Владикавказский математический журнал
Апрель–июнь, 2002, Том 4, Выпуск 2

УДК **517.5**

ТЕОРЕМЫ ВЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ВЕСОВЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ БЕСОВА СО СМЕШАННОЙ НОРМОЙ

Р. Д. Кулов

Устанавливается теорема вложения весового функционального пространства $B^{\bar l}_{(\bar p)}\bigl(\overset{+n}{E}\bigr)_{\bar\alpha,\theta}$ в весовое функциональное пространство $B^{\bar r}_{(\bar q)}\bigl(\overset{+m}{E}\bigr)_{\bar\gamma,\theta_1}$.

Пусть E^n — n-мерное евклидово пространство точек $\bar x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $\bigl(\overset{+n}{E}\bigr) = \{\bar x \in E^n, x_i > 0\ (i = 1, 2, \dots, n)\}$.

Предположим, что $f(x)$ произвольная достаточно гладкая функция, определенная в пространстве E^n, для которой

$$\|f\|_{L_{(\bar p)}\left(\overset{+n}{E}\right),\bar\alpha} = \left(\int\limits_0^{+\infty} x_n^{\alpha_n}\,dx_n\Biggl(\int\limits_0^{+\infty} x_{n-1}^{\alpha_{n-1}}\,dx_{n-1} \dots \Biggl(\int\limits_0^{+\infty} |f(x)|^{p_1} x_1^{\alpha_1}\,dx_1\Biggr)^{\frac{p_2}{p_1}} \dots\Biggr)^{\frac{p_n}{p_{n-1}}}\right)^{\frac{1}{p_n}} < \infty, \tag{1}$$

$$\|f\|_{\mathcal{L}^{l_i}_{(\bar p)}\left(\overset{+n}{E}\right),\bar\alpha,\theta} = \left(\int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{t^{1+\theta\beta_i}} \Bigl\|\Delta_i(t) D_i^{\bar l_i} f\Bigr\|^{\theta}_{L_{(\bar p)}\left(\overset{+n}{E}\right),\bar\alpha}\right)^{\frac{1}{\theta}} < \infty, \tag{2}$$

$$\|f\|_{\mathcal{L}^{\bar l}_{(\bar p)}\left(\overset{+n}{E}\right),\bar\alpha,\theta} = \sum_{i=1}^{n} \|f\|_{\mathcal{L}^{l_i}_{(\bar p)}\left(\overset{+n}{E}\right),\bar\alpha,\theta} < \infty, \tag{3}$$

$$\|f\|_{B^{\bar l}_{(\bar p)}\left(\overset{+n}{E}\right),\bar\alpha,\theta} = \|f\|_{L_{(\bar p)}\left(\overset{+n}{E}\right),\bar\alpha} + \|f\|_{\mathcal{L}^{\bar l}_{(\bar p)}\left(\overset{+n}{E}\right),\bar\alpha,\theta}. \tag{4}$$

Пространствами $L_{(\bar p)}\bigl(\overset{+n}{E}\bigr)_{\bar\alpha}$, $\mathcal{L}^{\bar l}_{(\bar p)}\bigl(\overset{+n}{E}\bigr)_{\bar\alpha,\theta}$ и $B^{\bar l}_{(\bar p)}\bigl(\overset{+n}{E}\bigr)_{\bar\alpha,\theta}$ называем замыкание достаточно гладких финитных функций в нормах (1), (3) и (4) соответственно.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия*

(1) $1 < p_i \leqslant q_i < \infty$ $(i = 1, 2, \dots, m)$, $\quad p_j > 1 \quad (j = m+1, \dots, n)$,

(2) $\bar l = (l_1, l_2, \dots l_n)$, *где* $l_i > 0$ $(i = 1, 2, \dots, n)$, $l_i = \bar l_i + \beta_i$, $\bar l_i$ — *наибольшая целая часть числа* $l_i, 0 < \beta_i \leqslant 1$, $1 < \theta < \infty$,

