Владикавказский математический журнал
Июнь–сентябрь, 2001, Том 3, Выпуск 3

УДК **512.552.32+514.146.7**

О ДЕЗАРГОВОЙ ГЕОМЕТРИЗАЦИИ ХАРАКТЕРИСТИКИ ТЕЛА

И. А. Хубежты

В настоящей работе содержатся: 1) дезаргова геометризация характеристики $p \geqslant 5$ поля, в виде конфигурационной теоремы K_p, содержащей пару перспективных p-вершинников с центром S и осью l, где $S \not\ni\in l$; 2) дезарговы геометризации характеристик 2 и 3 тел, в виде конфигурационных теорем $D_8^*(\overline{1}\,\overline{2}\,\overline{3};\overline{1'}\,\overline{2'}\,\overline{3'})$ и $L_7(\overline{1}\,\overline{2}\,\overline{3};\overline{1'}\,\overline{2'}\,\overline{3'})$ соответственно; 3) доказательства теорем: «$L_{10} \Rightarrow K_p$», «$7_3 \Rightarrow D_8^*$», «$L_7 \Leftrightarrow 8_3$» и «$K_p \Leftrightarrow p = 0$».

В настоящей работе содержатся: 1) дезаргова геометризация характеристики $p \geqslant 5$ поля, в виде конфигурационной теоремы K_p, содержащей пару перспективных p-вершинников с центром S и осью l, где $S \not\ni\in l$; 2) дезарговы геометризации характеристик 2 и 3 тел, в виде конфигурационных теорем $D_8^*(\overline{1}\,\overline{2}\,\overline{3};\overline{1'}\,\overline{2'}\,\overline{3'})$ и $L_7(\overline{1}\,\overline{2}\,\overline{3};\overline{1'}\,\overline{2'}\,\overline{3'})$, соответственно; 3) доказательства теорем: «$L_{10} \Rightarrow K_p$», «$7_3 \Rightarrow D_8^*$», «$L_7 \Leftrightarrow 8_3$» и «$K_p \Leftrightarrow p = 0$».

Эти результаты отличаются своей дезарговостью от результатов Фано [1], Рашевского [2], Цаппа [3] и Картеси [4] о геометризациях равенств $1 + \cdots + 1 = n = 0$, где n натуральное число.

Сначала найдем дезаргову геометризацию характеристики $p > 3$ поля в виде конфигурационной теоремы K_p, содержащей перспективные p-вершинники и представляющей некоторый обобщенный аналог малой теоремы Дезарга (L_{10}).

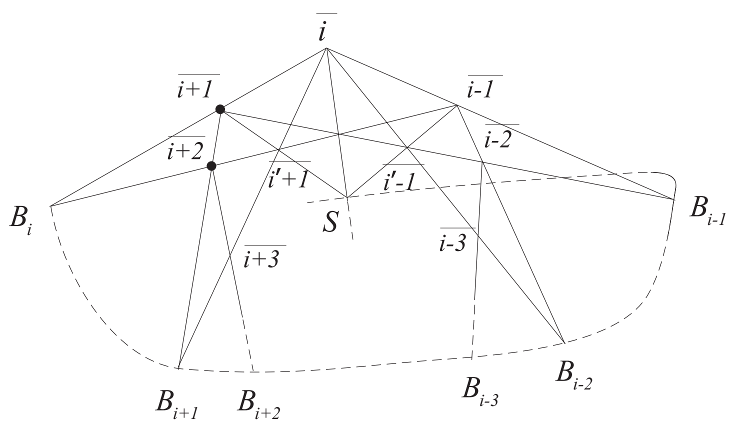

Рис. 1.

Конфигурационная теорема 1 (рис. 1). *Пусть для точек $\overline{1}, \overline{2}, \dots, \overline{p}$ общего положения, где p — простое натуральное число, выполняются следующие инциденции:*

$$\overline{i'} = \left[\overline{i \Leftrightarrow 1}, \overline{i+2}\right] \cap \left[\overline{i \Leftrightarrow 2}, \overline{i+1}\right], \quad i = 3, \dots, p, p+1, p+2,$$

$$B_i = \left[\overline{i}, \overline{i+1}\right] \cap \left[\overline{i'}, \overline{i'+1}\right], \quad i = 1, \dots, p, \ \ \{\overline{p+i} \equiv \overline{i}\}, [\overline{i}, \overline{i'}] \neq \left[\overline{K}, \overline{K'}\right] \ \text{при } i \neq K,$$

$$\overline{i'} \neq S = [\overline{1}, \overline{1'}] \cap [\overline{2}, \overline{2'}] \cap \dots \cap [\overline{P}, \overline{P'}], \quad (S, B_1, \dots, B_{i-1}, B_{i+1}, \dots, B_p).$$

Тогда выполняется и замыкающая инциденция

$$(S, B_1, \dots, B_{i-1}, B_i, B_{i+1}, \dots, B_p).$$

Теорема K_p состоит из $3p+1$ точек и $3p+1$ прямых и имеет ранг 4.

