Владикавказский математический журнал
Апрель–июнь, 2002, Том 4, Выпуск 2

УДК **517.98**

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ ВЗВЕШЕННОЙ СВЕРТКИ

М. С. Бичегкуев

Вводится класс интегральных операторов, ядра которых порождены операторами взвешенного сдвига. Приводятся условия их ограниченности и регулярности (в терминах ядра) в пространствах Лебега, а также решается вопрос о связи между транспонированным и сопряженным операторами.

Известно, что ядро интегрального оператора свертки порождено оператором сдвига [5, 7]. Представляет интерес случай, когда ядро порождено оператором взвешенного или обобщенного сдвига. Такие операторы возникают в теории вырождающихся эллиптических уравнений, где вырождение происходит по нормали к границе и может носить достаточно общий (нестепенной) характер [4]. Весовая функция $\alpha = \alpha(t)$ в этом случае получается более общего вида и обладает конечной гладкостью вплоть до многообразия «вырождения». При этом она достаточно быстро обращается в нуль на этом многообразии.

Введем следующие обозначения $L_2^+ = L_2(\mathbb{R}^+)$ и $L_2 = L_2(\mathbb{R})$ — лебеговы пространства измеримых функций на положительной полуоси $\mathbb{R}^+$ и вещественной прямой $\mathbb{R}$, суммируемых со степенью два с нормами $\|\cdot\|^+$ и $\|\cdot\|$ соответственно; $L_p^+(\alpha^q)$ — весовое пространство Лебега с нормой

$$\|f\|_{p,q}^+ = \|\alpha^{q/2}\cdot f\|^+, \quad q\in\mathbb{R},\ p\geqslant 1,$$

где $\alpha = \alpha(t)$ — весовая функция, удовлетворяющая следующим условиям: $\alpha \in C(0,\infty)$, $0 \leqslant \alpha(t) \leqslant 1$, $\alpha(t) = 1$ при $t \geqslant d$ ($0 < d$ — фиксированное число); $\lim\limits_{t\to+0}\alpha(t) = 0$; $\lim\limits_{t\to+0}\int\limits_t^d \alpha^{-1}(\tau)d\tau < \infty$. По функции α построим функцию

$$x = \varphi(t) = \int\limits_t^d \alpha^{-1}(\tau)d\tau :\ (0,\infty)\to(-\infty,\infty).$$

Обозначим через $t = \psi(x)$ функцию, обратную к $x = \varphi(t)$, а через $\gamma(t,s)$ функцию, определяемую тождеством

$$\int\limits_\gamma^d \alpha^{-1}(\tau)d\tau = \int\limits_t^d \alpha^{-1}(\tau)d\tau - \int\limits_s^d \alpha^{-1}(\tau)d\tau \tag{1}$$

для всех $t\in\mathbb{R}^+$ и $s\in\mathbb{R}^+$.

С помощью функции α определяются операторы $G_{\alpha,2}$ и $G_{\alpha,-2}$ [4], заданные на функциях $f(t)$, $t \in \mathbb{R}^+$, и $g(x)$, $x \in \mathbb{R}$, следующими формулами:

$$G_{\alpha,2}^{t\to x}[f] = G_{\alpha,2}[f](x) = \alpha^{\frac{1}{2}}(t)f(t)\big|_{t=\psi(x)},$$

$$G_{\alpha,-2}^{x\to t}[g] = G_{\alpha,-2}[g](t) = \alpha^{-\frac{1}{2}}(t)g(x)\big|_{x=\varphi(t)}.$$

Оператор $G_{\alpha,2}$ является ограниченным в пространстве L_q^+ для всех $q \in [2,\infty)$, причем при $q = 2$ — изометрическим [2], т. е. имеют место равенства

$$\|G_{\alpha,2}[f]\| = \|f\|^+, \quad \|G_{\alpha,-2}[g]\|^+ = \|g\|.$$

Определение 1 (см. [1, 6]). *Оператором взвешенного сдвига* называют оператор, представимый в виде $Bf(x) = a(x)\cdot f(\psi(x))$, где $\psi : X \to Y$ заданное отображение, $a : X \to \mathcal{L}(E,F)$ — некоторая операторозначная функция, действующая из X в пространство ограниченных линейных операторов из банахова пространства E в банахово пространство F. Оператор B действует из пространства функций на Y со значениями в E в пространство функций на X со значениями F. В частности, операторы $G_{\alpha,2}$ и $G_{\alpha,-2}$ являются операторами взвешенного сдвига.