(3) m — *натуральное число и* $m \leqslant n$,

(4) $\bar\nu = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n)$, $\nu_i \geqslant 0$ $(i = 1, 2, \dots, n)$,

(5) $\bar{\alpha}=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$, $\bar{\gamma}=(\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_m)$, $0\leqslant\frac{\gamma_i}{q_i}\leqslant\frac{\alpha_i}{p_i}$ $(i=1,\ldots,m)$, $\alpha_j>-1$ $(j=m+1,\ldots,n)$,

(6) $\varepsilon=1-\sum\limits_{j=1}^{n}(1+\nu_j)\frac{1}{l_j}-\sum\limits_{j=1}^{m}\left(\frac{\alpha_j}{p_j}-\frac{\gamma_j}{q_j}\right)-\sum\limits_{\eta=1}^{n}\frac{\alpha_\eta}{p_\eta}>0$,

(7) $f\in B^{\bar{l}}_{(\bar{p})}\big(\overset{+n}{E}\big)$.

Тогда при $x_{m+1}=\cdots=x_n=0$ *верно* $D_1^{\nu_1}\ldots D_n^{\nu_n}f\in L_{(\bar{q})}\big(\overset{+m}{E}\big)_{\bar{\gamma}}$ *и выполняется неравенство*

$$\Big\|D_1^{\nu_1}\ldots D_n^{\nu_n}f\Big\|_{L_{(\bar{q})}\left(\overset{+m}{E}\right),\bar{\gamma}}\leqslant c\|f\|_{B^{\bar{l}}_{(\bar{p})}\left(\overset{+n}{E}\right),\bar{\alpha},\theta}.$$

$\lhd$ Из интегрального представления В. П. Ильина и В. А. Солонникова [2] при $m_i=\bar{l}_i$, $k_i=2$ имеем

$$\Big\|D_1^{\nu_1}\ldots D_n^{\nu_n}f\Big\|_{L_{(\bar{q})}\left(\overset{+m}{E}\right),\bar{\gamma}}\leqslant\frac{c}{h^w}\Bigg\|\int\limits_0^{h^\kappa}f(x+y)\Pi(y,h)\Bigg\|_{L_{(\bar{q})}\left(\overset{+m}{E}\right),\bar{\gamma}}$$

$$+\sum_{i=1}^{n}c_i\Bigg\|\int\limits_0^{h}\frac{dv}{v^{1+w}}\int\limits_0^{v^\kappa}dy\int\limits_0^{v^{\kappa_i}-y_i}\Delta_i^2\Big(\frac{t}{2}\Big)D_i^{\bar{l}_i}f(x+y)R_i(y,t,v)dt\Bigg\|_{L_{(\bar{q})}\left(\overset{+m}{E}\right),\bar{\gamma}}$$

$$=J_0+\sum_{i=1}^{n}J_i.$$

Если применить соответствующую оценку для ядра, то будем иметь

$$J_0\leqslant ch^{-\sum\limits_{j=1}^{n}(1+\nu_j)\kappa_j-\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{\alpha_j}{p_j}+\sum\limits_{\eta=1}^{m}\frac{\gamma_\eta}{q_\eta}}$$

$$\times\Bigg\|\int\limits_x^{x+h^\kappa}|f(y)|\prod_{j=1}^{m}y_j^{\frac{\alpha_j}{p_j}-\frac{\gamma_j}{q_j}}\prod_{\eta=m+1}^{n}y_\eta^{\frac{\alpha_\eta}{p_\eta}}dy\Bigg\|_{L_{(\bar{q})}\left(\overset{+m}{E}\right),\bar{\gamma}}.$$

Применив обобщенное неравенство Минковского, неравенство Гёльдера и лемму Гудиева [3], получим

$$J_0\leqslant ch^{-\sum\limits_{j=1}^{n}(1+\nu_j)\kappa_j-\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{\alpha_j}{p_j}+\sum\limits_{\eta=1}^{m}\frac{\gamma_\eta}{q_\eta}+\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\kappa_i}{p_i'}+\sum\limits_{j=1}^{m}\frac{\kappa_j}{q_j}}\cdot\|f\|_{L_{(\bar{p})}\left(\overset{+n}{E}\right),\bar{\alpha}}.$$

