*Владикавказский математический журнал*
*Апрель–июнь, 2002, Том 4, Выпуск 2*

*УДК* **517.549.8**

# О СХОДИМОСТИ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С НЕЛОКАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ

**Э. Г. Олисаев, М. М. Лафишева**

Рассматривается краевая задача для уравнения параболического типа в цилиндрических координатах с нелокальным условием на правой границе. Для решения рассматриваемой задачи построена разностная схема и доказана сходимость полученной схемы со скоростью $O(h^{\frac{3}{2}}+\tau^2)$.

**1. Постановка задачи.** В области $Q_T=\{(x,t):\ \ 0<x<l,\ 0<t<T\}$ рассмотрим задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left(xk(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right)-qu+f,\quad 0<x<l,\quad 0<t\leqslant T, \tag{1}$$

$$\lim_{x\to 0}xk\frac{\partial u}{\partial x}=0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^l xu\,dx=\mu(t), \tag{3}$$

$$u(x,0)=u_0(x), \tag{4}$$

где $k(x,t)\geqslant c_1>0$, $|q|\leqslant c_2$, $q(0,t)\geqslant c_3>0$, $k(x,t)\in C^{(3,0)}(Q_T)$, $q(x,t)$, $f(x,t)\in C^{(2,0)}(Q_T)$, а $C^{(m,n)}(Q_T)$ — класс функций, определенных и непрерывных вместе со своими производными до порядка $m$ включительно по $x$ и до порядка $n$ по $t$ в области $Q_T$.

Нелокальное условие типа (3) впервые возникло в теории влагопереноса [1]. Пользуясь уравнением (1), условие (3) можно переписать иначе:

$$-k\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=l}=-\frac{1}{l}\int\limits_0^l xqu(x,t)dx+\mu_1(t), \tag{$3'$}$$

где $\mu_1(t)=\int\limits_0^l xf(x,t)dx-\mu(t)$.

Итак, мы будем заниматься в дальнейшем задачей (1), (2), (3′), (4).

**2. Разностная схема.** Введем в замкнутой области $\overline{Q}_T$ сетку $\omega_h \times \omega_\tau$, где $\omega_h = \{x_i = ih,\ i = 1, 2, \ldots, N-1,\ Nh = l\}$, $\omega_\tau = \{t_j = j\tau,\ j = 0, 1, \ldots, j_0,\ j_0\tau = T\}$.

При написании дискретного аналога условия ограниченности (2) мы следуем методике [2]. Дифференциальной задаче (1), (2), (3′), (4) поставим в соответствие разностную схему

$$
\begin{aligned}
&y_t = \Lambda(\bar t)y^{(\sigma)} + \varphi \qquad \big((x,t)\in\omega_h\times\omega_\tau\big),\\
&y_{t,0} = \frac{a_1 y^{(\sigma)}_{x,0} - h^* d_0 y^{(\sigma)}_0}{h^*} + \bar f_0 \quad (t\in\omega_\tau),\\
&y_{t,N} = -\frac{a_N y^{(\sigma)}_{\bar x,N} + 0,5hd_N y^{(\sigma)}_N}{0,5h} + \frac{1}{0,5h\kappa_1 l}\sum_{i=0}^{N} x_i d_i y^{(\sigma)}_i \hbar + \bar f_N - \frac{\mu_1(\bar t)}{0,5h\kappa_1} \quad (t\in\omega_\tau),\\
&y(x,0) = u_0(x) \quad (x\in\omega_h),
\end{aligned}
\tag{5}
$$

где $\Lambda(\bar t)y = \frac{1}{x}\left(\bar x a y_{\bar x}\right)_x - dy$, $h^* = \frac{h}{4}$, $\kappa_1 = \frac{l}{l+0,5h}$, $\hbar = \begin{cases} \dfrac{h}{2}, & i = N,\\ h, & i \neq N.\end{cases}$

