

УДК 517.956

СМЕШАННАЯ СИСТЕМА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
КАК МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КОЛЕБАНИЙ
КОНТИНУАЛЬНО-ДИСКРЕТНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Х. П. Культербаев, А. Я. Джанкулаев

Для комбинированной континуально-дискретной системы сравнительно простыми методами найдены спектры коэффициентов затухания, собственных частот и форм свободных колебаний при наличии сил сопротивления.

Упругие элементы с распределенными параметрами в виде струны широко применяются в технике, классические задачи о них рассмотрены, например, в [1, 2]. В последнее время практические потребности вызывают повышенный интерес к нетрадиционным задачам, в частности к задачам о совместных колебаниях струны и совокупности сосредоточенных масс. Во многих случаях струна движется в продольном направлении, опирается не только по концам, но и в промежуточных точках. При этом к ней присоединяются массы, сосредоточенные во множестве точек, и возникает необходимость в рассмотрении задачи о совместных колебаниях непрерывных участков конструкции с распределенной массой и дискретной системы масс с конечным числом степеней свободы. Некоторые такие задачи и родственные проблемы рассматривались в работах [3–6].

1. Постановка задачи. Рассматриваются свободные поперечные колебания однородной струны (рис. 1), движущейся в продольном направлении со скоростью v , с площадью поперечного сечения F , из материала плотности ρ , с напряжением σ в поперечных сечениях, при коэффициенте вязкого трения ε . Зачастую такая струна для ограничения провисаний и других целей поддерживается упругими опорами (роlikоопоры транспортеров, натяжные устройства для ветвей гибких передач в машинах и т. д.) с коэффициентами жесткости c_j ($j = 1, 2, \dots, N$; $N = n + 1$). Тогда в расчетную схему включаются сосредоточенные массы m_j ($j = 1, 2, \dots, N$), неподвижные в продольном направлении, но колеблющиеся в поперечном направлении с соответствующими коэффициентами демпфирования ν_j ($j = 1, 2, \dots, N$). Струна же состоит из пролетов (участков) с размерами l_j ($j = 1, 2, \dots, n$).

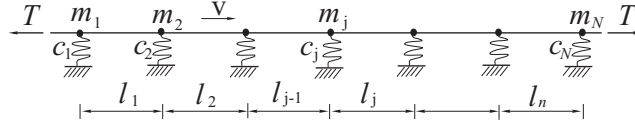


Рис. 1

Механическая модель такого устройства представляет собой смешанную континуально-дискретную систему, состоящую из участков струны с распределенными параметрами и совокупности сосредоточенных масс. Отсюда следует математическая модель ее свободных поперечных колебаний в виде двух систем однородных дифференциальных уравнений. Первая из них соответствует множеству континуальных участков. В предположении о малости отклонений в поперечном направлении колебаниям каждого пролета струны соответствует однородное дифференциальное уравнение в частных производных гиперболического типа [6]. Тогда в векторной форме можно записать

$$\mathbf{u}_{tt} + 2\varepsilon\mathbf{u}_t + 2v\mathbf{u}_{xt} - (a^2 - v^2)\mathbf{u}_{xx} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in (0, 1), \quad t > -\infty. \quad (1.1)$$

Вторая система представляет собой однородные обыкновенные дифференциальные уравнения для совокупности дискретных масс, составленные с использованием принципа Даламбера и гипотезы о малости перемещений

$$\mathbf{m}\mathbf{y}_{tt} + 2\nu\mathbf{y}_t + \mathbf{c}\mathbf{y} + \mathbf{b} = \mathbf{0}, \quad t > -\infty. \quad (1.2)$$

Здесь и далее применяется локальная система эйлеровых пространственных координат $x_j \in [0, l_j]$, $j = 1, 2, \dots, n$ с началом на левом конце каждого участка; t — время; $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ — вектор-функция векторного аргумента, соответствующая смещениям струны в поперечном направлении; $\mathbf{y}(t)$ — вектор-функция скалярного аргумента, описывающая отклонения сосредоточенных масс; $a^2 = \sigma/\rho$; $\mathbf{0}$ — нуль-вектор. Введены обозначения для векторов и квадратных матриц, размерности которых очевидны

$$\mathbf{l} = (l_1, l_2, \dots, l_n), \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n),$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (u^1(x_1, t), u^2(x_2, t), \dots, u^n(x_n, t)),$$

$$\mathbf{y}(t) = (y^1(t), y^2(t), \dots, y^N(t)), \quad \mathbf{b}(t) = (b_1(t), b_2(t), \dots, b_N(t)),$$

$$\mathbf{c} = \text{diag}\{c_1, c_2, \dots, c_N\}, \quad \mathbf{m} = \text{diag}\{m_1, m_2, \dots, m_N\}, \quad \nu = \text{diag}\{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_N\},$$

