Владикавказский математический журнал
Апрель–июнь, 2002, Том 4, Выпуск 2

УДК **517.5**

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА В АНИЗОТРОПНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА

М. С. Алборова

Получены функционально-геометрические условия на область, обеспечивающие справедливость некоторых интегральных неравенств и теорем вложения для анизотропных функциональных пространств.

Пусть $\mathbb{R}^n$ — евклидово пространство точек $x = (x_1, ..., x_n)$, $\vec{l} = (l_1, ..., l_n)$ — мультииндекс, $l_i > 0$.

Рассмотрим однопараметрическую группу преобразований $\mathbb{R}^n$

$$H_t(x) = \left(t^{\frac{l^*}{l_1}} x_1, ..., t^{\frac{l^*}{l_n}} x_n\right) \quad \left(t \in \mathbb{R}^+\right),$$

где $\frac{1}{l^*} = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{l_i}$, и гладкую H_t-однородную метрику, определяемую вектором

$$\vec{l} \in \mathbb{N}^n, \quad r : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^+, \quad r(H_t(x)) = tr(x),\ x \in \mathbb{R}^n,$$

непрерывную на $\mathbb{R}^n$.

Шаром с центром в точке x радиуса ρ называется множество

$$B_\rho(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : r(x, y) < \rho\}.$$

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — открытое подмножество, $p \geqslant 1$. Будем говорить, что функция $f \in L_p(\Omega)$ принадлежит классу $L_p^{\vec{l}}(\Omega)$, если она имеет обобщенные производные

$$D^\alpha f \in L_p(\Omega), \qquad |\alpha : l| = 1.$$

Здесь $D^\alpha f = \frac{\partial^\alpha f}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_n^{\alpha_n}}$, $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ и $|\alpha : l| = \frac{\alpha_1}{l_1} + ... + \frac{\alpha_n}{l_n}$. Для таких функций определим полунорму:

$$\|f\|_{L_p^{\vec{l}}(\Omega)} = \sum_{|\alpha : l| = 1} \|D^\alpha f\|_{L_p(\Omega)}.$$

Пространством $\overset{\circ}{L}{}_p^{\vec{l}}(\Omega)$ назовем замыкание в норме

$$\|f\|_{\overset{\circ}{L}{}_p^{\vec{l}}(\Omega)} = \sum_{|\alpha : l| = 1} \|D^\alpha f\|_{L_p(\Omega)}$$

множества $C_0^\infty(\Omega)$ — бесконечно дифференцируемых функций с носителями в Ω.

© 2002 Алборова М. С.

Введем пространство

$$V_p^{\vec{l}} = \bigcap_{|k:l|\leqslant 1} L_p^k(\Omega),$$

снабженное нормой

$$\|f\|_{V_p^{\vec{l}}} = \sum_{|\alpha:l|\leqslant 1} \|D^\alpha f\|_{L_\rho(\Omega)}.$$

Введенные выше простраства изучались в работах Водопьянова С.К. [1–5].

Пусть $e \in \mathbb{R}^n$ — замкнутое множество. Емкостью множества e назовем величину

$$\mathrm{Cap}\ \left(e, \overset{\circ}{L}{}_p^{\vec{l}}(\Omega)\right) = \inf\left\{\|u\|^p_{\overset{\circ}{L}{}_p^{\vec{l}}(\Omega)} : u \in \mathfrak{M}(e,\Omega)\right\},$$

где $\mathfrak{M}(e,\Omega) = \{u \in C_0^\infty(\Omega) : u = 1$ в окрестности $e\}$ (см. [6]).

Пусть e — компактное подмножество шара $\bar{B}_\rho$. Будем говорить, что e — (p, l^*)-несущественное подмножество B_ρ, если

$$\mathrm{Cap}\,(e, \overset{\circ}{L}{}_p^{\vec{l}}(B_\rho)) \leqslant \gamma\rho^{n-pl^*},$$

$n \geqslant pl^*,\ p > 1$ или $n > l^*,\ p = 1$, где γ — достаточно малая константа, зависящая только от n, p, $\vec{l}$.

Совокупность всех (p, l^*)-несущественных подмножеств шара B_ρ обозначим через $\mathcal{N}(B_\rho)$. А через $\bar{u}_{B_\rho}$ — среднее значение функции u на шаре B_ρ, т. е. $\bar{u}_{B_\rho} = [m_n(B_\rho)]^{-1} \int\limits_{B_\rho} u dx$.

Введем еще полунорму

$$|u|_{p,l^*,B_\rho} = \sum_{0<|\beta:l|\leqslant 1} \rho^{l^*(|\beta:l|-1)}\|D^\beta u\|_{L_p(B_\rho)},$$

где $\beta = (\beta_1, ..., \beta_n) \in \mathbb{N}^n$.