Обозначим через $z = y - u$ погрешность метода. Тогда для $z$ получим задачу

$$z_t = \Lambda(\bar t)z^{(\sigma)} + \psi,$$

$$z_{t,0} = \frac{a_1 z^{(\sigma)}_{x,0} - h^* d_0 z^{(\sigma)}_0}{h^*} + \frac{\nu_1}{h^*},$$

$$z_{t,N} = -\frac{a_N z^{(\sigma)}_{\bar x,N} + 0,5hd_N z^{(\sigma)}_N}{0,5h} + \frac{1}{0,5h\kappa_1 l}\sum_{i=0}^{N} x_i d_i z^{(\sigma)}_i \hbar + \frac{\nu_2}{0,5h},$$

$$z(x,0) = 0,$$

где $\psi = \frac{1}{x_i}\left(\bar x_i \eta\right)_x + \bar\psi + \psi^*$, $\eta = O(h^2 + \tau^{m_\sigma})$, $\bar\psi = O\left(\frac{h^2}{x}\right)$, $\psi^* = O(h^2 + \tau^{m_\sigma})$, $\nu_1 = O(h^2 + \tau^{m_\sigma})$, $\nu_2 = O(h^2 + \tau^{m_\sigma})$.

Положим $\sigma = \frac{1}{2}$ и перепишем задачу для погрешности в виде

$$z_t = 0,5\bar\Lambda(\hat z + z) + \Psi, \tag{6}$$

где

$$
\bar\Lambda(\hat z + z) = \begin{cases}
\Lambda(\hat z + z) = \dfrac{1}{x}\Big(\bar x a(\hat z + z)_{\bar x}\Big)_x - d(\hat z + z), & x\in\omega_h;\\[2mm]
\Lambda^-(\hat z + z) = \dfrac{a_1(\hat z + z)_{\bar x,1} - h^* d_0(\hat z + z)_0}{h^*}, & x = 0;\\[2mm]
\Lambda^+(\hat z + z) = -\dfrac{a_N(\hat z + z)_{\bar x,N} + 0,5hd_N(\hat z + z)_N}{0,5h} & \\[2mm]
\qquad\qquad + \dfrac{1}{0,5h\kappa_1 l}\displaystyle\sum_{i=1}^{N} x_i d_i(\hat z + z)_i\hbar, & x = l,
\end{cases}
$$

$$\Psi=\begin{cases}\psi, & x\in\omega_h;\\ \dfrac{\nu_1}{h^*}, & x=0;\\ \dfrac{\nu_2}{0,5h}, & x=l,\end{cases}.$$

Введем скалярное произведение $(u,v]=\sum\limits_{i=1}^{N}u_iv_i\hbar,$ и норму $\|u]|_0^2=\sum\limits_{i=1}^{N}u_i^2\hbar.$

Априорную оценку для решения задачи (6) получим методом энергетических неравенств, для чего умножим уравнение (6) скалярно на $x(\hat z+z)$ :

$$\big(z_t,x(\hat z+z)\big]-0,5\Big(\bar\Lambda(\hat z+z),x(\hat z+z)\Big]=\big(\Psi,x(\hat z+z)\big]. \tag{7}$$

Преобразуем суммы, входящие в тождество (7)

$$\big(z_t,x(\hat z+z)\big]=\Big(\|x^{\frac12}z]|_0^2\Big)_t,$$

$$0,5\Big(\bar\Lambda(\hat z+z),x(\hat z+z)\Big]=0,5\Big(\Lambda(\hat z+z),x(\hat z+z)\Big)+0,5\Lambda^+(\hat z+z)\frac{h}{2}x_N(\hat z+z)_N$$

$$=\frac12\Big(\left(\bar xa(\hat z+z)_{\bar x}\right)_x,\hat z+z\Big)-\frac12\big(xd,(\hat z+z)^2\big)+\frac12\Big(-a_N(\hat z+z)_{\bar x,N}-\frac{h}{2}d_N(\hat z+z)_N\Big)x_N(\hat z+z)_N$$

$$+\frac{(\hat z+z)_N}{2\kappa_1}\sum_{i=1}^{N}x_id_i(\hat z+z)_i\hbar=\frac12\Big(\left(\bar xa(\hat z+z)_{\bar x}\right)_x,\hat z+z\Big)-\frac12\big(xd,(\hat z+z)^2\big]$$

$$-\frac12a_N(\hat z+z)_{\bar x,N}x_N(\hat z+z)_N+\frac{(\hat z+z)_N}{2\kappa_1}\sum_{i=1}^{N}x_id_i(\hat z+z)_i\hbar=-\frac12\Big(\bar xa,(\hat z+z)_{\bar x}^2\Big]-\frac12\big(xd,(\hat z+z)^2\big]$$

$$-\bar x_1\Big(\frac{h}{2}d_0(\hat z+z)_0+\frac{h^*}{2}z_{t,0}-\frac{\nu_1}{2}\Big)(\hat z+z)_0+\frac12\bar x_Na_N(\hat z+z)_{\bar x,N}(\hat z+z)_N-\frac12x_Na_N(\hat z+z)_{\bar x,N}(\hat z+z)_N$$

