгеброй бэровского типа.*

◁ По условию теоремы A является JBW-алгеброй. В силу [8] йорданова алгебра $C(A)$ является йордановой алгеброй бэровского типа. Пусть $S_E^\perp = \{a \in E : U_a s = 0, \forall s \in S\}$ для произвольного $S \subseteq E_+$. Ясно, что $S_E^\perp = S^\perp \cap E = U_e(C(A)) \cap E$. Заметим, что $U_e(E) \subseteq U_e(C(A))$ и $U_e(U_e(C(A)) \cap E) = U_e(C(A)) \cap E$. Следовательно, $S_E^\perp = U_e(E)$. ▷

Теорема 8. *Пусть A — монотонно полная модулярная AJW-алгебра. Тогда $C(A)$ является йордановой алгеброй бэровского типа, т. е. для всякого множества $S \subseteq C(A)_+$ существует проектор e такой, что $S^\perp = U_e(C(A))$.*

◁ Поскольку $C(A)$ является OJ-алгеброй, то в силу [10, гл. III] для каждого $a \in C(A)$ существует его носитель $r(a)$ в $C(A)$. Если для произвольного $a \in C(A)$, $a \in S^\perp$, то в силу предложения 5 $a \cdot r(s) = 0$ $(s \in S)$ и, если $f = \sup_{s \in S} r(s)$, то $a \cdot f = 0$. Отсюда $U_{1-f}(C(A)) \subseteq S^\perp$. Пусть $a \in S^\perp$. Докажем, что $a \in U_{1-f}(C(A))$. Имеем $a \cdot f = 0$. Отсюда $(1 \Leftrightarrow f) \cdot a = 0$ и $a \in U_{1-f}(C(A))$. Следовательно, $U_e(C(A)) = S^\perp$, где $e = 1 \Leftrightarrow f$. ▷

Следующий факт доказывается так же, как и теорема 7.

Следствие. *Пусть E — OJ-алгебра, $E_{\text{огр}}$ — модулярная AJW-алгебра ограниченных элементов E. Тогда E — йорданова алгебра бэровского типа.*

Замечание. В работе [11] была построена булевозначная реализация AJW-алгебр. Используя технику можно построить абстрактные измеримые операторы для реализаций AJW-алгебр и перенести результаты о связях между абстрактными измеримыми операторами для JBW-алгебр и абстрактными измеримыми операторами для произвольных AJW-алгебр (см. [8, §5, теоремы 1–3]).

Литература

1. *Berberian S. K.* The regular ring of a finite AW^*-algebra // Ann. of Math.—1957.—V. 65.—P. 224–240.
2. *Berberian S. K.* Note on a theorem of Fuglede and Putnam // Proc. Amer. Math. Soc.—1959.—V. 10.—P. 175–182.

3. *Berberian S. K.* A note on the algebra of mesurable operators of an AW^*-algebra // Tohoku Math. J.—1970.—V. 22.—P. 613–618.
4. *Saito K.* On the algebra of mesurable operators for a general AW^*-algebras. I // Tohoku Math. J.—1969.—V. 21.—P. 249–270.
5. *Saito K.* On the algebra of mesurable operators for a general AW^*-algebras. II // Tohoku Math. J.—1971.—V. 23.—P. 525–534.
6. *Арзикулов Ф. Н.* Об абстрактных JW-алгебрах // Сиб. мат. журн.—1998.—№ 1.—С. 20–27.
7. *Арзикулов Ф. Н.* Об одном аналоге пирсовского разложения // Сиб. мат. журн.—1999.—№ 3.—С. 485–492.
8. *Арзикулов Ф. Н.* Йордановы алгебры абстрактных измеримых операторов для JBW-алгебр // Математические труды ИМ СО РАН.—2000.—Т. 3, №2.—С. 29–70.
9. *Аюпов Ш. А.* Классификация и представление упорядоченных йордановых алгебр.—Ташкент: Фан, 1986.
10. *Сарымсаков Т. А., Аюпов Ш. А., Хаджиев Дж., Чилин В. И.* Упорядоченные алгебры.—Ташкент: Фан, 1983.
11. *Кусраев А. Г.* О структуре AJW-алгебр типа I_2 // Сиб. мат. журн.—1999.—№ 4.—С. 905–917.

г. Андижан *Статья поступила 20 мая 2002 г.*