Владикавказский математический журнал
Апрель–июнь, 2002, Том 4, Выпуск 2

УДК **517.956**

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СМЕШАННОГО ГИПЕРБОЛО-ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

В. А. Елеев, З. М. Белхароева

Установлены существование и единственность решения одной краевой задачи для смешанного гиперболо-параболического уравнения третьего порядка.

Рассматривается уравнение

$$0 = \begin{cases} u_{xx} - u_y + \lambda_1 u, \ y > 0, \\ \frac{\partial}{\partial x}(u_{xx} - u_{yy} + \lambda_2 u_x + \lambda_3 u), \ y < 0 \end{cases} \tag{1}$$

в области Ω, ограниченной отрезками AA_0, BB_0, A_0B_0 прямых $x = 0, x = 1, y = h$ соответственно и характеристиками $AC : x + y = 0, BC : x - y = 1$ уравнения (1). Пусть $\Omega_1 = \Omega \cap (y > 0)$, $\Omega_2 = \Omega \cap (y < 0)$, $I = (0, 1)$.

Задача 1. Требуется найти функцию $u(x, y)$ со следующими свойствами:

1) $u(x, y)$ — регулярное решение уравнения (1) в области Ω при $y \neq 0$;

2) u непрерывна в замкнутой области $\overline{\Omega}$;

3) частные производные u_x, u_y непрерывны в области Ω и в точках $O(0, 0)$ и $A(1, 0)$ могут обращаться в бесконечность порядка меньше единицы;

4) u удовлетворяет краевым условиям:

$$u(0, y) = \varphi_1(y), \ u(1, y) = \varphi_2(y), \ u(x, -x) = \psi_1(x), \ u(x, x - 1) = \psi_2(x), \tag{2}$$

где $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2$ — достаточно гладкие функции, причем

$$\varphi_1(0) = \psi_1(0), \ \varphi_2(0) = \psi_2(0), \ \psi_1\left(-\frac{1}{2}\right) = \psi_2\left(-\frac{1}{2}\right).$$

Пусть в начале $\lambda_2 \neq 0, \lambda_3 = 0$. В области Ω_2 общее решение уравнения (1) может быть представлено в виде [1]

$$u(x, y) = \nu(x, y) + \omega(y), \tag{3}$$

где $\nu(x, y)$ — общее решение уравнения

$$\nu_{xx} - \nu_{yy} + \lambda_2 \nu_x = 0, \tag{4}$$

а $\omega(y)$ — произвольная дважды непрерывно дифференцируемая функция. Без ограничения общности можно предположить

$$\omega(0) = \omega'(0) = 0. \tag{5}$$

Обозначим $\tau(x) = u(x, 0)$, $v(x) = u_y(x, 0)$.

Лемма 1. *Если* $\lambda_1 \leqslant 0$ *и*

$$\lim_{x\to 0+} u(x,0)u_x(x,0) = \lim_{x\to 1-} u(x,0)u_x(x,0) = 0, \tag{6}$$

то для любого регулярного в области Ω_1 *решения уравнения* (1) *справедливо неравенство*

$$\int_0^1 \tau(x)v(x)\,dx = -\int_0^1 [\tau'^2(x) - \lambda_1\tau^2(x)]\,dx \leqslant 0. \tag{7}$$

◁ Доказательство леммы 1 приведено в [2]. ▷

Лемма 2. *Если* $u = 0$ *на* $\overline{OC} \cup \overline{AC}$, *то для любого регулярного в области* Ω_2 *решения уравнения* (1) *справедливо равенство*

$$\int_0^1 \tau(x)v(x)\,dx = 0. \tag{8}$$

◁ Доказательство леммы 2 приведено в [3]. ▷

Сравнивая (7) и (8) имеем, что $\tau(x) \equiv 0$.

Теорема 1. *Пусть* $u(x,y)$ — *регулярное решение однородной задачи 1. Тогда* $u(x,y) \equiv 0$ *в* $\overline{\Omega}_1$.