Теорема 2. *Некоторым ограниченным квазитождеством конфигурационной теоремы K_p является равенство $p = 0$ $(p > 3)$.*

$\lhd$ Пусть образующие точки в папповой плоскости имеют следующие координаты:

$$\overline{P \Leftrightarrow i} = (2p \Leftrightarrow 2i, 1 + \dots + (i+1)) = (2p \Leftrightarrow 2i, 2^{-1}(i+2)(i+1)), \quad i = 0, \dots, p \Leftrightarrow 1,$$

$$\{\overline{P} = (2p, 1), \overline{P \Leftrightarrow 1} = (2p \Leftrightarrow 2, 1+2), \overline{P \Leftrightarrow 2} = (2p \Leftrightarrow 4, 1+2+3), \dots$$
$$\overline{2} = (4, p(p \Leftrightarrow 1) \cdot 2^{-1}), \overline{1} = (2, p(p+1) \cdot 2^{-1}), \overline{3} = (6, (p \Leftrightarrow 1)(p \Leftrightarrow 2) \cdot 2^{-1})\}.$$

Тогда, пользуясь аксиомами поля, получаем:

$$B_{p-2} = [\overline{P \Leftrightarrow 2}, \overline{P \Leftrightarrow 1}] \cap [\overline{P}, \overline{P \Leftrightarrow 3}] = [y = xm + n] \cap [y = xm' + n'] = l \cap l',$$

$$\left.\begin{array}{r} \overline{P \Leftrightarrow 2} \ni\in l \Leftrightarrow 6 = (2p \Leftrightarrow 4) \cdot m + n \\ \overline{P \Leftrightarrow 1} \ni\in l' \Leftrightarrow 3 = (2p \Leftrightarrow 2) \cdot m + n \end{array}\right\} \Rightarrow 3 = \Leftrightarrow 2m \Rightarrow m = \Leftrightarrow 3 \cdot 2^{-1},$$

$$n = 3 \Leftrightarrow (2p \Leftrightarrow 2)(\Leftrightarrow 3 \cdot 2^{-1}) = 3 + 3 \cdot 2^{-1}(2p \Leftrightarrow 2) = 3p$$
$$\Rightarrow [\overline{P \Leftrightarrow 2}, \overline{P \Leftrightarrow 1}] = [y = \Leftrightarrow 3 \cdot 2^{-1}x + 3p];$$

$$\left.\begin{array}{r} \overline{P} \ni\in l_2 \Leftrightarrow 1 = 2pm' + n' \\ \overline{P \Leftrightarrow 3} \ni\in l_2 \Leftrightarrow 10 = (2p \Leftrightarrow 6)m' + n' \end{array}\right\} \Rightarrow m' = \Leftrightarrow 3 \cdot 2^{-1},$$

$$n' = 1 \Leftrightarrow 2p \cdot (\Leftrightarrow 3 \cdot 2^{-1}) = 1 + 3p,$$

$$[y = (\Leftrightarrow 3 \cdot 2^{-1})x + (1 + 3p)] = [\overline{P}, \overline{P \Leftrightarrow 3}],$$

$$B_{p-2} = (\Leftrightarrow 3 \cdot 2^{-1}) \in l_\infty,$$

$$B_{p-3} = [\overline{P \Leftrightarrow 3}, \overline{P \Leftrightarrow 2}] \cap [\overline{P \Leftrightarrow 4}, \overline{P \Leftrightarrow 1}] = [y = \Leftrightarrow 2x + 5p \Leftrightarrow 2] \cap [y = \Leftrightarrow 2x + n] = (\Leftrightarrow 2),$$

$$[B_{p-2}, B_{p-3}] = l_\infty.$$

$$B_p = [\overline{P}, \overline{1}] \cap [\overline{2}, \overline{P \Leftrightarrow 1}] = [y = xf + t] \cap [y = xf_1 + t_1],$$

$$f_1 = \frac{p^2 \Leftrightarrow p \Leftrightarrow 6}{4(3 \Leftrightarrow p)}, \quad f = \frac{p^2 + p \Leftrightarrow 2}{4(1 \Leftrightarrow p)},$$

$$f = f_1 \Leftrightarrow 5p = 5p \Leftrightarrow B_p \in l_\infty. \tag{1}$$

$$B_1 = [\overline{1}, \overline{2}] \cap [\overline{P}, \overline{3}] = \left[y = x\left(\Leftrightarrow \frac{p}{2}\right) + \frac{p(p+3)}{2}\right] \cap \left[y = \Leftrightarrow \frac{p}{4}x + 1 + \frac{p^2}{2}\right]$$
$$\in l_\infty \Leftrightarrow \Leftrightarrow \frac{p}{4} = \Leftrightarrow \frac{p}{2} \Leftrightarrow p = 2p \Rightarrow p = 0 \Rightarrow B_1 = (0).$$

Далее, имеем:

$$B_{p-i} = [\overline{P \Leftrightarrow i}, \overline{P \Leftrightarrow (i \Leftrightarrow 1)}] \cap [\overline{P \Leftrightarrow (i \Leftrightarrow 2)}, \overline{P \Leftrightarrow (i+1)}] \in l_\infty,$$

$$\begin{aligned} B_{p-i} &= [y = xm_1 + n_1] \cap [y = xm_2 + n_2] \\ &= [y = \Leftrightarrow x \cdot 2^{-1}(i+1) + 2^{-1}(i+1)(2 + 2p \Leftrightarrow i)] \\ &\cap [y = \Leftrightarrow (i+1) \cdot 2^{-1}x + 2^{-1}(\Leftrightarrow i^2 + i + 2pi + 2p + r)] \\ &= (\Leftrightarrow 2^{-1}(i+1)) \end{aligned} \tag{2}$$

