Владикавказский математический журнал
Апрель–июнь, 2002, Том 4, Выпуск 2

УДК **517**

О РИССОВСКОЙ СУММИРУЕМОСТИ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ ИЗ КЛАССОВ НИКОЛЬСКОГО СО СМЕШАННОЙ НОРМОЙ

В. Г. Созанов

Для непрерывной функции из класса Никольского со смешанной нормой установлена равномерная сходимость на компактах средних Рисса спектрального разложения функции к самой функции.

Каждую точку $x=(x_1,x_2,\dots,x_N)$ N-мерного евклидова пространства E_N будем обозначать в виде пары $(\bar{x}_{N-k},\bar{x}_k)$, где $\bar{x}_{N-k}=(x_1,\dots,x_{N-k})$ и $\bar{x}_k=(x_{N-k+1},\dots,x_N)$. Кроме того, пусть E_{N-k} и E_k — пространства векторов $\bar{x}_{N-k}$ и $\bar{x}_k$ соответственно. Измеримая функция $f(x)$, заданная в E_N, по определению принадлежит пространству со смешанной нормой $L_{(p_1,p_2)}$, если для нее конечно выражение

$$\|f(x)\|_{L_{(p_1,p_2)}(E_N)}=\|\|f(x)\|_{L_{p_1}(E_k)}\|_{L_{p_2}(E_{N-k})}.$$

Если G произвольное измеримое множество в E_N, а $f(x)$ измеримая в G функция, то положим

$$\|f(x)\|_{L_{(p_1,p_2)}(G)}=\|\bar{f}(x)\|_{L_{(p_1,p_2)}(E_N)},$$

где $\bar{f}(x)=f(x)$ при $x\in G$ и $\bar{f}(x)=0$ при $x\in E_N\setminus G$.

Пусть G — произвольная N-мерная область, A — какое-либо неотрицательное самосопряженное расширение оператора Лапласа в области G, $\{E_\lambda\}$ — соответствующее оператору A разложение единицы и $\theta(x,y,\lambda)$ — ядро E_λ, называемое спектральной функцией.

Для каждой функции $f(x)\in L_2(G)$ определим спектральное разложение

$$E_\lambda f(x)=\int\limits_G \theta(x,y,\lambda)f(y)\,dy$$

и его средние Рисса порядка $s\geqslant 0$

$$E_\lambda^s f(x)=\int\limits_0^\lambda \left(1-\frac{t}{\lambda}\right)^s dE_t f(x).$$

В работе В. А. Ильина и Ш. А. Алимова [1] доказано, что достаточным условием равномерной на любом компакте $K\subset G$ сходимости $E_\lambda^s f(x)$ к функции $f(x)\in H_p^\alpha(G)$ при $0\leqslant s<(N-1)/2$, $\alpha>0$, $p\geqslant 1$ является выполнение следующих условий: $\alpha+s\geqslant (N-1)/2$, $p\alpha>N$; доказано также, что эти условия являются окончательными. В частности, выполнение неравенства $p\alpha\leqslant N$ допускает существование неограниченной функции $f(x) \in H_p^\alpha(G)$, средние Рисса которой заведомо не могут сходится к ней равномерно, поскольку разлагаемая функция не является непрерывной.

Случай $p\alpha = N$ при дополнительном требовании непрерывности разлагаемой функции изучался в работе Ш. А. Алимова [2]. Для непрерывной функции, принадлежащей классу Соболева $\overset{\circ}{W}{}_p^l$, там был получен следующий результат.

Если функция $f(x) \in \overset{\circ}{W}{}_p^l(G)$, $lp = N$, является непрерывной в некоторой произвольной подобласти D области G, то для равномерной сходимости на каждом компакте $K \subset D$ средних Рисса $E_\lambda^s f(x)$ достаточно выполнения неравенства $l + s > (N-1)/2$, где $0 \leqslant s < (N-1)/2$, $p \geqslant 1$, $l > 0$.

Для классов Никольского $H_p^\alpha(G)$ аналогичный результат получен в работе Н. Н. Козловой [3].