$$+\frac{(\hat z+z)_N}{2\kappa_1}\sum_{i=1}^{N}x_id_i(\hat z+z)_i\hbar=-\frac12\Big(\bar xa,(\hat z+z)_{\bar x}^2\Big]-\frac12\big(xd,(\hat z+z)^2\big]$$

$$-\bar x_1\Big(\frac{h}{2}d_0(\hat z+z)_0+\frac{h^*}{2}z_{t,0}-\frac{\nu_1}{2}\Big)(\hat z+z)_0+\frac12x_Na_N(\hat z+z)_{\bar x,N}(\hat z+z)_N$$

$$-\frac{h}{4}(\hat z+z)_N\Big(-\frac{h}{2}d_N(\hat z+z)_N-\frac{h}{2}z_{t,N}+\frac{1}{\kappa_1l}\sum_{i=1}^{N}x_id_i(\hat z+z)_i\hbar+\nu_2\Big)$$

$$-\frac12x_Na_N(\hat z+z)_{\bar x,N}(\hat z+z)_N+\frac{(\hat z+z)_N}{2\kappa_1}\sum_{i=1}^{N}x_id_i(\hat z+z)_i\hbar$$

$$=-\frac12\Big(\bar xa,(\hat z+z)_{\bar x}^2\Big]-\frac12\big(xd,(\hat z+z)^2\big]-\frac{h^*}{2}\bar x_1d_0(\hat z+z)_0^2-\frac{h^*}{2}\bar x_1z_{t,0}(\hat z+z)_0+\frac12\bar x_1\nu_1(\hat z+z)_0$$

$$+\frac{h^2}{8}d_N(\hat z+z)_N^2+\frac{h^2}{8}z_{t,N}(\hat z+z)_N+\Big(1-\frac{h}{2l}\Big)\frac{(\hat z+z)_N}{2\kappa_1}\sum_{i=1}^{N}x_id_i(\hat z+z)_i\hbar-\frac{h}{4}\nu_2(\hat z+z)_N,$$

$$\Big(\Psi, x(\hat{z}+z)\Big] = \Big(\psi, x(\hat{z}+z)\Big) + \nu_2 x_N (\hat{z}+z)_N.$$

Подставим полученные выражения в тождество (7)

$$\Big(\|x^{\frac{1}{2}} z]|_0^2\Big)_t + 0,5\Big(\bar{x}a, (\hat{z}+z)_{\bar{x}}^2\Big] + 0,5\big(xd, (\hat{z}+z)^2\big] + \frac{\bar{x}_1 h^* d_0}{2}(\hat{z}+z)_0^2 + \frac{\bar{x}_1 h^*}{2} z_{t,0}(\hat{z}+z)_0$$

$$= \frac{\bar{x}_1}{2}\nu_1(\hat{z}+z)_0 + + \frac{h^2}{8} d_N (\hat{z}+z)_N^2 + \frac{h^2}{8} z_{t,N}(\hat{z}+z)_N + \Big(1 - \frac{h}{2l}\Big)\frac{(\hat{z}+z)_N}{2\kappa_1}\sum_{i=1}^{N} x_i d_i (\hat{z}+z)_i \hbar$$

$$-\Big(\psi, x(\hat{z}+z)\Big) + \Big(l - \frac{h}{4}\Big)\nu_2(\hat{z}+z)_N. \tag{8}$$

Оценим слагаемые, входящие в (8)

$$\frac{\bar{x}_1}{2}\nu_1(\hat{z}+z)_0 = \frac{\bar{x}_1}{2}\sqrt{d_0}(\hat{z}+z)_0 \cdot \frac{\nu_1}{\sqrt{d_0}} \leqslant \frac{h^2}{16} d_0 (\hat{z}+z)_0^2 + \frac{\nu_1^2}{4d_0},$$

$$\Big(1 - \frac{h}{2l}\Big)\frac{(\hat{z}+z)_N}{2\kappa_1}\sum_{i=1}^{N} x_i d_i (\hat{z}+z)_i \hbar \leqslant \frac{1}{2}(\hat{z}+z)_N^2 + \frac{c_2^2 l^2}{2}\|x^{\frac{1}{2}}(\hat{z}+z)]|_0^2,$$

$$\Big(l - \frac{h}{4}\Big)\nu_2(\hat{z}+z)_N \leqslant \frac{l}{2}\nu_2^2 + \frac{l}{2}(\hat{z}+z)_N^2,$$

$$\Big(\psi, x(\hat{z}+z)\Big) \leqslant \frac{1}{2}\|x^{\frac{1}{2}}\psi\|_0^2 + \frac{1}{2}\|x^{\frac{1}{2}}(\hat{z}+z)]|_0^2.$$