При $i = 0$ из (1) и (2), в силу $(B_1, \ldots, B_p, S)$, имеем:

$$B_p = \left(\Leftrightarrow \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{p^2 \Leftrightarrow p \Leftrightarrow 6}{4(3 \Leftrightarrow p)}\right) \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow 3)p = 0, \quad p \neq 3,\ p = 0,$$

$$B_p = \left(\Leftrightarrow \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{p^2 + p \Leftrightarrow 2}{4(1 \Leftrightarrow p)}\right) \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow 1)p = 0, \quad p \neq 1,\ p = 0;$$

$$\begin{aligned} (\overline{P \Leftrightarrow i})' &= [\overline{P \Leftrightarrow (i \Leftrightarrow 1)}, \overline{P \Leftrightarrow (i+2)}] \cap [\overline{P \Leftrightarrow (i+1)}, \overline{P \Leftrightarrow (i \Leftrightarrow 2)}] \\ &= [y = xn_1 + n_0] \cap [y = xm_1 + m_0] \\ &= [y = \Leftrightarrow (i+2)2^{-1} \cdot x + 2^{-1}(\Leftrightarrow i^2 \Leftrightarrow i + 2pi + 4p + 4)] \\ &\quad \cap [y = \Leftrightarrow (i+1)2^{-1} \cdot x + 2^{-1}(\Leftrightarrow i^2 + i + 2pi + 2p + 4)] \\ &= (2p \Leftrightarrow 2i, y_{(p-i)'}), \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} i = {}&0, \ldots, p \Leftrightarrow 1 \Rightarrow x_{p-i} = x_{(p-i)'} = 2p \Leftrightarrow 2i \Leftrightarrow [\overline{P \Leftrightarrow i}, \overline{(P \Leftrightarrow i)'}] \cap l_\infty \\ = {}&[y = 2p \Leftrightarrow 2i] \cap l_\infty = (\infty) = [\overline{P}, \overline{P'}] \cap [\overline{P \Leftrightarrow 1}, \overline{(P \Leftrightarrow 1)'}] \cap \cdots \cap [\overline{1}, \overline{1'}] = S. \end{aligned}$$

Итак, из выполнения всех инциденций конфигурационной теоремы K_p следует, что $p = 0$ в тернарном кольце папповой плоскости, для любого простого числа p. Доказательство же соотношения «$p = 0 \Rightarrow K_p$» осуществляется обратным ходом выкладок, проведенных выше, опираясь на систему образующих точек K_p:

$$\overline{P} = (0,1),\ \overline{P \Leftrightarrow i} = (\Leftrightarrow 2i, (i+2)(i+1)2^{-1}), \ldots,\ \overline{3} = (6,1),$$
$$\overline{2} = (4,0),\ \overline{1} = (2,0),\ i = 1, \ldots, p \Leftrightarrow 1.\ \triangleright$$

Теорема 3. *Для точек* $\overline{P \Leftrightarrow i} = (x_{\overline{P-i}}, y_{\overline{P-i}})$ *и* $(\overline{P \Leftrightarrow i})' = (x_{\overline{P-i}}, y_{\overline{(P-i)'}})$, *при указанном в доказательстве теоремы 2 наборе координат образующих точек* K_p, *имеет место:*

$$y_{\overline{(P-i)'}} = y_{\overline{P-i}} + 1,\ i = 0, 1, \ldots, p \Leftrightarrow 1.$$

$\triangleleft$ В силу (3) имеем:

$$y_{\overline{P-i}} = 2^{-1}(i+2)(i+1) = 2^{-1}(i^2 + 3i + 2),$$

$$\begin{aligned} y_{\overline{(P-i)'}} &= x_{\overline{(P-i)'}} \cdot n_1 + n_0 = \Leftrightarrow \frac{i+2}{2} \cdot 2(p \Leftrightarrow i) + n_0 \\ &= 2^{-1}[\Leftrightarrow 2(i+2)(p \Leftrightarrow i) \Leftrightarrow i^2 \Leftrightarrow i + 2pi + 4p + 4] \\ &= 2^{-1}(\Leftrightarrow 2ip + 2i^2 \Leftrightarrow 4p + 4i \Leftrightarrow i^2 \Leftrightarrow i + 2pi + 4p + 4) \\ &= 2^{-1}(i^2 + 3i + 4) = y_{p-i} + 1,\ \forall i = 0, \ldots p \Leftrightarrow 1.\ \triangleright \end{aligned}$$

Теорема 4. *Если в папповой плоскости выполняются все инциденции теоремы* K_p, *то точки пересечения соответствующих диагоналей ее* p*-вершинников* $\overline{1} \ldots \overline{P}$ *и* $\overline{1'} \ldots \overline{P'}$ *будут лежать на оси перспективы* p*-вершинников.*

