Владикавказский математический журнал
Апрель–июнь, 2002, Том 4, Выпуск 2

УДК **517.946**

НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА С ВНУТРЕННИМ УСЛОВИЕМ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

А. Ф. Напсо, В. З. Канчукоев

Установлены существование и единственность одной нелокальной граничной задачи для нагруженного псевдопараболического уравнения третьей степени.

В конечной односвязной области $D = \{(x, y) : 0 < x < l, 0 < y < T\}$ евклидовой плоскости независимых переменных x и y рассмотрим нагруженное [1] уравнение в частных производных третьего порядка

$$H(u) \equiv L(u) + \gamma(x, y)u(x^0, y) = -f(x, y), \tag{1}$$

где $L = \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} + a(x, y)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + b(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + c(x, y)\frac{\partial}{\partial y} + d(x, y)$ — псевдопараболический [2] оператор, x^0 — произвольно фиксированная точка интервала $0 < x < l$.

В дальнейшем через J будем обозначать интервал $(0, T)$ прямой $x = x_0$, где $x^0 \in (0, l)$ и $x_0 \neq x^0, D_0 = D \backslash J$. Ставится

Задача 1. Найти регулярное в D_0 решение $u(x, y)$ нагруженного уравнения (1) из класса $u(x, y), u_x(x, y), u_{xy}(x, y) \in C(\overline{D})$, удовлетворяющее
начальному

$$u(x, 0) = h(x) \quad \forall x \in [0, l], \tag{2}$$

нелокальному граничному

$$u(0, y) = \lambda u(l, y) \quad \forall y \in [0, T], \tag{3}$$

и внутреннему

$$u(x_0, y) = \varphi(y) \quad \forall y \in [0, T] \tag{4}$$

условиям, где $h(y), \varphi(y)$ — заданные функции, $\lambda = \mathrm{const}$.

Здесь и ниже под регулярным в области Ω решением уравнения подразумевается действительная функция $u(x, y)$, обладающая в Ω всеми непрерывными частными производным, входящими в уравнение, и обращающая его в тождество [3].

Пусть выполнены условия:

$$a_{xx}(x, y), b_x(x, y), c_y(x, y), d(x, y), \gamma(x, y), f(x, y) \in C(\overline{D}), \tag{5}$$

$$h(x) \in C^1[0, l] \cap C^2(0, l), \quad \varphi(y) \in C^1[0, T], \tag{6}$$

$$c(x, y) < 0 \quad \forall (x, y) \in D. \tag{7}$$

Имеет место следующая

Теорема 1. *Если выполнены условия* (5)–(7) *и* $\lambda < 0$, *то задача 1 всегда разрешима и притом единственным образом.*

$\triangleleft$ Доказательство теоремы приведем для случая $0 < x^0 < x_0 < l$. Пусть $D_1 = \big\{(x,y) : 0 < x < x^0, 0 < y < T\big\}$, а $w(x,y;\alpha,\beta)$ — функция Римана характеристической (по терминологии [2]) задачи Гурса

$$u(x_0,y) = \varphi(y) \quad \forall y \in [0,T], \tag{8}$$

$$u_x(x_0,y) = \psi(y) \quad \forall y \in [0,T], \tag{9}$$

$$u(x,0) = h(x) \quad \forall x \in [0,x_0] \tag{10}$$

для псевдопараболического уравнения с оператором L, где $\psi(y)$ — неизвестная пока функция из класса $C^1[0,T]$.

Для общего псевдопараболического уравнения функция Римана $w(x,y;\alpha,\beta)$ характеристической задачи Гурса (8)–(10) была впервые введена М. Х. Шхануковым в [4].