Теорема 1. *Пусть e — замкнутое подмножество шара B_ρ. Для всех функций $u \in C^\infty(\bar{B}_\rho)$ таких, что* $\mathrm{dist}\,(\mathrm{supp}\, u, e) > 0$ *верно неравенство*

$$\|u\|_{L_q(B_\rho)} \leqslant C\ |u|_{p,l^*,B_\rho}, \tag{1}$$

где

$$1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty, \quad \kappa = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)\sum_{i=1}^n \frac{1}{l_i} \leqslant 1.$$

При $\kappa = 1 \quad (1 \leqslant p = q < \infty)$, константа C допускает оценку

$$C^{-p} \geqslant \rho^{-\frac{np}{q}} c_1 \mathrm{Cap}\ \left(e, \overset{\circ}{L}{}_p^{\vec{l}}(B_\rho)\right). \tag{2}$$

Доказательство теоремы основывается на следующих результатах.

Предложение 1. *Существует оператор продолжения $A : L_p^{\vec{k}}(\bar{B}_\rho) \to L_p^{\vec{k}}(\bar{B}_{2\rho})$ такой, что*

(1) $Av = v$ *на* $\bar{B}_\rho$*;*

(2) *если* $\operatorname{dist}(\operatorname{supp} v, e) > 0$, e *компакт в* B_ρ, *то* $\operatorname{dist}(\operatorname{supp}(Av), e) > 0$*;*

(3) $\|D^k(Av)\|_{L_p(B_{2\rho})} \leqslant c\|D^k u\|_{L_p(B_\rho)}$, где $|k:l| \leqslant 1$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

$\lhd$ Доказательство следует из результатов работ [7–11] $\rhd$

Лемма 1. *Пусть e — компакт в B_1. Существует такая постоянная $c > 1$, что*

$$c^{-1}\mathrm{Cap}\left(e, \overset{\circ}{L}{}^{\vec{l}}_p(B_2)\right) \leqslant \inf\{\|1-u\|^p_{V_p^{\vec{l}}}(B_1) : u \in C_0^\infty(\bar{B}_1),$$
$$\operatorname{dist}(\operatorname{supp} u, e) > 0\} \leqslant c\ \mathrm{Cap}\left(e, \overset{\circ}{L}{}^{\vec{l}}_p(B_2)\right). \quad (3)$$

$\lhd$ Пусть $v = A(1-u)$. Обозначим через η функцию из $C_0^\infty(B_2)$, равную единице в окрестности шара B_1. Тогда

$$\mathrm{Cap}(e, B_2) < c\int\limits_{B_2}\sum_{|\alpha:l|=1}|D^\alpha(\eta v)|^p dx = c\int\limits_{B_2}\sum_{|\alpha:l|=1}\left|\sum_{\beta=0}^{\alpha}C_\alpha^\beta D^\beta v D^{\alpha-\beta}\eta\right|^p dx \leqslant \quad (4)$$

(так как $\eta \in C_0^\infty(B_2)$, то эта функция вместе со своими производными ограничена)

$$\leqslant c\int\limits_{B_2}\sum_{|\alpha:l|=1}\left|\sum_{\beta=0}^{\alpha}D^\beta v\right|^p dx \leqslant c\|v\|^p_{V_p^{\vec{l}}(B_2)}$$

$$\leqslant c\ \inf\left\{\|1-u\|^p_{V_p^{\vec{l}}(B_1)} : u \in C_0^\infty(\bar{B}_1),\ \operatorname{dist}(\operatorname{supp} u, e) > 0\right\}, \quad (5)$$

и левая часть (3) доказана. Докажем правую часть оценки (3). Пусть $w \in \mathfrak{M}(e, B_2)$. Тогда

$$\|w\|^p_{V_p^{\vec{l}}(B_1)} \leqslant c\sum_{|\alpha:l|\leqslant 1}\|D^\alpha w\|_{L_p(B_2)} \leqslant c\sum_{|\alpha:l|=1}\|D^\alpha w\|_{L_p(B_2)}. \quad (6)$$

Минимизируя последнюю норму на множестве $\mathfrak{M}(e, B_2)$ получим

$$\|w\|_{V_p^{\vec{l}}(B_2)} \leqslant c\ \mathrm{Cap}\left(e, \overset{\circ}{L}{}^{\vec{l}}_p(B_2)\right).$$

Минимизируя левую часть, заканчиваем доказательство. $\rhd$

Теперь докажем теорему 1.