Введем в рассмотрение однопараметрическое семейство операторов $\{T_s : s \in \mathbb{R}^+\}$, определенных на функциях $f(t)$, $t \in \mathbb{R}^+$, следующим образом

$$T_s f(t) = \left(\frac{\alpha(\gamma(t,s))}{\alpha(t)\alpha(s)}\right)^{\frac{1}{2}} f(\gamma(t,s)). \tag{2}$$

Оно образует семейство операторов взвешенного сдвига, причем при $s = d$ оператор $T_s = I$ — тождественный оператор.

Из свойств преобразования $G_{\alpha,2}$ и функции γ имеем формулу

$$G_{\alpha,2}^{t\to x}G_{\alpha,2}^{s\to y}\big[T^s f(t)\big] = G_{\alpha,2}[f](x-y),$$

т. е. оператор T_s представляет собой аналог оператора «обычного» сдвига на $\mathbb{R}$, причем справедлива следующая

Лемма 1. *Если функции $f, g \in L_2^+$, то имеет место равенство*

$$\int_0^\infty T_s f(t)\cdot g(s)ds = \int_0^\infty f(s)\cdot T_s g(t)ds.$$

Пусть $k(t)$ — некоторая фиксированная функция на полуоси $\mathbb{R}^+$. Оператор

$$U_k f(t) = \int_0^\infty T_s k(t)\cdot f(s)ds \tag{3}$$

будем называть *интегральным оператором взвешенной свертки.* Отметим, что при $d < s < t$ оператор U_k совпадает с оператором «обычной» свертки. Применяя к обеим частям (3) оператор $G_{\alpha,2}$ и делая замену $s = \psi(y)$ в правой части, получим

$$U_k f(t) = G_{\alpha,-2}\big[G_{\alpha,2}[k] * G_{\alpha,2}[f]\big], \tag{4}$$

где $*$ — оператор «обычной» свертки [5].

Условие ограниченности оператора U_k (в терминах ядра) в пространстве L_2^+ дает

Теорема 1. *Если функция $k \in L_1^+(\alpha^{-\frac{1}{2}})$, то интегральный оператор взвешенной свертки (3) является ограниченным в пространстве L_2^+, причем*

$$\|U_k|L_2^+ \to L_2^+\| \leqslant \|k\|^+_{1,-\frac{1}{2}}.$$

$\lhd$ Используя равенство (4) и неравенство Минковского получим

$$\begin{aligned}\|U_kf\|^+ = \|G_{\alpha,2}[U_kf]\| &= \left\|\int\limits_{-\infty}^{\infty} G_{\alpha,2}[k](x-y)\cdot G_{\alpha,2}[f](y)dy\right\| \\ &= \left\|\int\limits_{-\infty}^{\infty} G_{\alpha,2}[k](y)\cdot G_{\alpha,2}[f](x-y)dy\right\| \\ &\leqslant \int\limits_{-\infty}^{\infty} \big|G_{\alpha,2}[k](y)\big|dy\cdot\|G_{\alpha,2}[f]\|.\end{aligned}$$

Отсюда, с учетом определения пространства $L_1^+(\alpha^{-\frac{1}{2}})$ и изометричности оператора $G_{\alpha,2}$ вытекает справедливость нашего утверждения. $\rhd$

Теорема 2. *Пусть оператор U_k ограничен в пространстве L_2^+ и функция k неотрицательна. Тогда функция k суммируема с весом $\alpha^{-\frac{1}{2}}$, причем справедливо равенство*

$$\|U_k|L_2^+ \to L_2^+\| = \|k\|^+_{1,-\frac{1}{2}}.$$

$\lhd$ Рассмотрим произвольные финитные функции $f \in L_2^+$ и $g \in L_2^+$. Согласно лемме 1 имеем

$$\int\limits_0^{\infty} \big(U_kf\big)(t)g(t)dt = \int\limits_0^{\infty}\left[\int\limits_0^{\infty} k(s)\cdot T_sf(t)ds\right]g(t)dt.$$

