Владикавказский математический журнал
Январь–март, 2002, Том 4, Выпуск 1

УДК **517.98**

ФОРМУЛА ХАНА — БАНАХА — КАНТОРОВИЧА ДЛЯ РЕШЕТОЧНОГО СУБДИФФЕРЕНЦИАЛА

В. А. Раднаев

Исследуется решеточный субдифференциал $\partial_H P$ для сублинейного оператора P, являющийся подмножеством ∂P, состоящим из решеточных гомоморфизмов. На этом пути выводится формула Хана — Банаха — Канторовича для решеточного субдифференциала, развивающая известную теорему о мажорированном продолжении решеточного гомоморфизма.

Одной из наиболее важных задач субдифференциального исчисления является анализ классической двойственности Минковского, т. е. отображения, сопоставляющего сублинейному оператору его опорное множество или, что то же самое, субдифференциал (в нуле). При этом основополагающую роль играют вопросы геометрического строения субдифференциала. Возникающие здесь задачи прежде всего связаны с описанием множества крайних точек субдифференциала, изучением способов восстановления субдифференциала по крайним точкам, см. [1].

Хорошо известно, что решеточные гомоморфизмы часто возникают как крайние точки субдифференциалов, и наоборот, крайние точки некоторых субдифференциалов являются решеточными гомоморфизмами (см. [2–4]). Наш метод изучения данной взаимосвязи для субдифференциала ∂P сублинейного оператора P заключается в исследовании *решеточного субдифференциала* $\partial_H P$, являющегося подмножеством ∂P, состоящим из решеточных гомоморфизмов. Изучение данного явления ограничено классом так называемых *минорируемых* сублинейных операторов, т. е. сублинейных операторов, имеющих непустой решеточный субдифференциал. Здесь возникает важное понятие *точной миноранты* $M(P)$ сублинейного оператора, сохраняющего конечные верхние грани, к которому в основном сводится изучение решеточного субдифференциала, и исследование возникаюших взаимосвязей приводит к соотношению между формулой Хана — Банаха — Канторовича для решеточного субдифференциала $\partial_H P$ и формулой замены переменной в точной миноранте $M(P)$. На этом пути устанавливаются характеризации решеточных гомоморфизмов, лежащих в субдифференциале сублинейного оператора, сохраняющего конечные верхние грани, в терминах его крайних точек, развивающие некоторые результаты из [4] и [5]. В качестве вспомогательного результата для произвольного положительного ортоморфизма α и сублинейного оператора P выведена формула $\mathrm{Ch}(\alpha P) = \alpha \mathrm{Ch}(P)$, связывающая между собой крайние точки субдифференциалов $\partial(\alpha P)$ и ∂P, полученная как ответ на один вопрос, поставленный А. Г. Кусраевым и С. С. Кутателадзе в работе [6]. Из полученных результатов мы выводим основной результат настоящей работы — формулу Хана — Банаха — Канторовича для решеточного субдифференциала. Важным частным случаем полученной формулы является известная теорема о мажорированном продолжении решеточного гомоморфизма, установленная впервые Баскесом и ван Ружем в [5].

Перейдем к точным формулировкам. Всюду ниже X — произвольная векторная решетка, E — K-пространство. Все векторные решетки рассматриваются над полем $\mathbb{R}$ вещественных чисел. Через $\mathrm{Sbl}(X, E)$ обозначается множество сублинейных операторов, действующих из X в E. *Опорным множеством* или *субдифференциалом* (в нуле) ∂P сублинейного оператора $P \in \mathrm{Sbl}(X, E)$ называют совокупность всех линейных операторов из X в E, мажорируемых P или *опорных* к P, т. е.