В работе [4] изучались условия равномерной сходимости средних Рисса спектральных разложений для функций из классов Никольского $H_{(p_1,p_2)}^\alpha$ со смешанной нормой. В ней доказано, что равномерную сходимость на любом компакте $K \subset G$ средних Рисса $E_\lambda^s f(x)$ функции $f(x) \in \overset{0}{H}{}_{(p_1,p_2)}^\alpha(G)$ обеспечивает выполнение условий

$$\alpha = \frac{N-1}{2} - s, \quad \alpha > \frac{k}{p_1} + \frac{N-k}{p_2}.$$

Отметим, что классы $H_{(p_1,p_2)}^\alpha$ определяются аналогично классам H_p^α , при этом вместо нормы L_p берется смешанная норма $L_{(p_1,p_2)}$ (см. [5]). Символом $\overset{\circ}{H}{}_{(p_1,p_2)}^\alpha(G)$ обозначим класс функций, полученный замыканием $C_0^\infty(G)$ по норме $H_{(p_1,p_2)}^\alpha$.

В настоящей работе изучается предельный случай $\alpha = \frac{N-k}{p_2} + \frac{k}{p_1}$ и доказана следующая теорема.

Теорема. *Пусть $N > 2$, G — произвольная N-мерная область, D — произвольная подобласть области G и пусть числа $s \geqslant 0$, $\alpha > 0$, p_1, p_2 связаны соотношениями*

$$\alpha > \frac{M-1}{2} - s; \quad \alpha = \frac{N-k}{p_2} + \frac{k}{p_1}; \quad 2 \leqslant p_1 < p_2, \quad 0 < k < N.$$

Тогда для любой непрерывной в области D функции $f(x) \in \overset{\circ}{H}{}_{(p_1,p_2)}^\alpha(G)$ равномерно на каждом компакте $K \subset D$ выполняется равенство

$$\overline{\lim_{\lambda\to\infty}}\, E_\lambda^s f(x) = f(x).$$

Вначале докажем несколько вспомогательных утверждений.

Введем сферические координаты $(x_0 + r\theta)$ с центром в точке x_0 и обозначим $f^{(m)}(r,\theta)$ производную по радиусу порядка m в направлении θ от функции $f(x)$, через $\widetilde{\Delta}_h^2 f(r,\theta)$ — обозначим вторую разность по радиусу в направлении θ:

$$\widetilde{\Delta}_h^2 f(r,\theta) = f(r+2h,\theta) - 2f(r+h,\theta) + f(r,\theta).$$

Через R — обозначим положительное число, меньшее расстояния от точки x_0 до границы ∂G области G.

Лемма 1. *Пусть* $\alpha = l + \chi$, $l = 0, 1, 2, \ldots$, $0 < \chi \leqslant 1$. *Для любой функции* $f(x) \in H^{\alpha}_{(p_1,p_2)}(E_N)$ *и любого* $h > 0$ *справедливо неравенство*

$$\|\widetilde{\Delta}^2_h f(r,\theta)\|_{L_{(p_1,p_2)}} \leqslant C\, \|f\|_{H^{\alpha}_{(p_1,p_2)}} h^{\chi}.$$

Так как норма $\|\cdot\|_{L_{(p_1,p_2)}}$ принадлежит к классу норм, по отношению к которым для целых функций экспоненциального типа выполняется неравенство Бернштейна (см. [6]), то лемма 1 доказывается так же, как и лемма 3.3 в работе [1].

Введем обозначения

$$\psi(r) = \frac{1}{\omega_N} \int\limits_{\theta} f(x + r\theta)\, d\theta, \quad \varphi_m(r) = r^{m+\chi-1} \psi^{(m)}(r), \quad m = 0, 1, \ldots, l,$$

где ω_N — площадь поверхности N-мерной сферы единичного радиуса.