$\triangleleft$ В силу доказательств теорем 2 и 3, имеем:

$$\begin{aligned} \overline{P \Leftrightarrow k} &= (2p \Leftrightarrow 2k, 2^{-1}(k+2)(k+1)), \\ \overline{(P \Leftrightarrow k)'} &= (2p \Leftrightarrow 2k, 2^{-1}(k^2 + 3k + 4), \end{aligned}$$

$$l_i = [\overline{P \Leftrightarrow k}, \overline{P \Leftrightarrow i}] = [y = xm + t],$$

$$\left.\begin{aligned} \overline{P \Leftrightarrow k} \ni\!\in l_i \Leftrightarrow 2^{-1}(k+2)(k+1) = 2(p \Leftrightarrow k) \cdot m + t \\ \overline{P \Leftrightarrow i} \ni\!\in l_i \Leftrightarrow 2^{-1}(i+2)(i+1) = 2(p \Leftrightarrow i) \cdot m + t \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$
$$2^{-1}((k+2)(k+1) \Leftrightarrow (i+2)(i+1)) = 2(p \Leftrightarrow k \Leftrightarrow p + i)m,$$

$$m = \Leftrightarrow 2^{-2}(k+i+3),$$

$$l_i' = [\overline{(P \Leftrightarrow k)'}, \overline{(P \Leftrightarrow i)'} = [y = xn + s],$$

$$\left.\begin{array}{r} \overline{(P \Leftrightarrow k)'} \ni\!\in l_i' \Leftrightarrow 2^{-1}(k^2+3k+4) = 2(p \Leftrightarrow k)\cdot n + r \\ \overline{(P \Leftrightarrow i)'} \ni\!\in l_i' \Leftrightarrow 2^{-1}(i^2+3i+4) = 2(p \Leftrightarrow i)\cdot n + r \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$2^{-2}(k^2 \Leftrightarrow i^2 + 3(k \Leftrightarrow 1)) = 2(i \Leftrightarrow k)n \Rightarrow n = \Leftrightarrow 2^{-2}(k+i+3) = m.$$

Таким образом, прямые l_i и l_i' пересекаются в точке $(\Leftrightarrow 2^{-2}(k+i+3))$ прямой l_∞-оси перспективы p-вершинников $\overline{1}\ldots\overline{P}$ и $\overline{1'}\ldots\overline{P'}$. $\rhd$

Примечание 1. Теорема 2 доказана пока лишь для папповой плоскости характеристики p. Аналогичным образом ее можно доказать и в дезарговой и муфанговой плоскостях характеристики p.

Примечание 2. Как известно из [4], геометрическое представление (T_n) равенства $1+\cdots+1 = n = 0$, где n — любое натуральное число, не содержит пар перспективных p-вершинников. Теорема же K_p состоит из двух p-вершинников $\overline{1}\ldots\overline{P}$ и $\overline{1'}\ldots\overline{P'}$, имеющих ось l и центр S перспективы, причем $S \ni\!\in l$.

О дезарговом содержании теоремы K_p гласит следующая

Теорема 5. *В плоскости G_p, $p \neq 2$, справедлива импликация $L_{10} \Rightarrow K_p$.*

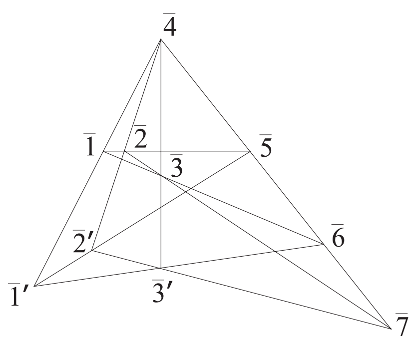

Рис. 2. (L_{10})

$\lhd$ Рассмотрим рис. 1 и 2. Расширим K_p диагоналями ее p-вершинников $\overline{1}\ldots\overline{P}$ и $\overline{1'}\ldots\overline{P'}$ и рассмотрим пары перспективных трехвершинников: $\{\overline{1}\,\overline{2}\,\overline{3};\ \overline{1'}\,\overline{2'}\,\overline{3'}\}$, $\{\overline{1}\,\overline{3}\,\overline{4};\ \overline{1'}\,\overline{3'}\,\overline{4'}\},\ldots,\{\overline{1}\,\overline{P \Leftrightarrow 2}\,\overline{P \Leftrightarrow 1};\ \overline{1'}\,\overline{(P \Leftrightarrow 2)'}\,\overline{(P \Leftrightarrow 1)'}\}$, $\{\overline{1}\,\overline{P \Leftrightarrow 1}\,\overline{P};\ \overline{1'}\,\overline{(P \Leftrightarrow 1)'}\,\overline{P'}\}$, в каждой из которых в силу теорем 2 и 4 выполняются условия теоремы L_{10}, (рис. 2). Применив к каждой из них в указанном порядке теорему L_{10}, мы убедимся в выполнении всех инцинденций теоремы K_p (выкладки опускаем). $\rhd$

Ввиду проективного выполнения L_{10} в муфанговой плоскости справедливо

Предложение 5 (1). *В муфанговой плоскости характеристики $p \neq 2$ теорема K_p выполняется проективно.*