$\mathbf{m}, \nu, \mathbf{c}$ — диагональные матрицы инерции, диссипации и жесткости. Наличие в нижних индексах аргументов \mathbf{x} и t означает дифференцирование по ним, в частности,

$$\mathbf{u}_{xx}(x, t) = (u_{x_1x_1}^1(x_1, t), u_{x_2x_2}^2(x_2, t), \dots, u_{x_nx_n}^n(x_n, t)).$$

Далее, $\mathbf{b}(t)$ — вектор упругих сил, компоненты которого образованы проекциями на вертикальную ось силы натяжения $T = \sigma F$, действующей на сосредоточенную массу слева и справа

$$\begin{aligned} b_1(t) &= -Tu_{x_1}^1(0, t), \\ b_j(t) &= T[u_{x_{j-1}}^{j-1}(l_{j-1}, t) - u_{x_j}^j(0, t)], \quad j = 1, 2, \dots, n, \\ b_N(t) &= Tu_{x_n}^n(l_n, t). \end{aligned}$$

Поставим дальнейшей целью определение спектров собственных частот, коэффициентов демпфирования и собственных форм. В таком случае начальные условия к системе уравнений (1.1), (1.2) не требуются. Краевые условия к уравнениям (1.1) соответствуют равенству перемещений на границах участков струны отклонениям сосредоточенных масс

$$u^j(0, t) = y^j(t), \quad u^j(l_j, t) = y^{j+1}(t), \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (1.3)$$

Отметим, что возможный отрыв струны от сосредоточенных масс во время колебаний в данной постановке задачи не учитывается. Причина в том, что против такого явления обычно принимаются конструктивные меры.

2. Спектры собственных частот и коэффициентов демпфирования. Задача (1.1)–(1.3) имеет общие решения

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{X}(\mathbf{x})e^{\lambda t} = e^{kx+\lambda t}, \quad \mathbf{x} \in (0, 1), \quad t > -\infty, \quad (2.1)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{Y}e^{\lambda t}, \quad t > -\infty, \quad (2.2)$$

где $\mathbf{X}(\mathbf{x}) = e^{kx} = \{X^2(x_1), X^2(x_2), \dots, X^n(x_n)\}$ — комплексная вектор-функция вещественного векторного аргумента, значения которой суть собственные формы колебаний участков с распределенной массой; $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_N)$ — комплекснозначный вектор амплитуд колебаний сосредоточенных масс; k — волновое число; $\lambda = -\mu + i\omega$ — характеристический показатель, μ, ω — коэффициент затухания и частота свободных колебаний. Предполагается обычная ситуация, состоящая в том, что свободные движения струны носят затухающий колебательный характер.

Подстановка (2.1) в (1.1) дает квадратное уравнение относительно k и его корни

$$\begin{aligned} wk^2 - 2v\lambda k - \gamma &= 0, \quad \gamma = \lambda^2 + 2\varepsilon\lambda, \\ w &= (a^2 - v^2), \quad k_{1,2} = \left[v\lambda \pm \sqrt{v^2\lambda^2 + \gamma w} \right] / w. \end{aligned}$$

Теперь (2.1) приобретает вид

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (\mathbf{A}e^{k_1x} + \mathbf{B}e^{k_2x})e^{\lambda t}, \quad (2.3)$$

где $\mathbf{A} = (A_1, A_2, \dots, A_n)$, $\mathbf{B} = (B_1, B_2, \dots, B_n)$ — коэффициенты линейной комбинации частных решений дифференциального уравнения.

Граничные условия (1.3) после подстановки (2.2), (2.3) дают

$$A_j + B_j = Y_j, \quad p_j A_j + q_j B_j = Y_{j+1}, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (2.4)$$

Здесь введены обозначения

$$p_j = e^{k_1 l_j}, \quad q_j = e^{k_2 l_j}.$$

Теперь подставим (2.2), (2.3) в (1.2) и получим систему алгебраических уравнений

$$\eta \mathbf{Y} + \mathbf{Q} = \mathbf{0}, \quad \eta = \mathbf{m}\lambda^2 + 2\nu\lambda + \mathbf{c}, \quad (2.5)$$

где $\eta = \text{diag}\{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_N\}$ — диагональная матрица с комплекснозначными элементами, $\mathbf{Q} = (Q_1, Q_2, \dots, Q_N)$ — вектор упругих сил с компонентами

$$\begin{aligned} Q_1 &= -T(k_1 A_1 + k_2 B_1), \\ Q_j &= T(r_{j-1} A_{j-1} + s_{j-1} B_{j-1} - k_1 A_j - k_2 B_j), \quad j = 2, 3, \dots, n, \\ Q_N &= T(r_n A_n + s_n B_n), \end{aligned} \quad (2.6)$$