Лемма 2. *Пусть* $f(x) \in H^{\alpha}_{(p_1,p_2)}(E_N)$, $\alpha = \frac{k}{p_1} + \frac{N-k}{p_2}$ *и пусть* $\frac{N-1}{2} - s = l + \chi$, *где* $0 \leqslant \chi < 1$, $l = 1, 2, \ldots$ *тогда, если* $\alpha > l + \chi$, *то для* $m = 1, 2, \ldots, l$ *и любого* h *из интервала* $0 < h < R$ *равномерно относительно* $x \in E_N$ *справедлива оценка*

$$\int\limits_h^R \big(\varphi_m(r + 2h) - 2\varphi_m(r + h) + \varphi_m(r)\big)\, dr \leqslant C\, \|f\|_{H^{\alpha}_{(p_1,p_2)}} h^{\chi}. \tag{1}$$

$\lhd$ Представим подынтегральную функцию в (1) в виде

$$\begin{aligned}\widetilde{\Delta}^2_h \varphi_m(r) = (r + 2h)^{m+\chi-1} \Big[\psi^{(m)}(r + 2h) - 2\psi^{(m)}(r + h) + \psi^{(m)}(r)\Big]& \\ + 2\psi^{(m)}(r + h) \left[(r + 2h)^{m+\chi-1} + (r + h)^{m+\chi-1}\right]& \\ - \psi^{(m)}(r) \left[(r + 2h)^{m+\chi-1} - r^{m+\chi-1}\right].& \end{aligned} \tag{2}$$

Оценим первое слагаемое в (2). Пусть $r_{N-k} = |\bar{x}_{N-k} - \bar{y}_{N-k}|$, $r_k = |\bar{x}_k - \bar{y}_k|$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} I = \int\limits_h^R (r + 2h)^{m+\chi-1} |\widetilde{\Delta}^2_h \psi^{(m)}|\, dr &\leqslant C \int\limits_{h \leqslant |x-y| \leqslant R} r^{m+\chi-N} |\widetilde{\Delta}^2_h f^{(m)}(y)|\, dy \\ &\leqslant C \left(\int\limits_{\substack{h/\sqrt{2} \leqslant |\bar{x}_{N-k} - \bar{y}_{N-k}| \leqslant R \\ h/\sqrt{2} \leqslant |\bar{x}_k - \bar{y}_k| \leqslant R}} r^{m+\chi-N} |\widetilde{\Delta}^2_h f^{(m)}(y)|\, dy \right. \\ &\quad + \int\limits_{\substack{0 \leqslant |\bar{x}_{N-k} - \bar{y}_{N-k}| \leqslant h/\sqrt{2} \\ h/\sqrt{2} \leqslant |\bar{x}_k - \bar{y}_k| \leqslant R}} r^{m+\chi-N} |\widetilde{\Delta}^2_h f^{(m)}(y)|\, dy \\ &\quad \left. + \int\limits_{\substack{h/\sqrt{2} \leqslant |\bar{x}_{N-k} - \bar{y}_{N-k}| \leqslant R \\ 0 \leqslant |\bar{x}_k - \bar{y}_k| \leqslant h/\sqrt{2}}} r^{m+\chi-N} |\widetilde{\Delta}^2_h f^{(m)}(y)|\, dy \right) = I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

Оценим вначале I_1. Пусть $\varepsilon > 0$ и удовлетворяет неравенствам $\alpha > l + \chi + \varepsilon$, $0 < \lambda + \varepsilon < 1$. Применим неравенство Гёльдера два раза с показателями q_1, q_1' и q_2, q_2', где q_1 и q_2 определяются из условия