Учитывая полученные оценки, из (8) получаем

$$\Big(\|x^{\frac{1}{2}} z]|_0^2\Big)_t + 0,5c_1\|\bar{x}^{\frac{1}{2}}(\hat{z}+z)_{\bar{x}}]|_0^2 + \frac{h^2}{16}\big(z^2\big)_{t,0} \leqslant \Big(\frac{l+1}{2} + \frac{c_2}{8}\Big)(\hat{z}+z)_N^2$$

$$+\Big(\frac{c_2^2 l^2 + c_2 + 1}{2}\Big)\|x^{\frac{1}{2}}(\hat{z}+z)]|_0^2 + \frac{1}{2}\|x^{\frac{1}{2}}\psi\|_0^2 + \frac{\nu_1^2}{4d_0} + \frac{l}{2}\nu_2^2\frac{h^2}{8}\big(z^2\big)_{t,N}. \tag{9}$$

Займемся оценкой величины $(\hat{z}+z)_N^2$. Возьмем на отрезке $[0,l]$ произвольную точку $\overset{*}{x} \in (0,l)$. Пусть $\overset{*}{x}$ совпадает с одним из узлов сетки $\omega_h$, причем потребуем, чтобы точка $x = \overset{*}{x}$ была общей для всей последовательности сеток.

Имеет место следующая

***Лемма.*** *Для любой функции $v(x)$, заданной на сетке $\bar{\omega}_h = \{x_i = ih, \quad i = 1,2,\ldots,N\}$, справедливо неравенство*

$$\max_{\overset{*}{x}\leqslant x\leqslant l} v^2(x) \leqslant \frac{\varepsilon}{\overset{*}{x}}\|x^{\frac{1}{2}} v_{\bar{x}}]|_0^2 + \frac{1}{\overset{*}{x}}\Big(\frac{1}{l-\overset{*}{x}} + \frac{1}{\varepsilon}\Big)\|x^{\frac{1}{2}} v]|_0^2.$$

$\triangleleft$ Доказательство леммы будем проводить по аналогии с [4]. Запишем представление

$$v^2(x_i) = v^2(\xi_i) + \sum_{\zeta_i=\xi_{i+1}}^{x_i} \left(v^2(\zeta_i)\right)_{\bar{x}} h$$

$$= v^2(\xi_i) + 2\sum_{\zeta_i=\xi_{i+1}}^{x_i} v(\zeta_i)v_{\bar{x}}(\zeta_i)h - \sum_{\zeta_i=\xi_{i+1}}^{x_i} hv^2_{\bar{x}}(\zeta_i)h, \quad \overset{*}{x} \leqslant \xi_i \leqslant x_i.$$

Отсюда имеем

$$v^2(x_i) \leqslant v^2(\xi_i) + \varepsilon \sum_{\zeta_i=\xi_{i+1}}^{x_i} v^2_{\bar{x}}(\zeta_i)h + \frac{1}{\varepsilon}\sum_{\zeta_i=\xi_{i+1}}^{x_i} v^2(\zeta_i)h$$

$$\leqslant \frac{1}{\overset{*}{x}} v^2(\xi_i)\xi_i + \frac{\varepsilon}{\overset{*}{x}}\sum_{i=1}^{N} x_i v^2_{\bar{x}}(x_i)h + \frac{1}{\varepsilon\,\overset{*}{x}}\sum_{i=1}^{N} x_i v^2(x_i)h. \tag{10}$$

Просуммируем (10) по $\xi_i$ от $\overset{*}{x}$ до $x_N = l$ :

$$(l-\overset{*}{x})v^2(x_i) \leqslant \frac{1}{\overset{*}{x}}\sum_{\xi_i=\overset{*}{x}}^{x_N} \xi_i v^2(\xi_i)h + \frac{\varepsilon(l-\overset{*}{x})}{\overset{*}{x}}\sum_{i=1}^{N} x_i v^2_{\bar{x}}(x_i)h + \frac{(l-\overset{*}{x})}{\varepsilon\,\overset{*}{x}}\sum_{i=1}^{N} x_i v^2(x_i)h$$

$$\leqslant \frac{1}{\overset{*}{x}}\left(1+\frac{l-\overset{*}{x}}{\varepsilon}\right)\|x^{\frac{1}{2}}v]|_0^2 + \frac{\varepsilon(l-\overset{*}{x})}{\overset{*}{x}}\|x^{\frac{1}{2}}v_{\bar{x}}]|_0^2.$$