Далее,

$$J_i \leqslant c \Big\| \int\limits_0^h \frac{dv}{v^{1+w}} \int\limits_x^{x+v^{\kappa}} dy \int\limits_0^{v^{\kappa_i}} \Delta_i^2\Big(\frac{t}{2}\Big) D_i^{\bar{l}_i} f(y) R_i(y-x,t,v)\,dt \Big\|_{L_{(\bar{q})}\left(\overset{+m}{E}\right),\bar{\gamma}}$$

$$\leqslant ch^{\varepsilon-\xi_i\kappa_i} \Big\| \int\limits_0^h \frac{dv}{v^{1+\lambda_i}} \int\limits_0^{v^{\kappa_i}} t^{\xi_i-\left(\frac{1}{\theta}+\beta_i\right)} dt$$

$$\times \int\limits_x^{x+v^{\kappa}} \Delta_i^2\Big(\frac{t}{2}\Big) D_i^{\bar{l}_i} \prod_{j=1}^m y_j^{\frac{\alpha_j}{p_j}-\frac{\gamma_j}{q_j}} \prod_{\eta=m+1}^n y_\eta^{\frac{\alpha_\eta}{p_\eta}} \Big\|_{L_{(\bar{q})}\left(\overset{+m}{E}\right),\bar{\gamma}}$$

$\leqslant$ (применяем обобщенное неравенство Минковского, неравенство Гёльдера, лемму Гудиева)

$$\leqslant ch^{\varepsilon} \|f\|_{\mathcal{L}^{l_i}_{(\bar{p})}\left(\overset{+n}{E}\right),\bar{\alpha},\theta}.$$

Из полученных оценок при $h = 1$ имеем

$$\Big\| D_1^{\nu_1} \dots D_n^{\nu_n} f \Big\|_{L_{(\bar{q})}\left(\overset{+m}{E}\right),\bar{\gamma}} \leqslant c \|f\|_{B^{\bar{l}}_{(\bar{p})}\left(\overset{+n}{E}\right),\bar{\alpha},\theta}. \ \triangleright$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия:*

(1) $1 < p_i \leqslant q_i < \infty$ $(i = 1, 2, \dots, m)$, $p_j > 1$ $(j = m+1, \dots, n)$,

(2) $\bar{l} = (l_1, l_2, \dots l_n)$, $l_i > 0$ $(i = 1, 2, \dots, n)$, $l_i = \bar{l}_i + \beta_i$, $\bar{l}_i$ *— наибольшая целая часть числа* l_i, $0 < \beta_i \leqslant 1$, $r_i = \bar{r}_i + \tau_i$, $\bar{r}_i$ *— наибольшая целая часть числа* r_i, $0 < \tau_i \leqslant 1$, $1 < \theta \leqslant \theta_i < \infty$,

(3) m *— натуральное число меньше либо равное* n,

(4) $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $\bar{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m)$, $0 \leqslant \frac{\gamma_j}{q_j} \leqslant \frac{\alpha_j}{p_j}$ $(j = 1, 2, \dots, m)$ *и* $\alpha_i > -1$ $(i = m+1, \dots, n)$,

(5) $\varepsilon = 1 - \sum\limits_{i=1}^n \frac{1}{l_i} - \sum\limits_{j=1}^m \left(\frac{\alpha_j}{p_j} - \frac{\gamma_j}{q_j}\right) - \sum\limits_{\eta=m+1}^n \frac{\alpha_\eta}{p_\eta} + \sum\limits_{i=1}^n \frac{1}{l_i p_i'} + \sum\limits_{j=1}^m \frac{1}{l_j q_j} - \frac{r_s}{l_s} > 0$ $(s = 1, 2, \dots, m)$,

(6) $f \in B^{\bar{l}}_{(\bar{p})}\left(\overset{+n}{E}\right)_{\bar{\alpha},\theta}$.