$$\partial P := \{T \in L(X, E) : (\forall x \in X) Tx \leqslant P(x)\},$$

где $L(X, E)$ — пространство линейных операторов из X в E. Символом $\mathrm{Ch}(P)$ обозначается совокупность всех крайних (или экстремальных) точек субдифференциала ∂P. Отображение $P : X \to E$ называют *возрастающим* (*сохраняющим конечные верхние грани*), если для любых элементов $x_1, x_2 \in X$ из $x_1 \leqslant x_2$ следует, что $P(x_1) \leqslant P(x_2)$ (соответственно $P(x_1 \vee x_2) = P(x_1) \vee P(x_1)$). Линейный оператор, действующий между векторными решетками и сохраняющий конечные верхние грани, называется *решеточным гомоморфизмом*. K-пространство регулярных операторов, действующих из векторной решетки X в K-пространство E обозначаем символом $L_r(X, E)$. Множество всех решеточных гомоморфизмов, действующих из X в E, обозначаем символом $\mathrm{Hom}(X, E)$. Будем говорить, что операторы $T_1, T_2 \in L_r(x, E)$ являются *сильно дизъюнктными*, если обычная дизъюнктность равносильна дизъюнктности их образов, т. е. $|T_1| \perp |T_2| \leftrightarrow \mathrm{im}(T_1) \perp \mathrm{im}(T_2)$. Под сильной дизъюнктностью семейства операторов будем понимать их попарную сильную дизъюнктность.

Определение 1. Для сублинейного оператора $P : X \to E$ множество $\partial_H P := \partial P \cap \mathrm{Hom}(X, E)$ называем *решеточным субдифференциалом*.

Определение 2. Сублинейный оператор $Q : X \to E$ называется *минорантой* P, если $Q \leqslant P$ поточечно и Q сохраняет конечные верхние грани. При этом сублинейный оператор P будем называть *минорируемым*.

Ясно, что решеточные гомоморфизмы из $\partial_H P$ являются минорантами P. Отметим, что в силу [7, предложение 3.1 (2)] сублинейный оператор P является минорируемым в том и только в том случае, когда решеточный субдифференциал $\partial_H P$ непуст.

Определение 3. Пусть $P : X \to E$ — минорируемый сублинейный оператор. Тогда миноранту Q отображения P назовем *точной*, если выполнено соотношение $\partial_H P = \partial_H Q$.

В работе [7, предложение 3.1] доказывается, что каждый минорируемый сублинейный оператор обладает единственной точной минорантой, которую обозначим через $M(P)$. Формулы точных минорант для широких классов сублинейных операторов установлены в [7]. Минорируемыми сублинейными операторами, в частности, являются все возрастающие сублинейные операторы (см. [7, предложение 4.1]).

Предложение 4. *Пусть P, Q — сублинейные операторы, сохраняющие конечные верхние грани. Тогда $P = Q$ в том и только в том случае, когда $\partial_H P = \partial_H Q$.*

$\lhd$ Непосредственно вытекает из того, что отображения P и Q являются поточечными верхними огибающими операторов из соответствующих решеточных субдифференциалов (см. [7, предложение 3.1]). $\rhd$

Известно, что субдифференциалы являются операторно выпуклыми множествами. Решеточные субдифференциалы обладают аналогичным свойством, но в «ограниченном смысле», что делает их похожими на множества крайних точек обычных субдифференциалов. Пусть $\mathrm{Pr}(E)$ обозначает полную булеву алгебру порядковых проекторов в E.

Предложение 5. *Пусть $P : X \to E$ — минорируемый сублинейный оператор. Тогда решеточный субдифференциал $\partial_H P$ замкнут относительно перемешиваний, т. е. для любого семейства решеточных гомоморфизмов $(T_\xi)_{\xi\in\Xi} : X \to E$ таких, что $T_\xi \in \partial P(\xi \in \Xi)$, и всякого разбиения единицы $(\pi_\xi)_{\xi\in\Xi}$ в булевой алгебре $\mathrm{Pr}(E)$ существует $T := o\text{-}\sum_{\xi\in\Xi}\pi_\xi T_\xi$ (относительно o-сходимости в $L_r(X,E)$), являющийся решеточным гомоморфизмом, лежащим в ∂P.*

$\lhd$ В силу сильной операторной выпуклости субдифференциала (см. [1, 2.2.8 (1)]) существует оператор $T \in \partial P$, определенный как поточечная o-сумма семейства операторов $\{\pi_\xi T_\xi : \xi \in \Xi\}$, т. е. $Tx := o\text{-}\sum_{\xi\in\Xi}\pi_\xi T_\xi(x)$ $(x \in X)$. Так как T_ξ положительны, то применив [8, V.III. 2.4.], выводим, что $T := o\text{-}\sum_{\xi\in\Xi}\pi_\xi T_\xi$ относительно o-сходимости в $L_r(X,E)$. Наконец, заметим, что семейство операторов $\{\pi_\xi T_\xi : \xi \in \Xi\}$ является сильно дизъюнктным, порядково ограниченным и состоит из решеточных гомоморфизмов. Прямой проверкой несложно убедиться, что T также будет решеточным гомоморфизмом. $\rhd$