◁ В области Ω_1 рассмотрим тождество

$$u(u_{xx} - u_{yy} + \lambda_1 u) = (uu_x)_x - uu_y - u_x^2 + \lambda_1 u^2 \equiv 0.$$

Проинтегрировав его при однородных граничных условиях (2) и $\tau(x) \equiv 0$, получим

$$\int_0^1 u^2(x,1)\,dx + \int_{\Omega_1} (u_x^2 - \lambda_1 u^2)\,dx\,dy = 0.$$

Отсюда следует, что $u(x,y) \equiv 0$ в области $\overline{\Omega}_1$. В силу равенств $\nu(x,0) = u(x,0)$, $\nu_y(x,0) = u_y(x,0)$, имеем, что $\nu(x,y) \equiv 0$ в области $\overline{\Omega}_2$. Из условия $\nu(x,-x) = -\omega(y)$ заключаем, что $\omega(y) = 0$ при $-\frac{1}{2} \leqslant y \leqslant 0$. Следовательно, $u(x,y) \equiv 0$ в $\overline{\Omega}_2$, т. е. $u(x,y) \equiv 0$ в $\overline{\Omega}$ и решение задачи 1 единственно. ▷

Теорема 2. *В области* Ω *существует решение задачи (1).*

◁ Из параболической части области Ω при $y \to 0+$, получим задачу

$$\tau''(x) - v(x) + \lambda_1\tau(x) = 0, \tag{9}$$

$$\tau(0)\varphi_1(0),\ \tau(0) = \varphi_2(0). \tag{10}$$

Решение уравнения (4), удовлетворяющее краевым условиям

$$\nu(x,-x) = \psi_1(x) - \omega(-x), \quad \nu(x,x-1) = \psi_2(x) - \omega(x-1), \tag{2'}$$

определяется формулой

$$\nu(x,y) = \psi_1\left(\frac{x-y}{2}\right) + \psi_2\left(\frac{x+y+1}{2}\right) - \omega\left(\frac{y-x}{2}\right) - \omega\left(\frac{x+y-1}{2}\right). \qquad (11)$$

Задача (9), (10) заменой

$$\tau(x) = z(x) + x^2 + (\varphi_2(0) - \varphi_1(0) - 1)x + \varphi_1(0) = z(x) + h(x)$$

приводится к виду

$$z''(x) + \lambda_1 z(x) = f(x), \qquad (12)$$

$$z(0) = 0, \quad z(1) = 0, \qquad (13)$$

где $f(x) = v(x) - h(x) - 2$. Решение задачи (12), (13) имеет вид

$$z(x) = \int\limits_0^1 G(x,t,\lambda_1) f(t)\,dt, \qquad (14)$$

где

$$G(x,t,\lambda_1) = \begin{cases} -\dfrac{\sin\sqrt{-\lambda_1}\,t\sin\sqrt{-\lambda_1}(1-x)}{\sqrt{-\lambda_1}\sin\sqrt{-\lambda_1}}, & 0 \leqslant t \leqslant x, \\ -\dfrac{\sin\sqrt{-\lambda_1}\,x\sin\sqrt{-\lambda_1}(1-t)}{\sqrt{-\lambda_1}\sin\sqrt{-\lambda_1}}, & x \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

— функция Грина. Возвращаясь к функции $\tau(x)$, равенство (14) перепишем в виде

$$\tau(x) \int\limits_0^1 G(x,t,\lambda_1) v(t)\,dt + \tilde{f}(x), \qquad (15)$$

где

$$\tilde{f} = h(x) - \int\limits_0^1 G(x,t,\lambda_1)\{2 + \lambda_1 h(t)\}\,dt.$$

Из равенства (11) имеем

$$\nu(x,0) = \tau(x) = \psi_1\left(\frac{x}{2}\right) + \psi_2\left(\frac{x+1}{2}\right) - \omega\left(-\frac{x}{2}\right) - \omega\left(\frac{x-1}{2}\right), \qquad (16)$$

$$\nu_y(x,0) = v(x) = -\frac{1}{2}\psi_1'\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2}\psi_2'\left(\frac{x+1}{2}\right) - \frac{1}{2}\omega'\left(-\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2}\omega'\left(\frac{x-1}{2}\right). \qquad (17)$$

Подставляя (16), (17) в равенство (15), получим интегро-функциональное уравнение

$$\omega\left(-\frac{x}{2}\right) + \omega\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 G(x,t,\lambda_1)\left\{\omega'\Big(-\frac{t}{2}\Big) + \omega'\Big(\frac{t}{2} - \frac{1}{2}\Big)\right\} dt + g(x), \qquad (18)$$

где

$$g(x) = \int\limits_0^1 G(x,t,\lambda_1)\left\{\frac{1}{2}\psi_1'\Big(\frac{t}{2}\Big) - \frac{1}{2}\psi_2'\Big(\frac{t}{2}+\frac{1}{2}\Big)\right\} dt + \psi_1\Big(\frac{x}{2}\Big) + \psi_2\Big(\frac{x+1}{2}\Big) + \tilde{f}(x).$$