Нетрудно проверить, что имеет место тождество

$$wH(u) - uH(w) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \gamma(x,y)u(x^0,y)w, \tag{11}$$

где $P(x,y) = \big(w_{xy} - (aw)_x\big)u + \big(u_{xy} + au_x + bu\big)w$, $Q(x,y) = -w_x u_x + cuw$. Проинтегрируем тождество (11) по области $\Omega_1 = \big\{(x,y) : 0 < \alpha < x < x_0,\ 0 < y < \beta\big\}$ с учетом формулы Грина, где (α,β) — произвольная точка D_1. Пользуясь при этом свойствами функции Римана $w(x,y;\alpha,\beta)$ и условиями (8)–(10) получим:

$$\begin{aligned}
u(\alpha,\beta) &= w_x(x_0,\beta;\alpha,\beta)\varphi(\beta) + \int\limits_{\alpha}^{x_0} \big[c(x,0)w(x,0;\alpha,\beta) - w_x(x,0;\alpha,\beta)h'(x)\big]\,dx \\
&- \int\limits_0^{\beta} \big\{w(x_0,y;\alpha,\beta)\psi'(y) + a(x_0,y)w(x_0,y;\alpha,\beta)\psi(y) + \big[w_{xy}(x_0,y;\alpha,\beta) \\
&- a_x(x_0,y)w(x_0,y;\alpha,\beta)a(x_0,y)w_x(x_0,y;\alpha,\beta) + b(x_0,y)w(x_0,y;\alpha,\beta)\big]\varphi(y)\big\}\,dy \\
&+ \int\limits_{\alpha}^{x_0}\int\limits_0^{\beta} \gamma(x,y)u(x^0,y)w(x,y;\alpha,\beta)\,dxdy + \int\limits_{\alpha}^{x_0}\int\limits_0^{\beta} f(x,y)w(x,y;\alpha,\beta)\,dxdy.
\end{aligned} \tag{12}$$

Применяя к (12) формулу интегрирования по частям и переходя затем к пределу при $\alpha \to x^0$, имеем:

$$\psi_0(\beta) + (x_0,y;x^0,\beta)\psi(\beta) = \int\limits_0^{\beta} k_0(\beta,y)\psi_0(y)\,dy + \int\limits_0^{\beta} k_1(\beta,y)\psi(y)\,dy + f_0(\beta), \tag{13}$$

где

$$k_0(\beta,y) = \int\limits_{x^0}^{x_0} \gamma(x,y)w(x_0,y;x^0,\beta)\,dx,$$

$$k_1(\beta,y)=w_y(x_0,y;x^0,\beta)+a(x_0,y)w(x_0,y;x^0,\beta),$$

$$\begin{aligned}f_0(\beta)&=w(x_0,0;x^0,\beta)h'(x_0)+w_x(x_0,\beta;x^0,\beta)\varphi(\beta)\\&+\int\limits_{x^0}^{x_0}\big[c(x,0)w(x,0;x^0,\beta)-w_x(x,0;x^0,\beta)h'(x)\big]\,dx\\&-\int\limits_0^{\beta}\big[w_{xy}(x_0,y;x^0,\beta)-a(x_0,y)w_x(x_0,y;x^0,\beta)\\&+\big(b(x_0,y)-a_x(x_0,y)\big)w(x_0,y;x^0,\beta)\varphi(y)\big]\,dy\\&+\int\limits_{x^0}^{x_0}\int\limits_0^{\beta}f(x,y)w(x,y;\alpha,\beta)\,dxdy,\end{aligned}$$

$u(x^0,\beta)=\psi_0(\beta)$ — неизвестная пока функция из класса $C^{-1}[0,T]$.

При этом, из построения функции Римана $w(x,y;\alpha,\beta)$ характеристической задачи (8)–(10) для псевдопараболического уравнения с оператором L, непосредственно следует, аналогично [4], справедливость неравенств:

$$w_x(x,\beta;0,\beta)>0\quad\forall x\in(0,x_0],\quad w_x(x_0,\beta;0,\beta)>1,\tag{14}$$

если только $c(x,y)<0$ для всех $(x,y)\in D_1$.

С другой стороны, из представления решения (12) характеристической задачи Гурса (8)–(10) для псевдопараболического уравнения с оператором L при $\alpha\to 0$, получим:

$$u(0,\beta)=\int\limits_0^{\beta}\overline{k}_0(\beta,y)\psi_0(y)\,dy-w(x_0,\beta;0,\beta)\psi(\beta)+\int\limits_0^{\beta}\overline{k}_1(\beta,y)\psi(y)\,dy-f_0(\beta),\tag{15}$$