В последующем нам понадобится

Лемма 6. *Пусть для некоторого сублинейного оператора $P : X \to E$, операторов $T, S \in L(X,E)$, проектора $\pi \in \mathrm{Pr}(E)$ выполняется $T \in \mathrm{Ch}(\pi \circ P)$, $S \in \mathrm{Ch}(\pi^d \circ P)$. Тогда $T + S \in \mathrm{Ch}(P)$.*

$\lhd$ Пусть $T + S = \lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2$, где $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}_+$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ и $U_1, U_2 \in \partial P$. Так как $T \leqslant \pi \circ P$, $S \leqslant \pi^d \circ P$, то $\pi \circ T = T$, $\pi^d \circ S = S$. Отсюда $\pi \circ S = \pi^d \circ T = 0$. Стало быть, $\pi \circ T = \pi \circ (T + S) = \lambda_1 \pi \circ U_1 + \lambda_2 \pi \circ U_2$, что по условию леммы влечет $T = \pi \circ U_1 = \pi \circ U_2$, $S = \pi^d \circ U_1 = \pi^d \circ U_2$. Окончательно получаем $T + S = U_1 = U_2$, что и требовалось доказать. $\rhd$

Вопрос о вычислении множества крайних точек составного сублинейного оператора по множествам крайних точек субдифференциалов, составляющих оператор, был поставлен в статье [6]. Как один из ответов на этот вопрос, установим следующий результат.

Теорема 7. *Пусть $P : X \to E$ — сублинейный оператор, α — положительный ортоморфизм на E. Тогда $\mathrm{Ch}(\alpha \circ P) = \alpha \circ \mathrm{Ch}(P)$.*

$\lhd$ Докажем сначала включение $\mathrm{Ch}(\alpha \circ P) \subset \alpha \circ \mathrm{Ch}(P)$. Возьмем $T \in \mathrm{Ch}(\alpha \circ P)$. Введем следующие обозначения: $\beta := \alpha^{-1} : \mathrm{im}(\alpha) \to (\ker(\alpha))^d$, π — проектор на компоненту $(\ker(\alpha))^d$. Ясно, что $\pi = \beta \circ \alpha$. Покажем, что $\beta \circ T \in \mathrm{Ch}(\pi \circ P)$.

Пусть $\beta \circ T = \lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2$, где $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^+$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ и $T_1, T_2 \in \partial(\pi \circ P)$. Поскольку $\partial(\pi \circ P) = \pi \circ \partial P$ (см. [1, 1.4.14]), то $T_i = \pi \circ S_i$ $(i = 1, 2)$ для некоторых $S_1, S_2 \in \partial P$. Так как $T \leqslant \alpha \circ P$ и $\pi \circ \alpha \circ S_i = \alpha \circ S_i$ $(i = 1, 2)$, то $T = \alpha \circ \beta \circ T = \lambda_1 \alpha \circ S_1 + \lambda_2 \alpha \circ S_2$. Отсюда заключаем, что $T = \alpha \circ S_1 = \alpha \circ S_2$, а значит, $\beta \circ T = T_1 = T_2$.

Теперь возьмем произвольный $S_0 \in \mathrm{Ch}(\pi^d \circ P)$. Положим $S := S_0 + \beta \circ T$. Тогда $S \in \mathrm{Ch}(P)$ в силу леммы 6, и кроме того, $\alpha \circ S = T$.

Обратно, пусть $T = \alpha \circ S$ для некоторого $S \in \mathrm{Ch}(P)$. Покажем, что $T \in \mathrm{Ch}(\alpha \circ P)$. Пусть $T = \alpha \circ S = \lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2$, где $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^+$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ и $U_1, U_2 \in \partial(\alpha \circ P)$. Из предложения 1 вытекает, что существуют операторы $S_1, S_2 \in \partial P$ такие, что $U_i = \alpha \circ S_i$ $(i = 1, 2)$. Тогда справедливо представление $S = \lambda_1(\alpha \circ S_1 + \alpha^d \circ S) + \lambda_2(\alpha \circ S_2 + \alpha^d \circ S)$.