Тогда при $x_{m+1} = x_{m+2} = \dots = x_n = 0$ *функция* $f(x)$ *принадлежит* $B^{\bar{r}}_{(\bar{q})}\left(\overset{+m}{E}\right)_{\bar{\gamma},\theta_1}$ *и выполняется неравенство*

$$\|f\|_{B^{\bar{r}}_{(\bar{q})}\left(\overset{+m}{E}\right),\bar{\gamma},\theta_1} \leqslant c \|f\|_{B^{\bar{l}}_{(\bar{p})}\left(\overset{+n}{E}\right),\bar{\alpha},\theta}.$$

$\triangleleft$ По определению имеем:

$$\|f\|_{B^{\bar{r}}_{(\bar{q})}\left(\overset{+m}{E}\right),\bar{\gamma},\theta_1} = \|f\|_{L_{(\bar{q})}\left(\overset{+m}{E}\right),\bar{\gamma}} + \sum_{s=1}^m \|f\|_{\mathcal{L}^{r_s}_{(\bar{q})}\left(\overset{+m}{E}\right),\bar{\gamma},\theta_1}.$$

На основании теоремы 1 при $\nu_1 = \nu_2 = \dots = \nu_n = 0$ справедливо неравенство

$$\|f\|_{L_{(\bar{q})}\left(\overset{+m}{E}\right),\bar{\gamma}} \leqslant c \|f\|_{B^{\bar{l}}_{(\bar{p})}\left(\overset{+n}{E}\right),\bar{\alpha},\theta}.$$

Исходя из определения нормы имеем:

$$\|f\|_{\mathcal{L}^{r_s}_{(\bar q)}\left(\overset{+m}{E}\right),\bar\gamma,\theta_1} \leqslant \left(\int\limits_0^{h^{\kappa_s}} \frac{dz}{z^{1+\theta_1\beta_s}} \left\|\Delta_s^2\left(\frac{z}{2}\right) D_s^{\bar r_s} f\right\|^{\theta_1}_{L_{(\bar q)}\left(\overset{+m}{E}\right),\bar\gamma}\right)^{\frac{1}{\theta_1}}$$

$$+\left(\int\limits_{h^{\kappa_s}}^{\infty} \frac{dz}{z^{1+\theta_1\beta_s}} \left\|\Delta_s^2\left(\frac{z}{2}\right) D_s^{\bar r_s} f\right\|^{\theta_1}_{L_{(\bar q)}\left(\overset{+m}{E}\right),\bar\gamma}\right)^{\frac{1}{\theta_1}} = J_1^{(s)} + J_2^{(s)}.$$

Второе слагаемое оценивается просто:

$$\begin{aligned}
J_2^{(s)} &\leqslant c\left\|D_s^{\bar r_s} f\right\|_{L_{(\bar q)}\left(\overset{+m}{E}\right),\bar\gamma} \left(\int\limits_{h^{\kappa_s}}^{\infty} \frac{dz}{z^{1+\theta_1\beta_s}}\right)^{\frac{1}{\theta_1}} \\
&= ch^{-\kappa_s\beta_s}\left\|D_s^{\bar r_s} f\right\|_{L_{(\bar q)}\left(\overset{+m}{E}\right),\bar\gamma} \leqslant \big(\text{по теореме 1 при} \\
&\quad \nu_1=\nu_2=\dots=\nu_{s-1}=\nu_{s+1}=\dots=\nu_n=0,\ \nu_s=\bar r_s\big) \\
&\leqslant ch^{-\kappa_s\beta_s}\|f\|_{B^{\bar l}_{(\bar p)}\left(\overset{+n}{E}\right),\bar\alpha,\theta}.
\end{aligned}$$