Так как в плоскости G_p, $p \neq 2$, теорема D_9 проективно эквивалентна D_{10} (см. [8]), и кроме того, $L_{10} \Leftrightarrow D_{10}$, и $L_{10} \Rightarrow K_p$ (см. теорему 5), то справедливо

Предложение 5 (2). *В плоскости G_p, $p \neq 2$, из L_9 следует K_p.*

Примечание 3. Характерной особенностью K_p является то, что при некоторых p ее можно образовать из $p \Leftrightarrow 1$ точек. Например, K_5 можно образовать из четырех точек: $\overline{5}, \overline{5'}, B_5$ и B_4, следуя таблице инциденций вида (рис. 3)

$$S = [\overline{5}, \overline{5'}] \cap [B_4, B_5],\ \overline{1} = [B_5, \overline{5}] \cap [\overline{5'}, \overline{B_4}],\ \overline{4} = [\overline{5}, B_4] \cap [\overline{B_5}, \overline{5'}],\ \overline{1'} = [\overline{1}, S] \cap [\overline{5'}, \overline{B_5}],$$

$$B_2 = [B_4, B_5] \cap [\overline{1}, \overline{4}],\ \overline{3} = [\overline{5'}, B_4] \cap [\overline{5}, \overline{1'}],\ \overline{3'} = [\overline{3}, S] \cap [\overline{1}, \overline{4}],\ \overline{2} = [\overline{5}, \overline{3'}] \cap [\overline{3}, \overline{B_2}],$$

$$\overline{2'} = [\overline{2}, S] \cap [\overline{1}, \overline{4}],\ B_2 = [\overline{2}, \overline{5}] \cap [\overline{3}, \overline{4}],\ B_1 = [\overline{1}, \overline{2}] \cap [\overline{1'}, \overline{2'}],\ \overline{4'} = [\overline{4}, S] \cap [\overline{5}, \overline{3'}],$$

и замыкающим инцинденциям (S, B_1, B_2, B_3). При этом остается справедливым соотношение «$K_5 \Leftrightarrow 5 = 0$». В самом деле, следуя указанной таблице инцинденций и замыкающей инцинденции K_5, при $\overline{5} = (0), \overline{5'} = (0,1), B_5 = (0, \Leftrightarrow 2), B_4 = (\Leftrightarrow 1, 0)$, получаем:

$$\overline{1} = (\Leftrightarrow 3, \Leftrightarrow 2),\ \overline{4} = (0,0),\ B_2 = (\Leftrightarrow 3 \cdot 4^{-1}, \Leftrightarrow 2^{-1}),\ \overline{3} = (3,4),\ \overline{1'} = (0,4),$$

$$\overline{3'} = (3^{-1} \cdot 2),\ \overline{2} = (\infty),\ \overline{2'} = (\Leftrightarrow 3 \cdot 2^{-1}, \Leftrightarrow 1),\ B_3 = (\Leftrightarrow 2),\ B_1 = (\Leftrightarrow 3, \Leftrightarrow 6),$$

$$\overline{4'} = (\Leftrightarrow 2 \cdot 3^{-1}),\ (\overline{4'}, \overline{5}, B_4) \Leftrightarrow 5 = 0.$$

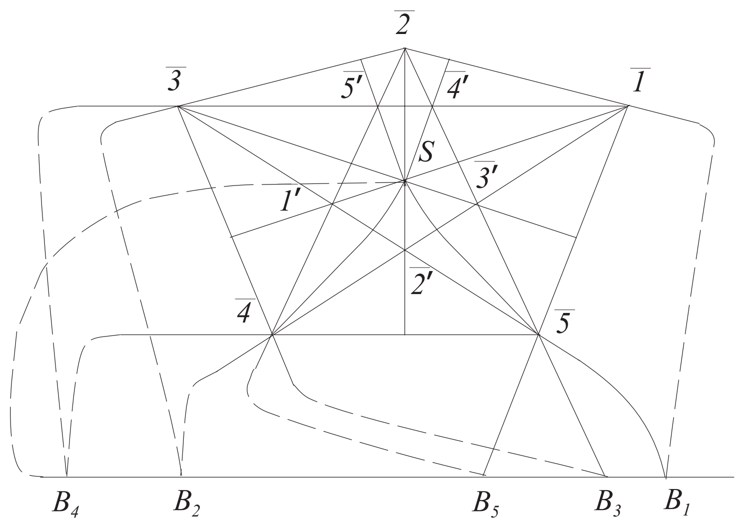

Рис. 3. (K_5)

Для дезарговой геометризации характеристики 3 тела сначала напомним, что конфигурационная система $D_s(S,l)$, где $S \not\in l$, есть конфигурационная теорема L_7 [5] (рис. 4).