$$\frac{k}{q_1} + \frac{N-k}{q_2} = m + \chi + \varepsilon. \tag{3}$$

Получим

$$\begin{aligned} I &\leqslant C\,\|\widetilde{\Delta}_h^2 f^{(m)}(y)\|_{L_{(q_1,q_2)}} \\ &\quad\times \left(\int\limits_{h/\sqrt{2}\leqslant r_{N-k}\leqslant R} \left(\int\limits_{h/\sqrt{2}\leqslant r_k\leqslant R} (r^{m+\chi-N})^{q_1'}\, d\bar{y}_k \right)^{q_2'/q_1'} d\bar{y}_{N-k} \right)^{1/q_2'} \\ &\leqslant C\,\|\widetilde{\Delta}_h^2 f^{(m)}(y)\|_{L_{(q_1,q_2)}} \left(\int\limits_{h/\sqrt{2}\leqslant r_{N-k}\leqslant R} \frac{d\bar{y}_{N-k}}{r^{N-k+\varepsilon q_2'/2}} \right)^{1/q_2'} \\ &\quad\times \left(\int\limits_{\alpha/\sqrt{2}\leqslant r_k\leqslant R} \frac{d\bar{y}_k}{r_k^{k+\varepsilon q_1'/2}} \right)^{1/q_1'} \leqslant C\,\|\widetilde{\Delta}_h^2 f^{(m)}(y)\|_{L_{(q_1,q_2)}} h^{-\varepsilon}. \end{aligned}$$

Из леммы 1 и вложения $H^{\alpha}_{(p_1,p_2)} \to H^{m+\chi+\varepsilon}_{(q_1,q_2)}$, справедливого в силу (3), имеем

$$I_1 \leqslant C\,\|f\|_{H^{\alpha}_{(p_1,p_2)}} h^{\chi}.$$

Интегралы I_2 и I_3 оцениваются одинаково. Рассмотрим, например, I_2. Выберем q_1 и q_2 так, чтобы выполнялось условие $m = k/q_1 - (N-k)/q_2$. Как и при оценке I_1, получим

$$\begin{aligned} I_2 &\leqslant C\,\|\widetilde{\Delta}_h^2 f^{(m)}(y)\|_{L_{(q_1,q_2)}} \\ &\quad\times \left(\int\limits_{0\leqslant r_{N-k}\leqslant h/\sqrt{2}} \left(\int\limits_{h/\sqrt{2}\leqslant r_k\leqslant R} (r^{m+\chi-N})^{q_1'}\, d\bar{y}_k \right)^{q_2'/q_1'} d\bar{y}_{N-k} \right)^{1/q_2'} \\ &\leqslant C\,\|\widetilde{\Delta}_h^2 f^{(m)}(y)\|_{L_{(q_1,q_2)}} h^{\chi} \leqslant C\,\|f\|_{H^{\alpha}_{(p_1,p_2)}} h^{\chi}. \end{aligned}$$

Второе и третье слагаемые в (2) оцениваются одинаково. Рассмотрим третье слагаемое. Учитывая оценку $(r+2h)^{m+\chi-1} - r^{m+\chi-1} \leqslant Chr^{m+\chi-2}$, справедливую при $h < r$

(см. [3]), достаточно оценить интеграл

$$h\int\limits_h^R r^{m+\chi-2}|\psi^{(m)}(r)|\,dr \leqslant h\int\limits_{h\leqslant|x-y|\leqslant R} r^{m+\chi-N-1}|f^{(m)}(y)|\,dy$$

$$\leqslant h\int\limits_{\substack{h/\sqrt{2}\leqslant|\bar{x}_k-\bar{y}_k|\leqslant R\\ h/\sqrt{2}\leqslant|\bar{x}_{N-k}-\bar{y}_{N-k}|\leqslant R}} r^{m+\chi-N-1}|f^{(m)}(y)|\,dy$$

$$+\,h\int\limits_{\substack{0\leqslant|\bar{x}_k-\bar{y}_k|\leqslant h/\sqrt{2}\\ h/\sqrt{2}\leqslant|\bar{x}_{N-k}-\bar{y}_{N-k}|\leqslant R}} r^{m+\chi-N-1}|f^{(m)}(y)|\,dy$$

$$+\,h\int\limits_{\substack{\alpha/\sqrt{2}\leqslant|\bar{x}_k-\bar{y}_k|\leqslant R\\ 0\leqslant|\bar{x}_{N-k}-\bar{y}_{N-k}|\leqslant h/\sqrt{2}}} r^{m+\chi-N-1}|f^{(m)}(y)|\,dy = I_1'+I_2'+I_3'.$$