Дифференцируя равенство (18), получим

$$\omega'\left(-\frac{x}{2}\right) - \omega'\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\right) = -\int\limits_0^1 G_x(x,t,\lambda_1)\left\{\omega'\Big(-\frac{t}{2}\Big) + \omega'\Big(\frac{t}{2}-\frac{1}{2}\Big)\right\} dt = -2g'(x). \quad (19)$$

Обозначая $\omega'\left(-\frac{1}{2}\right) = \rho(z)$, получим интегро-функциональное уравнение вида

$$\rho(z) - \rho\left(-z-\frac{1}{2}\right) = -\int\limits_0^1 G_x(x,y,\lambda_1)\left\{\rho(t) + \rho\Big(-t-\frac{1}{2}\Big)\right\} dt - 2g(-2z). \quad (20)$$

Функцию $\rho(z)$ будем искать в виде $\rho(z) = r(z) - r\Big(-z-\frac{1}{2}\Big)$.

Учитывая последнее слагаемое в равенстве (20), получим функциональное уравнение

$$r(z) - r\Big(-z-\frac{1}{2}\Big) = -2g(-2z), \quad (21)$$

которое является частным случаем линейного функционального уравнения [4]

$$Af[\psi(t)] + Bf[\varphi(t)] = F(t), \quad (22)$$

где t — переменная, $A, B, \psi(t), \varphi(t), F(t)$ — заданные функции t, f — неизвестная операция, обращающая уравнение (22) в тождество.

Используя теорию итерационного исчисления, доказывается, что функциональное уравнение (21) имеет решение [4]. Из единственности решения задачи 1 следует, что функция $\omega(y)$ определяется единственным образом. Таким образом, функция $u(x,y)$ полностью определена в области Ω.

Пусть теперь $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 > 0$. Доказательство единственности решения задачи 1 в этом случае проводится аналогично предыдущему.

В области Ω_2 общее решение уравнения (1) имеет вид (3), где $\nu(x,y)$ — общее решение уравнения

$$\nu_{xx} - \nu_{yy} + \lambda_3\nu = 0. \quad (23)$$

Решение задачи Коши с начальными данными

$$\nu(x,0) = u(x,0) = \tau(x), \quad \nu_y(x,0) = u_y(x,0) = v(x),$$

имеет вид [5]

$$\begin{aligned} \nu(x,y) = &\frac{\tau(x-y)+\tau(x-y)}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_{x-y}^{x+y} J_0\big(\sqrt{\lambda_3}\sqrt{(x-\xi)^2-y^2}\big)\, v(\xi)\, d\xi \\ &+ \frac{1}{2}\int\limits_{x-y}^{x+y} \tau(\xi)\frac{\partial}{\partial y}J_0\big(\sqrt{\lambda_3}\sqrt{(x-\xi)^2-y^2}\big)\, v(\xi)\, d\xi, \end{aligned} \quad (24)$$

где $J_0(z)$ — функция Бесселя первого рода нулевого порядка. Удовлетворяя (24) краевым условиям (2′), получим

$$\begin{aligned}\tau(x) = 2\psi\left(\frac{x}{2}\right) - 2\varphi(0) + \int_0^x J_0\big(\sqrt{\lambda_3}\sqrt{\xi(\xi-x)}\big)v(\xi)\,d\xi \\ + \frac{1}{2}\int_0^x \tau(\xi)\frac{\partial}{\partial x}J_0\big(\sqrt{\lambda_3}\sqrt{\xi(\xi-x)}\big)\,d\xi - 2\omega\left(-\frac{x}{2}\right),\end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned}\tau(x) = 2\psi_2\left(\frac{x+1}{2}\right) - 2\varphi_2(0) - \int_1^x J_0\big(\sqrt{\lambda_3}\sqrt{(\xi-1)(\xi-x)}\big)v(x)\,d\xi \\ + \int_1^x \tau(\xi)\frac{\partial}{\partial x}J_0\big(\sqrt{\lambda_3}\sqrt{(\xi-1)(\xi-x)}\big)\,d\xi - 2\omega\left(-\frac{x-1}{2}\right).\end{aligned} \tag{26}$$