Заметим, что операторы $\alpha \circ S_1 + \alpha^d \circ S$ и $\alpha \circ S_2 + \alpha^d \circ S$ входят в ∂P. Согласно условию, $S = \alpha \circ S_1 + \alpha^d \circ S = \alpha \circ S_2 + \alpha^d \circ S$. Отсюда сразу следует $T = \alpha \circ S = U_1 = U_2$. $\triangleright$

Следующая теорема проясняет связь между решеточным субдифференциалом и возникающими крайними точками.

Теорема 8. *Пусть $P : X \to E$ — сублинейный оператор, сохраняющий конечные верхние грани. Для оператора $T \in \partial P$ следующие условия эквивалентны:*

(1) *T — решеточный гомоморфизм, т. е. $T \in \partial_H P$;*

(2) *существует ортоморфизм $\alpha \in [0, I_E]$ такой, что $T \in \mathrm{Ch}(\alpha \circ P)$;*

(3) *найдутся $\alpha \in [0, I_E]$ и $S \in \mathrm{Ch}(P)$, для которых $T = \alpha \circ S$.*

$\triangleleft$ (1) $\Rightarrow$ (2): Рассмотрим следующее отображение из $\partial_H P$ в $[0, I_E]$:

$$h(T) = \inf\{\alpha \in [0, I_E] : T \in \partial(\alpha \circ P)\} \ (T \in \partial_H P).$$

Ясно, что $h(T) \in [0, I_E]$ и $T \in \partial(h(T) \circ P)$. Кроме того, используя [1, теоремы 2.5.7 (3), 2.5.8 (1)], несложно проверить, что выполняются следующие соотношения:

1) $h(\alpha \circ T) = \alpha \circ h(T)$ для каждого $\alpha \in [0, I_E]$;

2) $h(T_1 + T_2) = h(T_1) + h(T_2)$ для $T_1, T_2 \in \partial_H P$, $T_1 + T_2 \in \partial P$.

Предполагая $T \in \partial_H P$ докажем, что T является крайней точкой $\partial(h(T) \circ P)$. Пусть $T = \lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2$, где $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^+$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, и $T_1, T_2 \in \partial(h(T) \circ P)$. В силу 1) и 2) выполнено равенство $h(T) = \lambda_1 h(T_1) + \lambda_2 h(T_2)$. Используя неравенства $h(T_1) \leqslant h(T)$ и $h(T_2) \leqslant h(T)$, получим соотношения $h(T) = h(T_1) = h(T_2)$.

Так как $0 \leqslant \lambda_1 T_1 \leqslant T$ и $T \in \mathrm{Hom}(X, E)$, то по [1, теорема 2.1.8] найдется ортоморфизм $\beta \in [0, I_E]$ такой, что $\lambda_1 T_1 = \beta \circ T$. Тогда $\beta \circ h(T) = \lambda_1 h(T)$. Теперь, используя коммутативность ортоморфизмов, выводим равенства $\lambda_1 h(T) \circ T_1 = h(T) \circ \beta \circ T = \lambda_1 h(T) \circ T$, т. е. $(T \circ T_1)(X) \subset \ker(h(T))$. На основании [9, 146.1] образ $\mathrm{im}(h(T))$ ортоморфизма $h(T)$ является порядковым идеалом в E и, поскольку $T_1, T_2 \in \partial(h(T) \circ P)$, то для произвольного $x \in X$ выполняются соотношения $T(x) \in \mathrm{im}(h(T))$ и $T_1(x) \in \mathrm{im}(h(T))$, а значит, $(T - T_1)(x) \in \mathrm{im}(h(T))$. Но так как выполнено включение $\mathrm{im}(h(T)) \subset (\ker(h(T)))^d$, то заключаем, что $(T - T_1)(x) = 0$.

(2) $\Rightarrow$ (3): Немедленно следует из теоремы 7.