причем

$$r_j = k_1 e^{k_1 l_j}, \quad s_j = k_2 e^{k_2 l_j}.$$

В развернутой форме (2.5) с учетом (2.6) принимает вид

$$\begin{aligned} \eta_1 Y_1 - T(k_1 A_1 + k_2 B_1) &= 0, \\ \eta_j Y_j + T(r_{j-1} A_{j-1} + s_{j-1} B_{j-1} - k_1 A_j - k_2 B_j) &= 0 \quad (j = 2, 3, \dots, n), \\ \eta_N Y_N + T(r_n A_n + s_n B_n) &= 0, \end{aligned} \quad (2.7)$$

(2.4) и (2.7) образуют однородную систему алгебраических линейных уравнений относительно неизвестных A_j, B_j ($j = 1, 2, \dots, n$) и Y_j ($j = 1, 2, \dots, N$).

Исключим Y_j , введем обозначения

$$\begin{aligned} e_j &= \eta_j / T - k_1, \quad h_j = \eta_j / T - k_2, \\ \rho_j &= \eta_{j+1} p_j / T + r_j, \quad \sigma_j = \eta_{j+1} q_j / T + s_j \quad (j = 1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

и запишем результат в матричной форме

$$\mathbf{G}(\lambda) \mathbf{d} = \mathbf{0}, \quad (2.8)$$

где $\mathbf{G}(\lambda)$ — квадратная матрица порядка $2n$, $\mathbf{d} = (A_1, B_1, \dots, A_n, B_n)$ — вектор, компонентами которого являются искомые коэффициенты.

Приравнивание к нулю действительной и мнимой частей определителя дает систему уравнений (2.10), корни которой могут быть найдены лишь численными методами. Но и в этом случае решение задачи из-за ее нелинейности связано с известными сложностями по множеству причин: 1) обычно применяемые итерационные методы решения ограничены условиями сходимости, выполнение которых в данной задаче трудно проверять и обеспечивать; 2) корни системы являются многозначными, т. е. существует счетное бесконечное множество пар (μ_k, ω_k) , удовлетворяющих системе уравнений, и это влечет опасность потери некоторых из корней в процессе вычислений; 3) трудно выполнить необходимый этап предварительного отделения корней, т. е. заключения корней для начала счета в достаточно малые области, внутри которых не было бы других корней. Как оказалось при выполнении примеров, эти сложности могут быть преодолены с помощью пробных вычислительных экспериментов на ЭВМ и применения численных схем с малым шагом.

Непосредственное решение системы уравнений проведем с помощью метода покоординатного спуска [7]. С этой целью образуем вспомогательную неотрицательную функцию

$$\Phi(\mu, \omega) = |\det \mathbf{G}(\mu, \omega)| = [f_1^2(\mu, \omega) + f_2^2(\mu, \omega)]^{1/2},$$

обращающуюся в нуль лишь в том случае, если

$$f_1(\mu, \omega) = f_2(\mu, \omega) = 0.$$

Таким образом, решение исходной системы (2.10) будет одновременно точкой нулевого минимума скалярной функции векторного аргумента $\Phi(\mathbf{z})$, так что теперь необходимо решать более простую (по крайней мере в данном случае) задачу

$$\Phi(\mathbf{z}) = 0, \quad \mathbf{z} = (\mu, \omega) \in \mathbb{R}^2 \cap \{\mu > 0, \omega > 0\}.$$

Здесь вектор \mathbf{z} соответствует искомым величинам, $\Phi(\mathbf{z})$ представляет мульти-модальную функцию, имеющую множество локальных минимумов.

Суть применяемого метода состоит в построении последовательности точек (приближений к решению) \mathbf{z}_k , $k = 0, 1, \dots$, сходящейся к точке локального минимума \mathbf{z}^* . При этом в процессе вычислений необходимо добиваться, чтобы значения вспомогательной функции были монотонно убывающими и ограниченными снизу

$$\Phi(\mathbf{z}_0) \geq \Phi(\mathbf{z}_1) \geq \dots \geq \Phi(\mathbf{z}_k) \geq \dots \geq \Phi(\mathbf{z}^*). \quad (2.11)$$

Для реализации такой цели вначале с помощью численных экспериментов намечается начальная точка последовательности \mathbf{z}_0 . Затем определяются последующие приближения \mathbf{z}_k с помощью соотношений

$$\mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{z}_k + \mathbf{h}_k,$$

где \mathbf{h}_k — вектор приращений координат, обеспечивающий выполнение условий (2.11).

Условием прекращения вычислительной процедуры, а значит и признаком достижения корня с необходимой точностью, служит выполнение неравенства

$$\Phi(\mathbf{z}_{k+1}) < \delta,$$

причем δ — априорно задаваемое малое положительное число (точность вычислений).