Откуда следует

$$\max_{\overset{*}{x}\leqslant x\leqslant l} v^2(x) \leqslant \frac{\varepsilon}{\overset{*}{x}}\|x^{\frac{1}{2}}v_{\bar{x}}]|_0^2 + \frac{1}{\overset{*}{x}}\left(\frac{1}{l-\overset{*}{x}}+\frac{1}{\varepsilon}\right)\|x^{\frac{1}{2}}v]|_0^2.$$

На основании леммы имеем

$$(\hat{z}+z)_N^2 \leqslant \frac{\varepsilon}{\overset{*}{x}}\|x^{\frac{1}{2}}(\hat{z}+z)_{\bar{x}}]|_0^2 + \frac{1}{\overset{*}{x}}\left(\frac{1}{l-\overset{*}{x}}+\frac{1}{\varepsilon}\right)\|x^{\frac{1}{2}}(\hat{z}+z)]|_0^2. \tag{11}$$

Учитывая неравенство (11) и оценку $\|x^{\frac{1}{2}}(\hat{z}+z)_{\bar{x}}]|_0^2 \leqslant 2\|\bar{x}^{\frac{1}{2}}(\hat{z}+z)_{\bar{x}}]|_0^2$, из (9) получим

$$\left(\|x^{\frac{1}{2}}z]|_0^2\right)_t + M_1\|\bar{x}^{\frac{1}{2}}(\hat{z}+z)_{\bar{x}}]|_0^2 + \frac{h^2}{16}\left(z^2\right)_{t,0}$$

$$\leqslant M_2\|x^{\frac{1}{2}}(\hat{z}+z)]|_0^2 + \frac{1}{2}\|x^{\frac{1}{2}}\psi]|_0^2 + \frac{\nu_1^2}{4d_0} + \frac{l}{2}\nu_2^2 + \frac{h^2}{8}\left(z^2\right)_{t,N}. \tag{12}$$

где $M_1 = 0,5c_1 - \frac{2\varepsilon}{\overset{*}{x}} > 0$ при достаточно малом $\varepsilon$, $M_2 = \left(\frac{l+1}{2}+\frac{c_2}{8}\right)\left(\frac{1}{l-\overset{*}{x}}+\frac{1}{\varepsilon}\right)\frac{1}{\overset{*}{x}} + \frac{c_2^2l^2+c_2+1}{2} > 0$.

Просуммируем (12) по $j'$ от 0 до $j$ :

$$\|x^{\frac{1}{2}} z^{j+1}]|_0^2 + M_1 \sum_{j'=0}^{j} \|\bar{x}^{\frac{1}{2}} (z^{j'+1} + z^{j'})_{\bar{x}}]|_0^2 \tau$$

$$\leqslant M_2 \sum_{j'=0}^{j} \|x^{\frac{1}{2}} (z^{j'+1} + z^{j'})]|_0^2 \tau + M_3 \sum_{j'=0}^{j} \Big( \|x^{\frac{1}{2}} \psi]|_0^2 + \nu_1^2 + \nu_2^2 \Big) \tau + \frac{h^2}{8} \big(z_N^2\big)^{j+1}, \tag{13}$$

где $M_3 = \max\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4c_3}, \frac{l}{2}\right)$.

Рассмотрим

$$\begin{aligned}
\|x^{\frac{1}{2}} z^{j+1}]|_0^2 - \frac{h^2}{8}\big(z_N^2\big)^{j+1} &= \sum_{i=1}^{N-1} x_i \big(z_i^2\big)^{j+1} h + x_N \big(z_N^2\big)\frac{h}{2} - \frac{h^2}{8}\big(z_N^2\big)^{j+1} \\
&= \sum_{i=1}^{N-1} x_i \big(z_i^2\big)^{j+1} h + \Big(1 - \frac{h}{4l}\Big) x_N \big(z_N^2\big)^{j+1} \frac{h}{2} \\
&\geqslant \sum_{i=1}^{N-1} x_i \big(z_i^2\big)^{j+1} h + \frac{1}{2} x_N \big(z_N^2\big)^{j+1} \frac{h}{2} \geqslant \frac{1}{2} \|x^{\frac{1}{2}} z^{j+1}]|_0^2.
\end{aligned} \tag{14}$$