Чтобы оценить $J_1^{(s)}$ рассмотрим интегральное представление В. П. Ильина и В. А. Солонникова при $k_i = 2$, $m_i = \bar l_i$, $\nu_1 = \nu_2 = \dots = \nu_{s-1} = \nu_{s+1} = \dots = \nu_n = 0$, $\nu_s = \bar r_s$ и представим его правую часть в виде суммы трех слагаемых:

$$\begin{aligned}
D_s^{\bar r_s} f(x) &= \frac{c}{h^w}\int\limits_0^{h^\kappa} f(x+y)\Pi(y,h)dy \\
&- \sum_{i=1}^n c_i \int\limits_0^{z^{1/\kappa_s}} \frac{dv}{v^{1+w}} \int\limits_0^{v^\kappa} dy \int\limits_0^{v^{\kappa_i}-y_i} \Delta_i^2\left(\frac{t}{2}\right) D_i^{\bar l_i} f(x+y) R_i(y,t,v)dt \\
&- \sum_{i=1}^n c_i \int\limits_{z^{1/\kappa_s}}^{h} \frac{dv}{v^{1+w}} \int\limits_0^{v^{\bar\kappa}} dy \int\limits_0^{v^{\kappa_i}-y_i} \Delta_i^2\left(\frac{t}{2}\right) D_i^{\bar l_i} f(x+y) R_i(y,t,v)dt \\
&= H_1(x,h) - H_2(x,h,z) - H_3(x,h,z).
\end{aligned}$$

Теперь имеем

$$\Delta_s^2\left(\frac{z}{2}\right) D_s^{\bar r_s} f(x) = \Delta_s^2\left(\frac{z}{2}\right) H_1(x,h) - \Delta_s^2\left(\frac{z}{2}\right) H_2(x,h,z) - \Delta_s^2\left(\frac{z}{2}\right) H_3(x,h,z).$$

Следовательно,

$$\left\|\Delta_s^2\left(\frac{z}{2}\right) D_s^{\bar r_s} f(x)\right\|_{L_{(\bar q)}\left(\overset{+m}{E}\right),\bar\gamma} \leqslant \left\|\Delta_s^2\left(\frac{z}{2}\right) H_1(x,h)\right\|_{L_{(\bar q)}\left(\overset{+m}{E}\right),\bar\gamma}$$

$$+\left\|\Delta_s^2\left(\frac{z}{2}\right)H_2(x,h,z)\right\|_{L_{(\bar q)}\left(\overset{+m}{E}\right),\bar\gamma}+\left\|\Delta_s^2\left(\frac{z}{2}\right)H_3(x,h,z)\right\|_{L_{(\bar q)}\left(\overset{+m}{E}\right),\bar\gamma}.$$

Далее

$$\begin{aligned}J_1^{(s)} \leqslant & \left(\int\limits_0^{h^{\kappa_s}}\frac{dz}{z^{1+\theta_1\beta_s}}\left\|\Delta_s^2\left(\frac{z}{2}\right)H_1(x,h)\right\|^{\theta_1}_{L_{(\bar q)}\left(\overset{+m}{E}\right),\bar\gamma}\right)^{\frac{1}{\theta_1}}\\ &+\left(\int\limits_0^{h^{\kappa_s}}\frac{dz}{z^{1+\theta_1\beta_s}}\left\|\Delta_s^2\left(\frac{z}{2}\right)H_2(x,h,z)\right\|^{\theta_1}_{L_{(\bar q)}\left(\overset{+m}{E}\right),\bar\gamma}\right)^{\frac{1}{\theta_1}}\\ &+\left(\int\limits_0^{h^{\kappa_s}}\frac{dz}{z^{1+\theta_1\beta_s}}\left\|\Delta_s^2\left(\frac{z}{2}\right)H_3(x,h,z)\right\|^{\theta_1}_{L_{(\bar q)}\left(\overset{+m}{E}\right),\bar\gamma}\right)^{\frac{1}{\theta_1}}\\ &=J_{11}^{(s)}+J_{12}^{(s)}+J_{13}^{(s)}.\end{aligned}$$