$\lhd$ Достаточно доказать теорему при $\rho = 1$. А затем воспользоваться H_t-однородным преобразованием. Пусть $N = \|u\|_{L_p}(B_1)$. Так как $\operatorname{dist}(\operatorname{supp} u, e) > 0$, то по лемме 1

$$\mathrm{Cap}(e, \overset{\circ}{L}{}^{\vec{l}}_p(B_2)) \leqslant c\|1-N^{-1}u\|^p_{V_p^{\vec{l}}(B_1)} = cN^{-p}|u|^p_{p,l^*,B_1} + C\|1-N^{-1}u\|^p_{L_p(B_1)},$$

т. е.

$$N^p\mathrm{Cap}(e, \overset{\circ}{L}{}^{\vec{l}}_p(B_2)) \leqslant C|u|^p_{p,l^*,B_1} + \|N-u\|^p_{L_p(B_1)}. \quad (7)$$

Без ограничения общности можно предположить, что $\bar{u}_{B_1} \geqslant 0$. Тогда

$$|N - \bar{u}_{B_1}| = \Big| \|u\|_{L_p(B_1)} - \|\bar{u}_{B_1}\|_{L_p(B_1)} \Big| \leqslant \|u - \bar{u}_{B_1}\|_{L_p(B_1)}.$$

Следовательно,

$$\|N - u\|_{L_p(B_1)} \leqslant \|N - \bar{u}_{B_1}\|_{L_p(B_1)} + \|u - \bar{u}_{B_1}\|_{L_p(B_1)} \leqslant 2\|u - \bar{u}_{B_1}\|_{L_p(B_1)}. \tag{8}$$

В силу (7), (8) и неравенства Пуанкаре для анизотропных пространств

$$\|u - \bar{u}_{B_1}\|_{L_p(B_1)} \leqslant c \sum_{|\alpha:l|=1} \|D^\alpha u\|_{L_p(B_1)},$$

справедлива оценка

$$\mathrm{Cap}\,(e, \mathring{L}_p^{\vec{l}}(B_2))\ \|u\|^p_{L_p(B_1)} \leqslant |u|^p_{p,l^*,B_1}.$$

Из теорем вложения для анизотропных пространств (см. [13]) и последнего неравенства получаем

$$\|u\|^p_{L_q(B_1)} \leqslant c\ (|u|^p_{p,l^*,B_1} + \|u\|^p_{L_p(B_1)}) \leqslant \{1 + [\mathrm{Cap}\,(e, \mathring{L}_p^{\vec{l}}(B_2))]^{-1}\}|u|^p_{p,l^*,B_1}.$$

Утверждение теоремы 1 доказано. $\triangleright$

Отметим, что в изотропном случае теорема 1 доказана в работе Мазьи [12] и при помощи другого метода при $p > 1$ Хедбергом [13].

Теорема 2. *Пусть e — замкнутое подмножество $\bar{B}_\rho$ и δ — число из интервала $(0,1)$. Тогда для всех функций из множества*

$$\Big\{u \in C^\infty(\bar{B}_\rho):\ \bar{u}_{B_\rho} \geqslant 0,\ u(x) \leqslant \delta\rho^{-\frac{n}{p}}\|u\|_{L_p(B_\rho)}\ \textit{при всех}\ x \in e\Big\}$$

справедливо неравенство:

$$\|u\|_{L_q(B_\rho)} \leqslant C\ |u|_{p,l^*,B_\rho}, \qquad \text{где } C^{-p} \geqslant c_1(1-\delta)^{-\frac{np}{q}}\mathrm{Cap}\,\left(e, \mathring{L}_p^{\vec{l}}(B_{2\rho})\right).$$

$\triangleleft$ Повторяя доказательство леммы 1, получаем

$$c^{-1}\mathrm{Cap}\,(e, \mathring{L}_p^{\vec{l}}(B_2)) \leqslant \inf\left\{\|1-u\|^p_{V_p^{\vec{l}}(B_1)} : u \in C^\infty(\bar{B}_1), u \leqslant 0 \text{ на } e\right\}$$
$$\leqslant c\mathrm{Cap}\,\left(e, \mathring{L}_p^{\vec{l}}(B_2)\right).$$

Далее из неравенства $1 - N^{-1}u > 1 - \delta$ на e вытекает оценка

$$(1-\delta)^p\mathrm{Cap}\,\left(e, \mathring{L}_p^{\vec{l}}(B_2)\right) \leqslant c\|1 - N^{-1}u\|^p_{V_p^l(B_1)},$$