(3) $\Rightarrow$ (1): Из [10, теорема 12] при $n = 1$ (см. также [1, 2.5.8 (1)]) вытекает, что $\mathrm{Ch}(P) \subseteq \mathrm{Hom}(X, E)$. А так так положительные ортоморфизмы являются решеточными гомоморфизмами, то оператор $T = \alpha \circ S$ также является решеточным гомоморфизмом. $\triangleright$

Отметим, что в [5] вышеупомянутый результат был получен при дополнительном требовании $P \geqslant 0$.

Для минорируемого сублинейного оператора P имеется взаимосвязь между формулой Хана — Банаха — Канторовича для решеточного субдифференциала $\partial_H P$ и формулой замены переменной в точной миноранте $M(P)$.

Теорема 9. *Пусть X, Y — векторные решетки, E — K-пространство, $P : X \to E$ — минорируемый сублинейный оператор, T — решеточный гомоморфизм из Y в X. Рассмотрим следующие утверждения:*

(1) $\partial_H(P \circ T) = (\partial_H P) \circ T$,

(2) $M(P \circ T) = M(P) \circ T$.

Тогда справедлива импликация (1)$\Rightarrow$(2). Если, кроме того, либо $P \geqslant 0$, либо $\mathrm{im}(T) = X$, то утверждения (1) и (2) равносильны.

$\lhd$ (1) $\Rightarrow$ (2): Покажем сначала справедливость формулы Хана — Банаха — Канторовича для точной миноранты $M(P)$ и решеточного гомоморфизма T. Возьмем $S \in \partial_H(M(P) \circ T)$. Из свойств точных минорант (см. [7]), выводим, что $S \in \partial_H(P \circ T)$. По условию $S \in (\partial_H P) \circ T$, а так как $\partial_H P = \partial_H M(P)$, то $S \in \partial_H(M(P)) \circ T$. Обратное включение $\partial_H(M(P)) \circ T \subseteq \partial_H(M(P) \circ T)$ очевидно. Итак, выполнено равенство $\partial_H(M(P) \circ T) = \partial_H(M(P)) \circ T$.

Так как точные миноранты сохраняют конечные верхние грани, то согласно предложению 4, равенство $M(P \circ T) = M(P) \circ T$ имеет место тогда и только тогда, когда выполнено соотношение $\partial_H(M(P \circ T)) = \partial_H(M(P) \circ T)$. Начнем с проверки вложения $\partial_H(M(P \circ T)) \subseteq \partial_H(M(P) \circ T)$. Пусть $S \in \partial_H(M(P \circ T))$, что эквивалентно тому, что $S \in \partial_H(P \circ T)$. По условию имеем $S \in (\partial_H P) \circ T$. Но $\partial_H P = \partial_H M(P)$, поэтому $S \in (\partial_H M(P)) \circ T$. Согласно доказанному выше соотношению, выполнено $S \in \partial_H(M(P) \circ T)$. Обратное включение $\partial_H(M(P) \circ T) \subseteq \partial_H(M(P \circ T))$ очевидно. Итак, равенство $M(P \circ T) = M(P) \circ T$ установлено.

(1) $\Rightarrow$ (2): Пусть $M(P \circ T) = M(P) \circ T$ и выполнено одно из условий $P \geqslant 0$ или $\operatorname{im}(T) = X$. Для того, чтобы установить формулу Хана — Банаха — Канторовича для решеточного субдифференциала $\partial_H(P \circ T) = (\partial_H P) \circ T$, требуется только проверить соотношение $\partial_H(P \circ T) \subseteq (\partial_H P) \circ T$, ибо обратное включение очевидно. Пусть $S \in \partial_H(P \circ T)$, а значит, выполнено $S \in \partial_H(M(P \circ T))$. Поскольку оператор $M(P \circ T)$ сохраняет конечные верхние грани, то пользуясь теоремой 8, найдем ортоморфизм $\alpha \in [0, I_E]$ и оператор $V \in \operatorname{Ch}(M(P \circ T))$, для которых справедливо равенство $S = \alpha V$. Но поскольку имеется соотношение $M(P \circ T) = M(P) \circ T$, то воспользовавшись теоремой 7, получим $V \in \operatorname{Ch}(M(P)) \circ T$, т. е. найдется $U \in \operatorname{Ch}(M(P))$ такой, что $V = U \circ T$. Отсюда следует равенство $S = \alpha \circ U \circ T$. Заметим, что в силу теоремы 8 оператор $W = \alpha \circ U$ является решеточным гомоморфизмом. Покажем, что $W \in \partial P$. Пусть сначала для всех $x \in X$ имеет место неравенство $P(x) \geqslant 0$. Поскольку имеем соотношения $\alpha \in [0, I_E]$ и $U \in \partial P$, то для каждого $x \in X$ справедливо $W(x) = \alpha \circ U(x) \leqslant \alpha \circ P(x) \leqslant P(x)$, т. е. $W \in \partial P$.