После обращения интегральных уравнений (25), (26) относительно $\tau(x)$, соответственно получим [3]

$$\begin{aligned}\tau(x) = 2\psi_1\left(\frac{x}{2}\right) - 2\omega\Big(-\frac{x}{2}\Big) + \int_0^x J_0\big(\sqrt{\lambda_3}(x-\xi)\big)v(\xi)\,d\xi \\ - 2\int_0^x J_0\big(\sqrt{\lambda_3}\sqrt{x(x-\xi)}\big)\left(\psi_1\Big(\frac{\xi}{2}\Big) - \omega\Big(-\frac{\xi}{2}\Big)\right)\,d\xi,\end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned}\tau(x) = 2\psi_2\left(\frac{x+1}{2}\right) - 2\omega\left(\frac{x-1}{2}\right) - \int_1^x J_0\big(\sqrt{\lambda_3}(-x+\xi)v(\xi)\big)\,d\xi \\ - 2\int_1^x \frac{\partial}{\partial x}J_0\big(\sqrt{\lambda_3}\sqrt{(1-x)(\xi-x)}\big)\left(\psi_2\Big(\frac{\xi+1}{2}\Big) - \omega\Big(\frac{\xi-1}{2}\Big)\right)\,d\xi.\end{aligned} \tag{28}$$

Равенства (27), (28) соответственно перепишем в виде

$$\begin{aligned}\tau(x) = \int_0^x v(\xi)J_0\big(\sqrt{\lambda_3}(x-\xi)\big)\,d\xi \\ + \int_0^x \psi_1\left(\frac{\xi}{2}\right)J_0\big(\sqrt{\lambda_3}\sqrt{x(x-\xi)}\big) + \int_0^x \omega'\left(-\frac{\xi}{2}\right)J_0\big(\sqrt{\lambda_3}\sqrt{x(x-\xi)}\big)\,d\xi,\end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned}\tau(x) = -\int_1^x v(\xi)J_0\big(\sqrt{\lambda_3}(\xi-x)\big)\,d\xi + \int_1^x \psi_2'\left(\frac{\xi+1}{2}\right)J_0\big(\sqrt{\lambda_3}\sqrt{(1-x)(\xi-x)}\big)\,d\xi \\ + \int_1^x \omega'\left(\frac{\xi-1}{2}\right)J_0\big(\sqrt{\lambda_3}\sqrt{(1-x)(\xi-x)}\big)\,d\xi.\end{aligned} \tag{30}$$

В левую часть равенства (15) вместо $\tau(x)$ подставим (29) и полученное равенство продифференцируем по x. В результате будем иметь смешанное интегральное уравнение

$$v(x)+\int_0^x v(\xi)\frac{\partial}{\partial x}J_0\big(\sqrt{\lambda_3}(x-\xi)\big)\,d\xi=\int_0^1 G_x(x,\xi,\lambda_1)v(\xi)\,d\xi$$
$$-\,\omega'\left(-\frac{x}{2}\right)-\int_0^x \omega'\left(-\frac{\xi}{2}\right)\frac{\partial}{\partial x}J_0\big(\sqrt{\lambda_3}\sqrt{x(x-\xi)}\big)+q'(x), \tag{31}$$

где

$$g(x)=\tilde f(x)-\int_0^x \psi_1\left(\frac{\xi}{2}\right)J_0\big(\sqrt{-\lambda_3}\sqrt{x(x-\xi)}\big)\,d\xi.$$

Если обозначить через $R(x,\xi)$ резольвенту уравнения (31) и предварительно считать его правую часть известной, то решение этого уравнения можно представить по формуле

$$v(x)-\int_0^1 Q_0(x,\xi)v(\xi)\,d\xi=-\omega'\left(\frac{x}{2}\right)-\int_0^x Q_1(x,\xi)\omega'\left(-\frac{\xi}{2}\right)d\xi+\tilde q(x)=\rho(x), \tag{32}$$

$$Q_0(x,\xi)=G_x(x,\xi,\lambda_1)+\int_0^1 R(x,\xi_1)G(\xi_1,\xi,\lambda_1)\,d\xi_1,$$

$$Q_1(x,\xi)=\frac{\partial}{\partial x}J_0\big(\sqrt{\lambda_3}\sqrt{x(x-\xi)}\big)+R(x,\xi)+\int_\xi^x R(x,\xi_1)\frac{\partial}{\partial x}J_0\big(\sqrt{\lambda_3}\sqrt{\xi_1(\xi_1-\xi)}\big)\,d\xi,$$

$$\tilde q(x)=\int_0^x R(x,\xi)q'(\xi)\,d\xi.$$

Таким образом, получим относительно $v(x)$ уравнение Фредгольма второго рода. С помощью резольвенты $T(x,\xi)$ уравнения (32), значение $v(x)$ записывается следующим образом

$$v(x)=\rho(x)+\int_0^1 T(x,\xi)\rho(\xi)\,d\xi. \tag{33}$$

Подставив значение $\rho(x)$ в равенство (33), получим

$$v(x)=\int_0^1 M(x,\xi)\omega'\left(-\frac{\xi}{2}\right)d\xi-\omega'\left(-\frac{x}{2}\right)+P(x), \tag{34}$$