3. Спектр собственных форм. Далее задача состоит в определении собственных форм каждого участка струны, имеющих в силу (2.3) вид

$$X^j(x_j) = A_j e^{k_1 x_j} + B_j e^{k_2 x_j}. \quad (3.1)$$

Следовательно, необходимо ставить вопрос о вычислении постоянных A_j и B_j , т. е. об отыскании вектора \mathbf{d} . Поскольку определитель матрицы \mathbf{G} равен нулю, найти однозначно компоненты вектора \mathbf{d} как решение системы уравнений (2.8), невозможно. В силу этого, необходимо задаваться одним из компонентов вектора, а затем находить остальные значения из уравнений (2.8).

Составим алгоритм счета, последовательно определяющий A_j, B_j . Он состоит в следующем. Пусть k_1 и k_2 найдены из предыдущего этапа решения задачи. Положим, что $A_1 = 1$, и найдем из первого уравнения (2.8), т. е. с помощью первой строки матрицы \mathbf{G} , значение B_1 . Нетрудно заметить по виду матрицы \mathbf{G} , что систему уравнений можно разбить на автономные пары уравнений, содержащие лишь четыре неизвесных $A_j, B_j, A_{j+1}, B_{j+1}$. Полагая A_j, B_j уже найденными, можно получить из них рекуррентную пару формул

$$\begin{aligned} A_{j+1} &= (h_{j+1}E_j + k_2F_j)/(k_1h_{j+1} - k_2e_{j+1}), \\ B_{j+1} &= (e_{j+1}E_j + k_1F_j)/(k_2e_{j+1} - k_1h_{j+1}), \quad j = 1, 2, \dots, n-1, \end{aligned}$$

где

$$E_j = \rho_j A_j + \sigma_j B_j, \quad F_j = r_j A_j + s_j B_j.$$

Используя для начала счета значения A_1 и B_1 , по ним можно последовательно найти остальные компоненты вектора \mathbf{d} . Последнее уравнение (2.9) при этом целесообразно использовать для контроля правильности вычислений.

Проводя указанные вычисления, следует помнить, что $X^j(x_j)$, найденные по (3.1), являются комплексными функциями. Действительные же собственные формы имеют вид

$$\varphi_r^j(x_j) = \text{real}(X_r^j(x_j)), \quad r = 1, 2, \dots, j = 1, 2, \dots, n,$$

r — номер собственной формы, j — номер пролета.

4. Примеры. Хорошо известная однопролетная струна с неподвижными концами есть частный случай данной схемы, когда $n = 1$, сосредоточенные массы и промежуточные опоры отсутствуют. Тогда матрица G имеет вид

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ p_1 & q_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{k_1 l_1} & e^{k_2 l_1} \end{pmatrix}.$$

Частотное уравнение, которое соответствует ей, при отсутствии трения совпадает с [6] и после несложных преобразований дает коэффициент затухания и спектр собственных частот

$$\mu = (1 - \nu^2)\varepsilon, \quad \xi = v/a, \quad \omega = \omega_{\varepsilon\nu j} = (1 - \xi^2)\sqrt{j^2\pi^2 a^2/1^2 - \varepsilon^2}, \quad j = 1, 2, \dots$$

В силу (3.1) форма колебаний определяется формулой

$$X^1(x_1) = A_1 e^{k_1 x_1} + B_1 e^{k_2 x_1}.$$

При учете A_1 и B_1 , намеченных выше, с точностью до постоянного множителя имеем

$$X^1(x_1) = e^{k_1 x_1} - e^{k_2 x_1}.$$

По предлагаемым здесь формулам и алгоритмам проведены многочисленные компьютерные вычисления. Рассмотрены свободные колебания систем с различными входными параметрами, в том числе и классические случаи для тестирования вышеизложенного. Выполненные примеры подтвердили адекватность предложенной математической модели, ее практическую применимость к расчетам систем со сравнительно сложной структурой и эффективность предлагаемых сравнительно простых алгоритмов вычислений.

Литература

1. Бидерман В. Л. Прикладная теория механических колебаний.—М.: Высшая школа, 1979.—416 с.
2. Вибрации в технике. Справочник в 6 томах. Т. 1. Колебания линейных систем / Под ред. Болотина В. В.—М.: Машиностроение, 1978.—352 с.
3. Бабаков И. М. Теория колебаний.—М.: Наука, 1968.—560 с.
4. Пустыльников Л. Д. О спектре дискретного неоднородного волнового уравнения и колебаниях дискретной струны // Мат. сборник.—1992.—Т. 183, № 3.—С. 38–54.
5. Пановко Я. Г. Основы прикладной теории колебаний и удара.—Л.: Машиностроение, 1976.—320 с.
6. Светлицкий В. А. Механика гибких стержней и нитей.—М.: Машиностроение, 1978.—222 с.
7. Березин И. С. Б., Жидков Н. П. Методы вычислений. Т. 1—М.: Наука, 1966.—632 с.