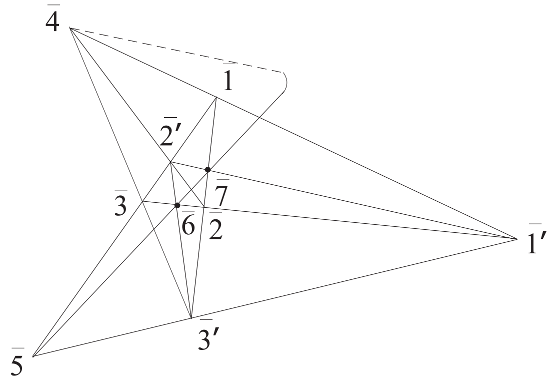

Рис. 4 (L_7)

Теорема 6 (рис. 4)**.** *Имеет место следующее соотношение*

$$L_7 \Leftrightarrow 1+1+1=0.$$

$\lhd$ Если теорему L_7 задать образующими точками $\overline{6},\overline{1},\overline{4},\overline{2}$, таблицей инцинденций: $\overline{7}=[\overline{4},\overline{6}]\cap[\overline{1},\overline{2}]$, $\overline{1'}=[\overline{1},\overline{4}]\cap[\overline{2},\overline{6}]$, $\overline{2'}=[\overline{2},\overline{4}]\cap[\overline{4},\overline{7}]$, $\overline{3'}=[\overline{6},\overline{2'}]\cap[\overline{1},\overline{2}]$, $\overline{3}=[\overline{3'},\overline{4}]\cap[\overline{1'},\overline{2}]$, $\overline{5}=[\overline{1},\overline{3}]\cap[\overline{4},\overline{6}]$ и замыкающей инцинденцией $(\overline{3},\overline{5},\overline{2'})$, то при следующих образующих точках: $\{\overline{6}=(0),\overline{4}=(\infty),\overline{1}=(0,0),\overline{2}=(1,1)\}$, другие точки L_7 будут иметь координаты: $\overline{7}=(1),\overline{1'}=(0,1),\overline{2'}=(1,1+1),\overline{3'}=(1+1,1+1),\overline{3}=(1+1,1),\overline{5}=l_\infty\cap[y=xn]=(n)$. Далее, имеем: $(\overline{1},\overline{3},\overline{5})\Leftrightarrow 1=(1+1)n$, $(\overline{2'},\overline{1},\overline{3},\overline{5})\Leftrightarrow 1+1=1\cdot n\Rightarrow 1+1+1+1=1\Rightarrow 1+1+1=0$.

Обратным ходом рассуждений доказывается, что «$1+1+1=0\Rightarrow L_7$». $\rhd$

Выясним теперь геометрические взаимосвязи теорем $L_7, 8_3$ (рис. 5) и 13_4 (рис. 6). (Проективная эквивалентность 8_3 и 13_4 доказана Рашевским в работе [2]).

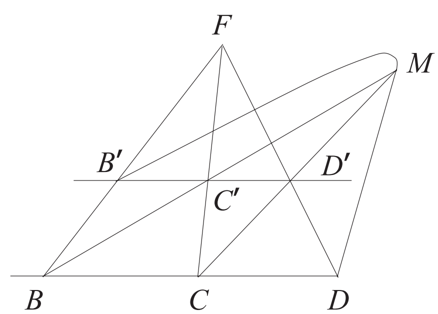

Рис. 5 (8_3)

Теорема 7 [5]. *В плоскости G_3 характеристики 3 теорема L_7 проективно эквивалентна теореме 8_3.*

$\lhd$ (1) $13_4 \Rightarrow L_7$ (рис. 4 и 6). Рассмотрим два трехвершинника $AC'C$ и FBD' с инцинденциями: $F \not\in [C, C'], B \not\in [A, C], (D', A, C'), M = [A, F] \cap [B, C'] \cap [C, D'], B' = [A, C'] \cap [F, B], D = [A, C] \cap [F, D'], Q = [C, C'] \cap [B, D']$ и докажем (M, D, Q, B'), исходя из проективного выполнения 13_4 в плоскости. С этой целью выберем в L_7 следующие 4 точки общего положения: B, C, B', C' и построим 13_4 по вышеуказанной таблице инциденций. Тогда, в силу выполнения 13_4 в плоскости, в ней имеет место инцинденция (M, B', D, Q). Таким образом из 13_4 следует L_7 в плоскости G_3.

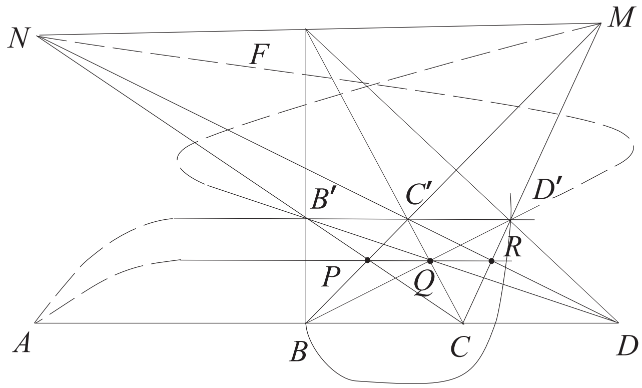

Рис. 6 (*13_4*)

(2) $L_7 \Rightarrow 13_4$. Докажем, что из L_7 следуют все инцинденции теоремы 13_4. С этой целью рассмотрим в 13_4 шесть пар трехвершинников:

(I) $\{BB'Q; C'CA\}$, (II) $\{CC'P; D'DA\}$, (III) $\{MCC'; FD'B\}$,

(IV) $\{NCC'; FB'D\}$, (V) $\{CC'M; PRF\}$, (VI) $\{CC'N; RPF\}$.

