Владикавказский математический журнал
Апрель–июнь, 2002, Том 4, Выпуск 2

З А М Е Т К И

ОБ ОДНОЙ ГИПОТЕЗЕ С. ЛЕНГА

Б. Г. Тасоев

Начало теории приближения алгебраических чисел рациональными числами положил Ж. Лиувилль в 1844 г., который опубликовал первую теорему, дающую некоторый необходимый признак алгебраичности числа и, следовательно, достаточный признак трансцендентности [1, 2]. Усиления теоремы Лиувилля в дальнейшем получили А. Туэ, К. Зигель, Ф. Дайсон, А. О. Гельфонд. Существенное продвижение в проблеме приближения алгебраических чисел рациональными получил К. Рот в 1955 г. Им доказана следующая теорема.

Теорема Рота. *Пусть* $\alpha \in \mathbb{A}$, $\deg \alpha = n \geqslant 3$, *а* δ — *любое положительное число. Тогда неравенство*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^{2+\delta}}$$

имеет лишь конечное число решений в числах $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$.

Долгое время в теореме Рота не удается заменить функцию q^δ на функцию, растущую медленнее, чем q^δ. С. Ленг в 1965 г. заметил, что «очень трудной является гипотеза, состоящая в том, что для числа α степени $n \geqslant 3$ неравенство

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2(\ln q)^\kappa}$$

имеет лишь конечное число решений при $\kappa > 1$ или, по крайней мере, при $\kappa > \kappa_0(\alpha)$» (см. [3], стр. 98).

В настоящей заметке аннотируется следующий результат, подтверждающий гипотезу С. Ленга.

Теорема. *Пусть* $\alpha \in \mathbb{A}$, $\deg \alpha = n$, $n \geqslant 3$, *а* δ — *любое положительное число. Тогда неравенство*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{(n-2)^{1+\delta} q^2 \ln^{1+\delta} q}$$

имеет только лишь конечное число решений в числах $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$.

Доказательство будет опубликовано в одном из следующих выпусков журнала.

Литература

1. *Фельдман Н. И.* Приближения алгебраических чисел.—М.: Изд-во МГУ, 1982.
2. *Шидловский А. Б.* Диофантовы приближения и трасцендентные числа.—М.: Изд-во МГУ, 1982.
3. *Шмидт В.* Диофантовы приближения.—М.: Мир, 1982.

© 2002 Тасоев Б. Г.