Применяя оценку

$$\|f^{(m)}(x_0+r\theta)\|_{L_{(q_1,q_2)}} \leqslant C\,\|f\|_{H^\alpha_{(p_1,p_2)}}, \quad m=1,2,\dots,l, \tag{4}$$

справедливую при $\alpha-k/p_1-(N-k)/p_2=m-k/q_1-(N-k)/q_2$, $q_i>p_i$, $i=1,2$, и неравенство Гёльдера, как и для I_i, $i=1,2,3$, доказываются оценки

$$|I_i'|\leqslant C\,\|f\|_{H^\alpha_{(p_1,p_2)}}h^\chi. \ \rhd$$

Лемма 3. *Пусть $f\in C_0^\infty(E_N)$, $l+\chi=(N-1)/2-s$, $0\leqslant\chi<1$, $l=0,1,\dots$. Тогда, если $\alpha=k/p_1+(N-k)/p_2$ и $\alpha>l+\chi$, то при $l\geqslant 0$ для любого h из интервала $0<h<R$ справедлива оценка*

$$\int\limits_h^R \big|\varphi_0(r+2h)-2\varphi_0(r+h)+\varphi_0(r)\big|\,dr \leqslant C\,\Big[\|f\|_{H^\alpha_{(p_1,p_2)}}+\|f\|_{L_\infty}\Big]\,h^\chi.$$

$\lhd$ Доказательство следует из леммы 2 и рассуждений, приведенных при доказательстве леммы 3 в работе [3]. $\rhd$

Лемма 4. *Пусть $\alpha=k/p_1+(N-k)/p_2$, $2\leqslant p_1<p_2$, $0<k<N$, $\alpha+s>(N-1)/2$. Тогда для любой непрерывной в замкнутой области $\overline{D}$ функции $f(x)\in\overset{\circ}{H}{}^\alpha_{(p_1,p_2)}(G)$ справедливо неравенство*

$$|E_\lambda^s f(x)|\leqslant C\,\left[\|f\|_{\overset{\circ}{H}{}^\alpha_{(p_1,p_2)}(G)}+\|f\|_{C(\overline{D})}\right], \quad C \text{ — } const,$$

равномерное на каждом компакте $K\subset D$.

$\triangleleft$ В работе [1] для средних Рисса получено следующее представление

$$E^s_\lambda f(x) = \lambda^{\chi/2} \sum_{m=0}^{l} \overline{A}_{ml} \int\limits_0^R V(r\sqrt{\lambda})\varphi_m(r)\,dr + O(1)\|f\|_{H_2^\alpha},$$

где $V(r\sqrt{\lambda}) = (r\sqrt{\lambda})^{1/2} J_{\frac{N}{2}+s-l}$, J_ν — функция Бесселя порядка ν, $\overline{A}_{ml}$ — некоторые постоянные.

Поскольку $2 \leqslant p_1 < p_2$, то из вложения $H^\alpha_{(p_1,p_2)} \to H^\alpha_2$ следует, что последнее равенство может быть записано в виде

$$E^s_\lambda f(x) = \lambda^{\chi/2} \sum_{m=0}^{l} \overline{A}_{ml} \int\limits_0^R V(r\sqrt{\lambda})\varphi_m(r)\,dr + O(1)\|f\|_{H^\alpha_{(p_1,p_2)}}.$$

Так как множество функций $C_0^\infty(G)$ является плотным в классе $\overset{\circ}{H}{}^\alpha_{(p_1,p_2)}(G)$, то для доказательства леммы достаточно получить для функции из $C_0^\infty(G)$ оценку

$$\left|\int\limits_0^R V(r\sqrt{\lambda})\varphi_m(r)\,dr\right| \leqslant C\,\left[\|f\|_{H^\alpha_{(p_1,p_2)}} + \|f\|_{L\infty}\right]\lambda^{-\chi/2}. \tag{5}$$

Представим интеграл в левой части (5) в виде

$$\int\limits_0^R = \int\limits_0^{\pi/\sqrt{\lambda}} + \int\limits_{\pi/\sqrt{\lambda}}^R = I_1^m + I_2^m.$$