Учитывая, что в L_7: $(Q, C, C'), (B, C, A), B' \not\in [A, C'], P = [B', C] \cap [B, C'] \cap [A, Q]$, прямая $[F, D']$, где $F = [B, B'] \cap [C, C'], D' = [B, Q] \cap [A, C']$, инцинденция P, заключаем, что для трехвершинников (I) выполняются условия L_7 и, следовательно, выполняется ее замыкающая инцинденция (P, F, D, D'), где $D = [B', Q] \cap [A, C]$. Таким образом, $(I) \Rightarrow (P, F, D, D')$. Аналогичными рассуждениями при учете (P, F, D, D') устанавливаем, что (II)$\Rightarrow$ (P, A, R) и (F, R, B, B'). Далее, сравнивая (P, A, Q) и (P, A, R) заключаем (P, A, R, Q). Если учесть, что в (III): $(F, C, C'), (D', M, C), (B, M, C')$ и точки $P = [M, C'] \cap [F, D'], R = [M, C] \cap [F, B], Q = [C, C'] \cap [B, D']$ лежат, в силу (III), на одной прямой (оси перспективы) и точка $A = [C', D'] \cap [B, C]$ лежит на оси, то заключаем, что (A, F, M). Далее имеем, что (IV)$\Rightarrow$ (A, F, N). Сравнивая две последние инцинденции, мы приходим к (A, F, M, N). Опираясь на рассуждения, аналогичные предыдущим, заключаем: (V) (B, D', Q, N). Так как в (VI): $(C, C', F), (P, C.N), (R, C', N), (Q, B', D), Q = [C, C'] \cap [P, R], B' =$

$[C,N]\cap[R,F], D=[C',N]\cap[P,F], M=[R,C]\cap[C',P]\cap[N,R]$ в силу предыдущих инциденций, то (D,Q,M,B'). Итак, из L_7 следуют все инциденции теоремы 13_4.

(3) $8_3 \Rightarrow L_7$. Пусть трехвершинники $\overline{1}\,\overline{2}\,\overline{3}$ и $\overline{1'}\,\overline{2'}\,\overline{3'}$ имеют центр $\overline{4}$, точками пересечения сходственных сторон будут точки $\overline{5},\overline{7},\overline{6}$ и вершины одного (рис. 4) из них лежат на сторонах другого. Докажем тогда, что $(\overline{4},\overline{5},\overline{6},\overline{7})$. С этой целью рассмотрим в L_7 пару коллинеарных точек $\overline{2'}\,\overline{3}\,\overline{5}$ и $\overline{7}\,\overline{2}\,\overline{3'}$ с центром перспективы в точке $\overline{1'}$. В силу 8_3 (рис. 5), тройки (рис. 4) $\overline{2'}\,\overline{3}\,\overline{5}$ и $\overline{2}\,\overline{3'}\,\overline{7}$ из L_7 также перспективны и с центром в $\overline{4}$. Следовательно, $8_3 \Rightarrow (\overline{4},\overline{5},\overline{7})$. Аналогично этому, из перспективности троек $\overline{4}\,\overline{1'}\,\overline{1}$ и $\overline{3'}\,\overline{6}\,\overline{2'}$ с центром в точке $\overline{3}$, в силу 8_3, следует перспективность $\overline{4}\,\overline{1'}\,\overline{1}$ и $\overline{6}\,\overline{2'}\,\overline{3'}$ с центром в точке $\overline{7}=[\overline{1'},\overline{2'}]\cap[\overline{1},\overline{3'}]$. Итак, $8_3 \Rightarrow (\overline{4},\overline{6},\overline{7})$.

(4) $L_7 \Rightarrow 8_3$. В L_7 выделим пару коллинеарных и перспективных троек точек $\overline{2'}\,\overline{3}\,\overline{5}$ и $\overline{7}\,\overline{2}\,\overline{3'}$ (см. рис. 4) с центром $\overline{1}=[\overline{2'},\overline{7}]\cap[\overline{2},\overline{3}]\cap[\overline{5},\overline{3'}]$. Так как в L_7 точки $\overline{4},\overline{5},\overline{7}$ коллинеарны, то тройки $\overline{2'},\overline{3},\overline{5}$ и $\overline{2},\overline{3'},\overline{7}$ перспективны с центром в точке $\overline{4}=[\overline{2},\overline{2'}]\cap[\overline{3},\overline{3'}]\cap[\overline{5},\overline{7}]$. $\triangleright$

В заключение этой работы рассмотрим конфигурационную теорему D_8^*.

Теорема D_8^* ***8.*** (рис. 7). *Пусть для точек* $(\overline{3},\overline{6},\overline{1'}),\overline{2'},\overline{4}$ *бесконечной плоскости Фано выполняются следующие инциденции:*

$$[\overline{1'},\overline{3}]\cap[\overline{4},\overline{2'}]=\overline{2},\ \ \overline{3'}=[\overline{6},\overline{2'}]\cap[\overline{3},\overline{4}],\ \ \overline{5}=[\overline{2'},\overline{3}]\cap[\overline{1'},\overline{3'}],$$

$$\overline{1}=[\overline{1'},\overline{4}]\cap[\overline{2'},\overline{5}],\ \ \overline{7}=[\overline{1'},\overline{2'}]\cap[\overline{1},\overline{2}],$$

тогда будут выполнятся и инциденции $(\overline{5},\overline{6},\overline{7})$ *и* $(\overline{3},\overline{3'},\overline{7})$.