Отсюда в силу теоремы Фубини получаем

$$\int\limits_0^{\infty} \big(U_kf\big)(t)g(t)dt = \int\limits_0^{\infty} k(s)\left[\int\limits_0^{\infty} T_sf(t)\cdot g(t)dt\right]ds.$$

Используя неравенство Гёльдера для правой части равенства получим оценку

$$\left|\int\limits_0^{\infty} k(s)\left[\int\limits_0^{\infty} T_sf(t)\cdot g(t)dt\right]ds\right| \leqslant \|U_k|L_2^+ \to L_2^+\|\cdot\|f\|^+\cdot\|g\|^+. \tag{5}$$

Перепишем неравенство (5) с учетом формулы (4) в виде

$$\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty} G_{\alpha,2}[k](y)\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} G_{\alpha,2}[f](x-t)\cdot G_{\alpha,2}[g](x)dx\right]dy\right|$$

$$\leqslant \|U_k|L_2^+ \to L_2^+\| \cdot \|G_{\alpha,2}[f]\| \cdot \|G_{\alpha,2}[g]\|.$$

Зафиксируем число $r \in (0,1)$ и рассмотрим интервал $S_r = (-r, r)$. Положим

$$G_{\alpha,2}[g](x) = G_{\alpha,2}[f](x) = \begin{cases} (\operatorname{mes} S_r)^{-\frac{1}{2}} & \text{при } x \in S_r, \\ 0 & \text{при } x \notin S_r, \end{cases}$$

где $\operatorname{mes} S_r$ — мера Лебега интервала S_r. Ясно, что $G_{\alpha,2}[f] \in L_2^+$ и $G_{\alpha,2}[g] \in L_2^+$, причем $\|G_{\alpha,2}[f]\| = \|G_{\alpha,2}[g]\| = 1$.

Обозначим через $\chi_r(y)$ функцию, определяемую равенством

$$\chi_r(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_{\alpha,2}[f](x-y) \cdot G_{\alpha,2}[g](x)dx = \frac{\operatorname{mes}(S_r \cap S_{r,y})}{\operatorname{mes} S_r},$$

где $S_{r,y} = \{x \in \mathbb{R} : |x-y| < r\}$. Функция $\chi_r(y)$ обладает следующими свойствами:

$$0 \leqslant \chi_r(y) \leqslant 1, \quad \lim_{r\to\infty} \chi_r(y) = 1.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} G_{\alpha,p}[k](y) \cdot \chi_r(y)dy \leqslant \|U_k|L_2^+ \to L_2^+\|.$$

Переходя к пределу при $r \to \infty$ и используя теорему Фату, получим

$$\|k\|_{1,-\frac{1}{2}}^+ \leqslant \|U|L_2^+ \to L_2^+\|,$$

а с другой стороны, согласно теореме 1, имеем

$$\|U_k|L_2^+ \to L_2^+\| \leqslant \|k\|_{1,-\frac{1}{2}}^+.$$

Итак, справедливость требуемого равенства установлена. $\rhd$

Определение 2 (см. [5]). Ограниченный интегральный оператор

$$Vf(s) = \int\limits_{\Omega} k(s,t)f(t)dt$$

действующий из $L_p(\Omega)$ в $L_q(\Omega)$ называется *регулярным*, если интегральный оператор

$$|V|f(s) = \int\limits_{\Omega} |k(s,t)|f(t)dt$$

также действует из $L_p(\Omega)$ в $L_q(\Omega)$ и ограничен.

Известно, что не каждый интегральный оператор регулярен [5].

Теорема 3. *Для того, чтобы интегральный оператор взвешенной свертки* (3) *был регулярным, необходимо и достаточно, чтобы* $k \in L_1^+\big(\alpha^{-\frac{1}{2}}\big)$.

$\lhd$ Н е о б х о д и м о с т ь непосредственно следует из теоремы 2.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Для оператора (3) с ядром содержащим функцию $|k|$, в силу теоремы 1 имеем

$$\big\|U_{|k|}f\big\|^+ \leqslant \int\limits_0^\infty \alpha^{-\frac{1}{2}}(t)|k(t)|dt \cdot \big\|f\big\|^+ = \big\|k\big\|^+_{1,-\frac{1}{2}} \cdot \big\|f\big\|^+.$$

Здесь мы воспользовались неотрицательностью функций $\alpha = \alpha(t)$. $\rhd$

Пусть k — фиксированная измеримая функция, принадлежащая пространству $L_1^+\big(\alpha^{-\frac{1}{2}}\big)$. Рассмотрим оператор

$$U_k^{\#} f(s) = \int\limits_0^\infty T_s k(t) \cdot f(t)dt, \tag{6}$$

который будем называть *транспонированным* по отношению к оператору (3).