Теперь предположим, что выполнено условие $\operatorname{im}(T) = X$. Поскольку $S \in \partial(P \circ T)$, то для каждого $y \in Y$ справедливо неравенство $S(y) = W \circ T(y) \leqslant P \circ T(y)$. В силу нашего предположения $W(x) \leqslant P(x)$ для всех $x \in X$. Итак, $S = W \circ T \in (\partial_H P) \circ T$. Теорема полностью доказана. $\rhd$

Отсюда легко вывести следующее утверждение — формулу Хана — Банаха — Канторовича для решеточного субдифференциала.

Теорема 10. *Пусть X, Y — векторные решетки, E — K-пространство, $P : X \to E$ — сублинейный оператор, сохраняющий конечные верхние границы, T — решеточный гомоморфизм из векторной решетки Y в X. Допустим, что кроме того, либо $P \geqslant 0$, либо $\operatorname{im}(T) = X$. Тогда для P и T справедлива формула Хана — Банаха — Канторовича:*

$$\partial_H(P \circ T) = (\partial_H P) \circ T.$$

$\lhd$ Из свойств точных минорант (см. [7]) вытекают соотношения $M(P) = P$, $M(P \circ T) = P \circ T$. Требуемое теперь обеспечено применением теоремы 9. $\rhd$

Стоит подчеркнуть, что когда T — вложение векторной подрешетки Y в X, установленная формула Хана — Банаха — Канторовича для решеточного субдифференциала в точности выражает следующее известное свойство мажорированного продолжения решеточного гомоморфизма.

Теорема [1, 5]. *Пусть X — векторная решетка, Y — векторная подрешетка в X, E — K-пространство, $P : X \to E$ — сублинейный оператор с положительными значениями, сохраняющий конечные верхние грани. Если $S_0 : Y \to E$ — решеточный гомоморфизм, мажорируемый P, т. е. выполнено $S_0 \leqslant P|_Y$ поточечно, то S_0 продолжается до решеточного гомоморфизма $S : X \to E$ такого, что $S \leqslant P$ поточечно.*

Литература

1. *Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.* Субдифференциалы. Теория и приложения.—Новосибирск: Наука, 1992.—270 с.
2. *Bernau S. J.* Sums and Extensions of Vector Lattice Homomorphisms // Acta Appl. Math.—1992.—No. 27.—P. 33–45.
3. *Кутателадзе С. С.* Признаки субдифференциалов, изображающих шапки и грани // Сиб. мат. журн.—1986.—Т. 27, № 3.—С. 134–141.
4. *Crenshaw J. A.* Extreme positive linear operators // Math. Scand.—1969.—V. 25, No. 2—P. 195–217.
5. *Buskes G. J. H. M., van Rooij A. C. M.* Hahn-Banach for Riesz homomorphisms, Indag. Math.—1989.—V. 51.—P. 25–34.
6. *Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.* Теорема Крейна-Мильмана и пространства Канторовича // Оптимизация / Ин-т математики СО АН СССР.—Новосибирск, 1992.—вып. 51 (68).—С. 5–18.
7. *Раднаев В. А.* О решеточно-безатомных субдифференциалах // Сиб. мат. журн.—1994.—Т. 35, № 4.—С. 853–859.
8. *Вулих Б. З.* Введение в теорию полуупорядоченных пространств.—М.: Физматгиз, 1961.—407 с.
9. *Zaanen A. C.* Riesz Spaces. V. 2.—Amsterdam etc.: North Holland, 1983.—720 p.
10. *Раднаев В. А.* О верхних огибающих семейства семейства n-дизъюнктных операторов // Владикавказский мат. журн.—2001.—Т. 3, вып. 3.—С. 8–16.

Улан-Удэ *Статья поступила 23 марта 2002 г.*