где

$$\overline{k}_0(\beta,y)=\int\limits_0^{x_0}\gamma(x,y)w(x_0,y;0,\beta)\,dx$$

$$\overline{k}_1(\beta,y)=w_y(x_0,y;0,\beta)+a(x_0,y)w(x_0,y;0,\beta),$$

$$\begin{aligned}\overline{f}_0(\beta)&=w(x_0,0;0,\beta)h'(x_0)+w_x(x_0,\beta;0,\beta)\varphi(\beta)\\&+\int\limits_0^{x_0}\big[c(x,0)w(x,0;0,\beta)-w_x(x,0;0,\beta)h'(x)\big]\,dx\\&-\int\limits_0^{\beta}\big[w_{xy}(x_0,y;0,\beta)-a(x_0,y)w_x(x_0,y;0,\beta)+\big(b(x_0,y)\\&-a_x(x_0,y)\big)w(x_0,y;0,\beta)\varphi(y)\big]\,dy+\int\limits_0^{x_0}\int\limits_0^{\beta}f(x,y)w(x,y;\alpha,\beta)\,dxdy.\end{aligned}$$

Пусть $D_2 = \big\{(x,y) : x_0 < x < l, 0 < y < T\big\}$, а $\vartheta(x,y;\xi,\eta)$ — функция Римана характеристической задачи Гурса

$$u(x_0,y)\varphi(y) \quad \forall y \in [0,Y], \tag{16}$$

$$u_x(x_0,y) = \psi(y) \quad \forall y \in [0,T], \tag{17}$$

$$u(x,0) = h(x) \quad \forall x \in [x_0,l] \tag{18}$$

для псевдопараболического уравнения с оператором L.

Заменив в (11) $\omega(x,y;\alpha,\beta)$ на функцию $\vartheta(x,y;\xi,\eta)$ и интегрируя полученное тождество аналогичным образом по области $\Omega_2 = \big\{(x,y) : x_0 < x < \xi,\ 0 < y < \eta\big\}$ с учетом формулы Грина, свойств функции Римана $\vartheta(x,y;\xi,\eta)$ и условий (16)–(18), имеем:

$$\begin{aligned} u(\xi,\eta) = {} & \vartheta_x(x_0,\eta;\xi,\eta)\varphi(\eta) - \vartheta(x_0,\eta;\xi,\eta)\psi(\eta) \\ & - \int\limits_0^\eta V_0(x_0,y;\xi,\eta)\varphi(y)\,dy + \int\limits_0^\eta V_1(x_0,y;\xi,\eta)\psi(y)\,dy \\ & + \int\limits_{x_0}^\xi \int\limits_0^\eta \gamma(x,y)\vartheta(x,y;\xi,\eta)\psi_0(\beta)\,dxdy + g(\xi,\eta), \end{aligned} \tag{19}$$

где (ξ,η) — произвольная фиксированная точка D_2,

$$\begin{aligned} V_0(x_0,y;\xi,\eta) = \vartheta_{xy}(x_0,y;\xi,\eta) - a(x_0,y)\vartheta_x(x_0,y;\xi,\eta) & \\ + \big(b(x_0,y) - a_x(x_0,y)\big)\vartheta(x_0,y;\xi,\eta), & \end{aligned}$$

$$V_1(x_0,y;\xi,\eta) = \vartheta_y(x_0,y;\xi,\eta) - a(x_0,y)\vartheta(x_0,y;\xi,\eta),$$

$$\begin{aligned} g(\xi,\eta) = \vartheta(x_0,0;\xi,\eta)h'(x_0) - \int\limits_{x_0}^\xi \big[c(x,0)\vartheta(x,0;\xi,\eta)h(x) - \vartheta_x(x,0;\xi,\eta)h'(x)\big]\,dx & \\ + \int\limits_{x_0}^\xi \int\limits_0^\eta f(x,y)\vartheta(x,y;\xi,\eta)\,dxdy. & \end{aligned}$$

Переходя в (19) к пределу при $\xi \to l$, получим

$$\begin{aligned} u(l,\eta) - \vartheta_x(x_0,\eta;l,\eta)\psi(\eta) = {} & \int\limits_0^\eta V_1(0,y;l,\eta)\psi(y)\,dy \\ & + \int\limits_0^\eta k(\eta,y)\psi_0(y)\,dy + g_0(\eta), \end{aligned} \tag{20}$$

где

$$k(\eta, y) = \int_{x_0}^{l} \gamma(x, y)\vartheta(x, y; l, \eta)\, dx,$$

$$g_0(\eta) = \vartheta_x(x_0, \eta; l, \eta)\varphi(\eta) - \int_0^{\eta} V_0(x_0, y; l, \eta)\varphi(y)\, dy + g(l, \eta).$$

Принимая во внимание (15), (20) воспользуемся при $\beta = \eta$ нелокальным условием (4), которое естественным образом возникает при решении многих прикладных задач сильно нестационарного тепломассообмена и является нелокальным условием типа условия Бицадзе — Самарского [5].