Свойства транспонированного оператора $U_k^{\#}$ характеризует

Теорема 4. *Пусть* $k \in L_1^+\big(\alpha^{-\frac{1}{2}}\big)$. *Тогда оператор* $U_k^{\#}$ *действует в пространстве* L_2^+, *совпадает с сопряженным* U_k^* *к оператору* (3) *и регулярен.*

$\lhd$ Применяя к обеим частям (6) оператор $G_{\alpha,2}^{s\to y}$, получим

$$\begin{aligned} G_{\alpha,2}^{s\to y}\big[U_k^{\#}f\big] &= \int\limits_0^\infty G_{\alpha,2}^{s\to y}\big[T_s k(t)\big] \cdot f(t)dt \\ &= \int\limits_{-\infty}^\infty G_{\alpha,2}[k](x-y) \cdot G_{\alpha,2}[f](x)dx. \end{aligned}$$

Отсюда при помощи неравенства Минковского получим

$$\big\|U_k^{\#}f\big\|_2^+ \leqslant \|k\|_{1,-\frac{1}{2}} \|f\|^+.$$

Таким образом, $U_k^{\#} : L_2^+ \to L_2^+$ и $\big\|U\big|L_2^+ \to L_2^+\big\| \leqslant \|k\|^+_{1,-\frac{1}{2}}$.

Докажем, что $U_k^{\#} = U_k^*$. Для ограниченных функций $f \in L_2^+$ и $g \in L_2^+$ согласно теореме Фубини получаем равенство

$$\int\limits_0^\infty \bigg[\int\limits_0^\infty T_s k(t) \cdot f(t)dt\bigg] g(s)ds = \int\limits_0^\infty \bigg[\int\limits_0^\infty T_s k(t) \cdot g(s)ds\bigg] f(t)dt,$$

которое перепишем в виде

$$\langle U_k g, f\rangle^+ = \langle g, U_k^{\#} f\rangle^+,$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение в L_2^+. С другой стороны, $\langle U_k g, f\rangle^+ = \langle g, U_k^* f\rangle^+$. Следовательно, для любых ограниченных функций f и g справедливо равенство $\langle g, (U_k^\# - U_k^*)f\rangle^+ = 0$. Отсюда, с учетом плотности множества ограниченных функций в L_2^+ заключаем, что $U_k^\# = U_k^*$. Так как U_k — регулярный оператор, а сопряженный к регулярному оператору оператор регулярен (см. [5]), то U_k^* регулярен. $\triangleright$

Литература

1. *Антоневич А. Б.* Условие ограниченности и норма оператора внутренней суперпозиции в пространстве вектор-функций // Мат. заметки.—1985.—Т. 45, № 1.—С. 3–9.
2. *Бичегкуев М. С.* Об одном классе операторов обобщенного и взвешенного сдвига на полуоси // Деп. в ВИНИТИ, 1994.—1411-В-94.—27 с.
3. *Бичегкуев М. С.* Интегральные операторы, порожденные оператором взвешенного сдвига // Мат. заметки.—1996.—Т. 59, № 3.—С. 452–454.
4. *Глушко В. П., Савченко Ю. Б.* Вырождающиеся эллиптические уравнения высокого порядка: пространства, операторы, граничные задачи // Итоги науки и техники. Математический анализ.—1985.—Т. 23.—С. 125–218.
5. *Коротков В. Б.* Интегральные операторы.—Новосибирск: Наука, 1983.—222 с.
6. *Латушкин Ю. Д., Степин А. М.* Операторы взвешенного сдвига и линейные расширения динамических систем // УМН.—1991.—Т. 47, № 2 (278).—С. 85–143.
7. *Степанов В. Д.* Об операторах в пространствах $L_p(\mathbb{R}_n)$ перестановочных со сдвигом // Сиб. мат. журн.—1974.—Т. 15, № 3.—С. 693–699.

Владикавказ *Статья поступила 5 апреля 2002 г.*