Оценим первое слагаемое при $m = 1, 2, \dots, l$. Применив (4), оценку $|J_\nu(x)| \leqslant x^\nu$ и неравенство Гёльдера, получим

$$\begin{aligned}
|I_1^m| \leqslant & \int\limits_0^{\pi/\sqrt{\lambda}} |V(r\sqrt{\lambda})||\varphi_m(r)|\,dr \leqslant \int\limits_0^{\pi/\sqrt{\lambda}} r^{m+\chi-1}|V(r\sqrt{\lambda})||\psi^{(m)}(r)|\,dr \\
& \leqslant \|f^{(m)}(y)\|_{L_{(q_1,q_2)}} \left(\int\limits_{0\leqslant|\bar{x}_{N-k}-\bar{y}_{N-k}|\leqslant\pi/\sqrt{\lambda}} \left(\int\limits_{0\leqslant|\bar{x}_k-\bar{y}_k|\leqslant\pi/\sqrt{\lambda}} r^{(m+\chi-N)q_1'} \right.\right. \\
& \quad \times \left.\left. (r\sqrt{\lambda})^{(\frac{N+1}{2}+s-l)q_1'}\,d\bar{y}_k \right)^{q_2'/q_1'} d\bar{y}_{N-k} \right)^{1/q_2'} \\
& \leqslant C\,\|f\|_{H^\alpha_{(p_1,p_2)}} \left(\int\limits_{0\leqslant|\bar{x}_k-\bar{y}_k|\leqslant\pi/\sqrt{\lambda}} \frac{d\bar{y}_k}{r_k^{k-\chi q_1'/2}} \right)^{1/q_1'} \\
& \left(\int\limits_{0\leqslant|\bar{x}_{N-k}-\bar{y}_{N-k}|\leqslant\pi/\sqrt{\lambda}} \frac{d\bar{y}_{N-k}}{r_{N-k}^{N-k-\chi q_2'/2}} \right)^{1/q_2'} \leqslant C\lambda^{-\chi/2}\|f\|_{H^\alpha_{(p_1,p_2)}}.
\end{aligned} \tag{6}$$

При $m = 0$ применим оценку (см. [3])

$$|I_1^0| \leqslant C\,\lambda^{-\chi/2}\|f\|_{L_\infty}. \tag{7}$$

Объединив оценки (6) и (7), получим

$$|I_1^m| \leqslant \begin{cases} c\,\|f\|_{H^\alpha_{(p_1,p_2)}}\lambda^{-\chi/2}, & m = 1, 2, \ldots, l, \\ c\,\|f\|_{L_\infty}\lambda^{-\chi/2}, & m = 0. \end{cases}$$

Для оценки I_2^m представим подынтегральную функцию в виде

$$\varphi_m(r)V(r\sqrt{\lambda}) = \frac{1}{4}\Big[V(r\sqrt{\lambda} + 2\pi) - 2V(r\sqrt{\lambda} + \pi) \\ + V(r\sqrt{\lambda})\Big]\,\varphi_m(r) + \varphi_m(r)\beta(R\sqrt{\lambda}),$$

где

$$\beta(t) = \frac{1}{4}\left[2V(t+\pi) + 3V(t) - 2V(t + 2\pi)\right].$$

Справедлива оценка (см. [3]) $\beta(t) = O(t^{-1})$. Следовательно,

$$|I_2^m| \leqslant \left|\int\limits_{\pi/\sqrt{\lambda}}^{R} \varphi_m(r)V(r\sqrt{\lambda})\,dr\right| \\ \leqslant \frac{1}{4}\left|\int\limits_{\pi/\sqrt{\lambda}}^{R} \widetilde{\Delta}_h^2 V(r\sqrt{\lambda})\varphi_m(r)\,dr\right| + \left|\int\limits_{\pi/\sqrt{\lambda}}^{R} |\beta(r\sqrt{\lambda})||\varphi_m(r)|\,dr\right|. \tag{9}$$