Принимая во внимание (14), из (13) получаем

$$\|x^{\frac{1}{2}} z^{j+1}]|_0^2 + 2M_1 \sum_{j'=0}^{j} \|\bar{x}^{\frac{1}{2}} (z^{j'+1} + z^{j'})_{\bar{x}}]|_0^2 \tau$$

$$\leqslant 2M_2 \sum_{j'=0}^{j} \|x^{\frac{1}{2}} (z^{j'+1} + z^{j'})]|_0^2 \tau + 2M_3 \sum_{j'=0}^{j} \Big( \|x^{\frac{1}{2}} \psi\|_0^2 + \nu_1^2 + \nu_2^2 \Big) \tau. \tag{15}$$

Отсюда следует

$$\|x^{\frac{1}{2}} z^{j+1}]|_0^2 \leqslant 2M_2 \sum_{j'=0}^{j} \|x^{\frac{1}{2}} (z^{j'+1} + z^{j'})]|_0^2 \tau + 2M_3 F^j,$$

где $F^j = \sum\limits_{j'=0}^{j} \Big( \|x^{\frac{1}{2}} \psi\|_0^2 + \nu_1^2 + \nu_2^2 \Big) \tau$.

Так как

$$\sum_{j'=0}^{j} \|x^{\frac{1}{2}} (z^{j'+1} + z^{j'})]|_0^2 \tau \leqslant 2 \sum_{j'=0}^{j} \|x^{\frac{1}{2}} z^{j'+1}]|_0^2 \tau + 2 \sum_{j'=0}^{j} \|x^{\frac{1}{2}} z^{j'}]|_0^2 \tau$$

$$= 2\tau \|x^{\frac{1}{2}} z^{j+1}]|_0^2 + 4 \sum_{j'=0}^{j} \|x^{\frac{1}{2}} z^{j'}]|_0^2 \tau,$$

то

$$\big(1-4M_2\tau\big)\|x^{\frac{1}{2}}z^{j+1}]|_0^2 \leqslant 8M_2\sum_{j'=0}^{j}\|x^{\frac{1}{2}}z^{j'}]|_0^2\tau + 2M_3F^j.$$

Отсюда, при достаточно малом $\tau \leqslant \tau_0 = \frac{1}{8M_2}$ имеем

$$\|x^{\frac{1}{2}}z^{j+1}]|_0^2 \leqslant M\left(\sum_{j'=0}^{j}\|x^{\frac{1}{2}}z^{j'}]|_0^2\tau + F^j\right),$$

где $M = \max(2M_3, 16M_2)$ и не зависит от сетки.

Применяя лемму из [3], получаем при малом $\tau \leqslant \tau_0$ требуемую априорную оценку

$$\|x^{\frac{1}{2}}z^{j+1}]|_0^2 + \sum_{j'=0}^{j}\|\bar{x}^{\frac{1}{2}}\big(z^{j'+1}z^{j'}\big)_{\bar{x}}]|_0^2\tau \leqslant M\left(\sum_{j'=0}^{j}\Big(\|x^{\frac{1}{2}}\psi^{j'}]|_0^2 + \nu_1^2 + \nu_2^2\Big)\tau\right). \qquad (16)$$

Из оценки (16) следует сходимость разностной схемы (5) со скоростью $O(h^{\frac{3}{2}} + \tau^2)$ в норме, стоящей в левой части (16). $\triangleright$

## Литература


1. *Чудновский А. Ф.* Некоторые коррективы в постановке и решении задач тепло- и влагопереноса в почве // Сб. трудов АФИ.—1969.—вып. 23.—С.41–54.
2. *Самарский А. А.* Теория разностных схем.—М.: Наука, 1977.—656 с.
3. *Самарский А. А.* Однородные разностные схемы на неравномерных сетках для уравнений параболического типа // ЖВМ и МФ.—1963.—Т. 3, № 2.—С. 266–298.
4. *Андреев В. Б.* О сходимости разностных схем, аппроксимирующих вторую и третью краевые задачи для эллиптических уравнений // ЖВМ и МФ.—1968.—Т. 8, № 6.—С. 1218–1231.


*Владикавказ, Нальчик* *Статья поступила 19 апреля 2002 г.*