В результате имеем

$$\begin{gathered}\left[w(x_0, \eta; 0, \eta) - \lambda\vartheta(x_0, \eta; l, \eta)\right]\psi(\eta) \\ = \int_0^{\eta} \overline{V}_1(\eta, y)\psi(y)\, dy + \int_0^{\eta} \overline{V}_2(\eta, y)\psi_0(y)\, dy + \overline{g}_0(\eta),\end{gathered} \tag{21}$$

где $V_1(\eta, y) = \overline{k}_1(\eta, y) - \lambda V_1(0, y; l, \eta)$, $V_2(\eta, y) = \overline{k}_0(\eta, y) - \lambda k(\eta, y)$, $\overline{g}_0(\eta) = \overline{f}_0(\eta) - g_0(\eta)$.

Функция Римана $\vartheta(x, y; \xi, \eta)$ удовлетворяет неравенствам [5]:

$$\vartheta(x, \eta; l, \eta) < 0 \quad \forall x \in [x_0, l), \quad \vartheta_x(x_0, \eta; l, \eta) > 1, \tag{22}$$

если только $c(x, y) < 0$ для всех $(x, y) \in D_2$.

Таким образом, при $0 < x^0 < x_0 < l$ вопрос единственности и существования решения задачи 1 эквивалентно редуцируется к разрешимости системы (13), (21) интегральных уравнений типа Вольтерра.

Принимая во внимание (5)–(7), свойства (14) и (22) функций Римана $\vartheta(x, y; \xi, \eta)$ и $w(x, y; \alpha, \beta)$ заключаем, что

$$w(x_0, \eta; x^0, \eta), \quad \vartheta(x_0, \eta; l, \eta), \quad f_0(\eta) \quad \overline{g}_0(\eta) \in C^1[0, T],$$

$$k_0(\eta, y), \quad k_1(\eta, y), \quad \overline{V}_1(\eta, y), \quad \overline{V}_2(\eta, y) \in C[0, T] \times [0, T],$$

а единственное регулярное решение системы интегральных уравнений Вольтерра второго рода (13), (21) представимо [6] в классе $\varphi_0(\eta), \psi(\eta) \in C^1[0, T]$.

После определения неизвестных функций $\varphi_0(y) = u(x^0, y), \psi(y) = u_x(x_0, y)$, исследуемая задача 1 распадается на две характеристические задачи Гурса (8)–(10) и (16)–(18) для псевдопараболического уравнения с оператором H, единственные регулярные решения которых в D_1 и D_2 даются, соответственно, формулами (12) и (19).

Справедливость теоремы 1 при $0 < x_0 < x^0 < l$ доказывается аналогичным образом. $\triangleright$

Литература

1. *Нахушев А. М.* Нагруженные уравнения и их приложения // Дифференц. уравнения.—1983.— Т. 19, № 1.—С. 86–94.

2. *Colton D. L.* Pseudoparabolic Equtions in One Space Variable // J. Differential Equtions.—1977.—V. 12.—P. 559–565.
3. *Бицадзе А. В.* Уравнения математической физики.—М.: Наука, 1972.
4. *Шхануков М. Х.* О некоторых краевых задачах третьего порядка, возникающих при моделировании фильтрации жидкостей в пористых средах // Дифференц. уравнения.—1982.—Т. 18, № 4.—С. 689–700.
5. *Бицадзе А. В., Самарский А. А.* О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач // Докл. АН СССР.—1969.—Т. 185, № 4.—С. 739–740.
6. *Трикоми Ф.* Интегральные уравнения.—М.: Наука, 1975.

Нальчик *Статья поступила 27 декабря 2001 г.*