и остается повторить доказательство теоремы 1. $\triangleright$

Теорема 3. *Пусть $n = l^* p$, $p > 1$. B_ρ — шар, для которого*

$$\operatorname{Cap}(\bar{B}_\rho \backslash \Omega, \overset{\circ}{L}{}_p^{\vec{l}}(\Omega)) > 0.$$

Тогда для всех функций $u \in D(\Omega)$

$$\|u\|^p_{L_q(B_\rho)} \leqslant C \sum_{|\alpha : l| = 1} \|D^\alpha u\|^p_{L_p(\Omega)}, \tag{9}$$

где

$$C \leqslant c d^{np/q} \Big[\operatorname{Cap}(B_\rho \backslash \Omega, \overset{\circ}{L}{}_p^{\vec{l}}(B_{2\rho})) \Big]^{-1}.$$

$\lhd$ Согласно теореме 1 имеем

$$\|u\|^p_{L_p(B_\rho)} \leqslant c d^{np/q} \left[\operatorname{Cap} \left(B_\rho \backslash \Omega, \overset{\circ}{L}{}_p^{\vec{l}}(B_{2\rho}) \right) \right]^{-1} \cdot |u|_{p, l^*, B_\rho}. \tag{10}$$

Поскольку при

$$|\beta : l| \leqslant 1 \quad \text{и} \quad q_\beta = \frac{pn}{n - pl^*(1 - |\beta : l|)}$$

справедливы неравенства

$$\|D^\beta u\|_{L_p(B_{2\rho})} \leqslant c \rho^{l^*(1 - |\beta : l|)} \|D^\beta u\|_{L_{q_\beta} \Omega} \leqslant c \rho^{l^*(1 - |\beta : l|)} \cdot \sum_{|\alpha : l| = 1} \|D^\alpha u\|_{L_p(\Omega)},$$

то

$$\|u\|_{p, l^*, B_{2\rho}} \leqslant c \sum_{|\alpha : l| = 1} \|D^\alpha u\|_{L_p(\Omega)}. \tag{11}$$

Неравенства (10) и (11) дают оценку (9). $\rhd$

Литература

1. *Водопьянов С. К.* Геометрические свойства областей, удовлетворяющих условию продолжения для пространств дифференцируемых функций // Некоторые приложения функционального анализа к задачам математической физики (Тр. семинара С. Л. Соболева).—Новосибирск.—1984, № 2.—С. 65–95.
2. *Водопьянов С. К.* О принципе максимума в теории потенциала // Тезисы докл. XI Всесоюзной школы по теории операторов в функциональных пространствах. Ч. 1—Челябинск, 1986.—С. 29.
3. *Водопьянов С. К.* Анизотропные пространства дифференцируемых функций и квазиконформные отображения // Тезисы докл. XI Всесоюзной школы по теории операторов в функциональных пространствах. Ч 2.—Челябинск, 1986.—С. 23.
4. *Водопьянов С. К.* Геометрические свойства отображений и областей. Оценка снизу нормы оператора продолжения // Исследования по геометрии и математическому анализу.—Новосибирск: Наука, 1987.—С. 70–101.
5. *Водопьянов С. К.* Сравнение метрических и емкостных характеристик в теории потенциала // Школа по комплексному анализу и математической физике. Дивногорск, июнь 1987: Тез. докладов.—Красноярск, 1987.—С. 21.

6. *Алборова М. С., Водопьянов С. К.* Устранимые особенности для решения квазилинейных квазиэллиптических уравнений // Сиб. мат. журн.—1992.—Т. 34, № 4, С. 3–14.
7. *Бесов О. В.* Продолжение функций из L_p^l и W_p^l // Тр. МИАН СССР.—1967.—Т. 89.—С. 5–17.
8. *Бесов О. В., Ильин В. П.* Естественное расширение класса областей в теоремах вложения // Мат. сборник.—1968.—Т. 75 (117), вып. 4.—С. 483–495.
9. *Ильин В. П.* Интегральные представления дифференцируемых функций и их применения в вопросах продолжения функций классов $W_p^l(g)$ // Сиб. мат. журн.—1967.—№ 7.—С. 573–583.
10. *Успенский С. В., Демиденко Г. В., Перепелкин В. Г.* Теоремы вложения и приложения к дифференциальным уравнениям.—Новосибирск: Наука, 1984.—С. 224.
11. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения.—М.: Наука, 1975.
12. *Мазья В. Г.* Пространства С. Л. Соболева.—Л.: Изд-во ЛГУ, 1985.—416 с.
13. *Hedberg L.* Two appoximation problems in function spaces // Ark. Mat.—1978.—V. 16, No. 1.—P. 51–81.

Владикавказ *Статья поступила 15 апреля 2002 г.*