где

$$M(x,\xi)=\begin{cases} Q_1(x,\xi)-T(x,\xi)+\int\limits_{\xi}^{1}T(x,\xi_1)Q(\xi_1,\xi)\,d\xi_1, & 0\leqslant\xi\leqslant x,\\ -T(x,\xi)+\int\limits_{\xi}^{1}T(x,\xi)Q_1(\xi_1,\xi)\,d\xi_1, & x\leqslant\xi\leqslant 1,\end{cases}$$

$$P(x)=\int\limits_0^1 T(x,\xi)\tilde{q}(\xi)\,d\xi.$$

С другой стороны, задачу (1), (2) в параболической части Ω_1 области Ω, заменой $u=e^{\lambda_1 y}$, можно свести к задаче

$$\nu_{yy}=\nu_{xx},\quad \nu(0,y)=e^{\lambda_1 y}\varphi_1(y),\quad \nu(1,y)=e^{\lambda_1 y}\varphi_2(y). \tag{35}$$

Решение задачи (35) имеет вид

$$\nu(x,y)=\int\limits_0^1\tau(\xi)\overline{G}(\xi,0;x,y)\,d\xi+\int\limits_0^y e^{\lambda_1 h}\varphi_1(h)\overline{G}_\xi(0,h;x,y)\,dh \\ -\int\limits_0^y e^{\lambda_1 h}\varphi_2(h)\overline{G}_\xi(1,h;x,y)\,dh,$$

где $\overline{G}(\xi,h;x,y)$ — функция Грина первой краевой однородной задачи (35). Найдем производную u_y, затем в полученном равенстве положим $y=0$. Будем иметь

$$v(x)=\frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{y=0}=\int\limits_0^1 K(x,\xi)\tau(\xi)\,d\xi+\theta(x), \tag{36}$$

где

$$K(x,\xi)=\lambda_1\big(\overline{G}(\xi,0;x,0)+\overline{G}_x(\xi,0;x,0)\big),$$

$$\theta(x)=\frac{\partial}{\partial y}\left\{e^{\lambda_1 y}\left[\int\limits_0^y e^{\lambda_1 h}\varphi_1(h)G_\xi(0,h;x,y)\,dh-\int\limits_0^y e^{\lambda_1 h}\varphi_2(h)G_\xi(1,h;x,y)\,dh\right]\right\}.$$

Подставляя теперь (15) в равенство (36), получим

$$v(x)=\int\limits_0^1\widetilde{K}(x,\xi)v(\xi)\,d\xi+\theta(x), \tag{37}$$

где

$$\widetilde{K}(x,\xi)=\int\limits_0^1 K(x,\xi)G(\xi,\xi_1,\lambda_1)\,d\xi.$$

Обозначим через $N(x,\xi)$ резольвенту уравнения (37), решение этого уравнения мы можем представить по формуле

$$v(x) = \theta(x) + \int\limits_0^1 N(x,\xi)\theta(\xi)\,d\xi. \tag{38}$$

Подставляя выражение (38) для $v(x)$ в формулу (34) получим относительно $\omega'\left(-\frac{x}{2}\right)$ интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$\omega'\left(-\frac{x}{2}\right) = \int\limits_0^1 M(x,\xi)\omega'\left(-\frac{\xi}{2}\right)d\xi + \overline{\theta}(x), \tag{39}$$

где $\bar{\theta}(x) = P(x) - v(x)$.

Так как эквивалентность всюду сохраняется, то из единственности решения задачи 1 следует однозначная разрешимость интегрального уравнения (39).

Аналогичным образом можно получить интегральное уравнение (39) относительно $\omega'\left(\frac{x-1}{2}\right)$. Таким образом, определены функции $\tau(x), v(x), \omega(y)$. Следовательно, определена функция $u(x,y)$ в области Ω. $\rhd$

Литература

1. *Салахитдинов М. С.* Уравнения смешанно-составного типа.—Ташкент: ФАН, 1974.—156 с.
2. *Сабитов К. Б.* К теории уравнений смешанного параболо-гиперболического типа со спектральным параметром // Дифференц. уравнения.—1989.—Т. 25, № 1.—С. 117–126.
3. *Базаров Д.* Задача Дирихле для одного уравнения смешанного типа // Изв. АН ТССР, сер. физ.-мат. наук.—1984.—№ 6.—С. 81–84.
4. *Герсеванов Н. М.* Итерационное исчисление и его приложения.—М.: Машстройиздат, 1950.—69 с.
5. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики.— М.: Наука, 1977.—716 с.

Нальчик *Статья поступила 18 апреля 2002 г.*