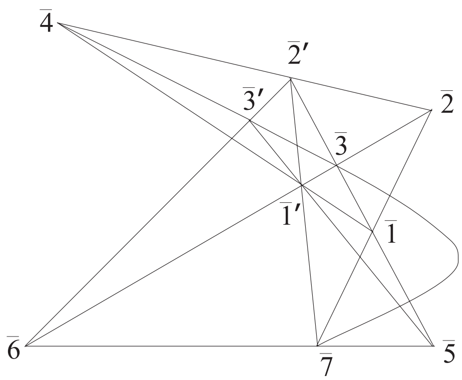

Рис. 7 (D_8^*)

Теорема D_8^* состоит из 10 точек, 10 прямых и имеет ранг 8 ($D_8^* \neq D_8$). Выясним теперь связи между D_8^* и 7_3 (рис. 8).

Теорема 9. *В плоскости Фано* G_2 *из* 7_3 *следует* D_8^* *проективно.*

◁ Пусть выполняются все инцинденции D_8^* (рис. 7), кроме $(\overline{5}, \overline{6}, \overline{7})$ и $(3, 3', 7)$. Тогда, применив 7_3 к четырехвершинникам $\overline{1'}\,\overline{3}\,\overline{2'}\,4$ и $\overline{3}\,\overline{2'}\,\overline{3'}\,\overline{1'}$, заключаем:

$$(\overline{1} = [\overline{1'}, \overline{4}] \cap [\overline{3}, \overline{2'}],\ \overline{2} = [\overline{1'}, \overline{3}] \cap [\overline{2'}, \overline{4}],\ 7^* = [\overline{1'}, \overline{2'}] \cap [\overline{3}, \overline{4}]) \Leftrightarrow (\overline{1}, \overline{2}, \overline{7}^*),$$

$$(\overline{5} = [\overline{3}, \overline{2'}] \cap [\overline{1'}, \overline{3'}],\ \overline{6} = [\overline{3}, \overline{1'}] \cap [\overline{2'}, \overline{3'}],\ 7' = [\overline{3}, \overline{3'}] \cap [\overline{1'}, \overline{2'}]) \Leftrightarrow (\overline{5}, \overline{6}, \overline{7'}),$$

$$(\overline{7} = \overline{7^*} = [\overline{1'}, \overline{2'}] \cap [\overline{3}, \overline{3'}, \overline{4}] \cap [\overline{1}, \overline{2}] = \overline{7'} \Rightarrow (\overline{3}, \overline{4}, \overline{7}) \text{ и } (\overline{5}, \overline{6}, \overline{7})).$$

Аналогичными рассуждениями и выкладками доказывается, что при любом другом наборе образующих точек теоремы D_8^* из 7_3 следуют все инцинденции D_8^*. ▷

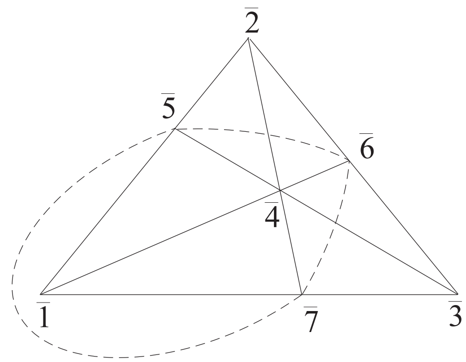

Рис. 8 (7_3)

Поскольку D_8^* содержит все инцинденции D_9 и инцинденцию $(\overline{7}, \overline{3}, \overline{4})$, то она есть частный случай D_9 в плоскости Фано, и имеет дезаргово содержание.

(Существуют и другие дезарговы геометризации характеристики 2 (см. в [6].))

Литература

1. *Fano G.* Sui postulati fundamentali della geometria proectiva // Giorn. Math.—1942.—V. 30.—P. 106–112.
2. *Рашевский П. К.* Проективная геометрия с новыми конфигурационными аксиомами // Мат. сб.—1940.—Т. 8 (50), № 2.—С. 183–203.
3. *Zappa G.* Piano grafici a coracteructika // Ann. Math. Pura. Appe.—1960.—No. 49.—P. 157–160.
4. *Картеси Ф.* Введение в конечные геометрии.—М.: Наука, 1980.
5. *Хубежты И. А.* Теорема L_7 // Геометрии инцидентностных структур и дифференциальных уравнений: Сб. науч. статей.—Смоленск, 1981.—С. 92–96.
6. *Хубежты И. А.* О теореме 7_3 // Деп. в ВИНИТИ, 2001.—№ 1101.—7 с.
7. *Хубежты И. А.* О некоторых классах алгебр и инцидентностных структур.—Владикавказ: Изд-во СОГУ, 1994.—392 с.

8. *Moufang R.* Die Schnittpunktsatze des proektiven speziellen Funfeckchetzes in ihrer Anhandigkeit voneinander // Math. Ann.—1935.—V. 106.—P. 755–795.

г. Владикавказ *Статья поступила 23 сентября 2001*