Заметим, что

$$\left\|\Delta_s^2\left(\frac{z}{2}\right)H_1(x,h)\right\|_{L_{(\bar q)}\left(\overset{+m}{E}\right),\bar\gamma}\leqslant cz^2\left\|D_s^2H_1(x,h)\right\|_{L_{(\bar q)}\left(\overset{+m}{E}\right),\bar\gamma},$$

$$\left\|\Delta_s^2\left(\frac{z}{2}\right)H_3(x,h,z)\right\|_{L_{(\bar q)}\left(\overset{+m}{E}\right),\bar\gamma}\leqslant cz^2\left\|D_s^2H_3(x,h,z)\right\|_{L_{(\bar q)}\left(\overset{+m}{E}\right),\bar\gamma}.$$

Оценим $J_{11}^{(s)}$:

$$\begin{aligned}J_{11}^{(s)} &\leqslant \left(\int\limits_0^{h^{\kappa_s}}\frac{dz}{z^{1+\theta_1\beta_s}}\cdot z^{2\theta_1}\left\|D_s^2H_1(x,h)\right\|^{\theta_1}_{L_{(\bar q)}\left(\overset{+m}{E}\right),\bar\gamma}\right)^{\frac{1}{\theta_1}}\\ &=\left(\int\limits_0^{h^{\kappa_s}}\frac{dz}{z^{1+(\beta_s-2)\theta_1}}\left\|D_s^2H_1(x,h)\right\|^{\theta_1}_{L_{(\bar q)}\left(\overset{+m}{E}\right),\bar\gamma}\right)^{\frac{1}{\theta_1}}\\ &=\left(\int\limits_0^{h^{\kappa_s}}\frac{dz}{z^{1+(\beta_s-2)\theta_1}}\left\|D_s^2\left(\frac{c}{h^w}\int\limits_0^{h^{\kappa}}f(x+y)\Pi(y,h)dy\right\|^{\theta_1}_{L_{(\bar q)}\left(\overset{+m}{E}\right),\bar\gamma}\right)^{\frac{1}{\theta_1}}\\ &\leqslant \big(\text{оценим ядро}\,\Pi(y,h)\,\text{аналогично оценке в теореме 1}\\ &\qquad\text{с небольшими изменениями}\big)\\ &\leqslant ch^{-\sum\limits_{j=1}^n\kappa_j-\kappa_sr_s-\sum\limits_{j=1}^m\left(\frac{\alpha_j}{p_j}-\frac{\gamma_j}{q_j}\right)-\sum\limits_{\eta=m+1}^n\frac{\alpha_\eta}{q_\eta}+\sum\limits_{j=1}^n\frac{\kappa_j}{p_j}+\sum\limits_{j=1}^m\frac{\kappa_j}{q_j}}\times\|f\|_{L_{(\bar p)}\left(\overset{+n}{E}\right),\bar\alpha}.\end{aligned}$$

Аналогично,

$$J_{12}^{(s)}\leqslant ch^{\varepsilon-r_s\kappa_s}\|f\|_{\mathcal{L}^{\bar l}_{(\bar p)}\left(\overset{+n}{E}\right),\bar\alpha,\theta},$$

$$J_{13}^{(s)}\leqslant ch^{\varepsilon-r_s\kappa_s}\|f\|_{\mathcal{L}^{\bar l}_{(\bar p)}\left(\overset{+n}{E}\right),\bar\alpha,\theta}.$$

Из полученных оценок при $h = 1$ следует

$$\|f\|_{B^{\bar r}_{(\bar q)}\left(\overset{+}{E}{}^m\right),\bar\gamma,\theta_1} \leqslant c\|f\|_{B^{\bar l}_{(\bar p)}\left(\overset{+}{E}{}^n\right),\bar\alpha,\theta}. \ \triangleright$$

Литература

1. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике.—Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1962.—С. 64–67.
2. *Ильин В. П., Солонников В. А.* О некоторых свойствах дифференцируемых функций многих переменных // Труды математического института им. В. А. Стеклова.—1962.—Т. 66.—С. 205–226.
3. *Гудиев А. Х.* Нелинейные интегралы типа потенциала и их свойства // ДУ.—1966.—Т. 2, № 2.—С. 172–193.

Владикавказ *Статья поступила 2 апреля 2002 г.*