Для оценки второго слагаемого в (9) при $m > 0$ применим (4) и неравенство Гёльдера:

$$\int\limits_{\pi/\sqrt{\lambda}}^{R} |\beta(r\sqrt{\lambda})||\varphi_m(r)|\,dr \leqslant \frac{c}{\sqrt{\lambda}}\int\limits_{\pi/\sqrt{\lambda}}^{R} r^{m+\chi-2}|\psi^{(m)}(r)|\,dr \\ \leqslant \frac{c}{\sqrt{\lambda}}\|f^{(m)}\|_{L_{(q_1,q_2)}}\|r^{m+\chi-N-1}\|_{L_{(q_1',q_2')}} \leqslant C\lambda^{-\chi/2}\|f\|_{H^\alpha_{(p_1,p_2)}}.$$

При $m = 0$ применим оценку

$$\int\limits_{\pi/\sqrt{\lambda}}^{R} |\beta(r\sqrt{\lambda})||\varphi_0(r)|\,dr \leqslant c\,\|f\|_{L\infty}\lambda^{-\chi/2}.$$

Оценим первый интеграл в (9)

$$\begin{aligned}
&\left| \int\limits_{\pi/\sqrt{\lambda}}^{R} \widetilde{\Delta}_h^2 V(r\sqrt{\lambda})\varphi_m(r)\,dr \right| \\
&\quad = \left| \int\limits_{\pi/\sqrt{\lambda}}^{R} V(r\sqrt{\lambda}+2\pi)\left[\varphi_m\left(r+\frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}}\right) - 2\varphi_m\left(r+\frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}\right) + \varphi_m(r)\right] dr \right. \\
&\qquad + \int\limits_{\pi/\sqrt{\lambda}}^{3\pi/\sqrt{\lambda}} V(r\sqrt{\lambda})\varphi_m(r)\,dr - 2\int\limits_{\pi/\sqrt{\lambda}}^{2\pi/\sqrt{\lambda}} V(r\sqrt{\lambda}+\pi)\varphi_m(r)\,dr \\
&\qquad\qquad \left. - \int\limits_{R}^{R+2\pi/\sqrt{\lambda}} V(r\sqrt{\lambda})\varphi_m(r)\,dr + 2\int\limits_{R}^{R+\pi/\sqrt{\lambda}} V(r\sqrt{\lambda}+\pi)\varphi_m(r)\,dr \right|.
\end{aligned}$$

Первый интеграл в этой сумме оценивается с помощью лемм 2, 3. Остальные интегралы оцениваются повторением оценок (8). $\rhd$

После доказательства леммы 4 доказательство теоремы проводится по стандартной схеме с использованием того, что эта теорема справедлива для функции из C_0^∞ и множество таких функций плотно в $\overset{\circ}{H}{}^{\alpha}_{(p_1,p_2)}(G) \cap C(\overline{D})$.

Литература

1. *Алимов Ш. А., Ильин В. А.* I. Условия сходимости спектральных разложений, отвечающих самосопряженным расширениям эллиптических операторов. II. Самосопряженное расширение оператора Лапласа с произвольным спектром // Дифференц. уравнения.—1971.—Т. 7, № 5.—С. 851–882.
2. *Алимов Ш. А.* О разложимости непрерывных функций из класса Соболева по собственным функциям оператора Лапласа // Сиб. мат. журн.—1978.—Т. 19, № 4.—С. 721–734.
3. *Козлова Н. Н.* О риссовской суммируемости непрерывных функций из классов Никольского // Дифференц. уравнения.—1984.—Т. 20, № 1.—С. 46–56.
4. *Созанов В. Г.* О равномерной сходимости спектральных разложений из $H^{\alpha}_{(p_1,p_2)}$ // Дифференц. уравнения.—1984.—Т. 20, № 1.—С. 124–128.
5. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения.—М.: Наука, 1975.
6. *Никольский С. М.* Об одной задаче С. Л. Соболева // Сиб. мат. журн.—1962.—Т. 3, № 6.—С. 845–851.

Владикавказ *Статья поступила 15 апреля 2002 г.*