Владикавказский математический журнал
Июнь–сентябрь, 2001, Том 3, Выпуск 3

УДК **511.3**

О РАЦИОНАЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЯХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ $\sqrt[3]{D}$

Б. Г. Тасоев

В статье усиливается результат К. Рота о рациональном приближении для алгебраических чисел $\sqrt[3]{D}$.

Введение

Начало теории приближения алгебраических чисел рациональными числами положил Ж. Лиувилль, опубликовавший в 1848 г. первую теорему, дающую необходимый признак алгебраичности числа и, следовательно, достаточный признак трансцендентности [3, 5]. Еще за сто лет до доказательства теоремы Лиувилля Л. Эйлер утверждал, что трансцендентные числа существуют. Но доказать это утверждение он не смог.

В 1874 г. Г. Кантор другим методом доказал существование трансцендентных чисел. Развивая теорию множеств, он показал, что множество алгебраических чисел счетно, а множество вещественных чисел несчетно. Следовательно, существуют трансцендентные числа.

В 1909 г. А. Туэ получил первое усиление теоремы Лиувилля. Дальнейшие усиления теоремы Туэ с 1921 г. по 1955 г. были получены последовательно К. Зигелем, Ф. Дайсоном, А. О. Гельфондом. Существенное продвижение в проблеме приближения алгебраических чисел рациональными получил К. Рот в 1955 г. За этот результат он был награжден Филдсовской премией за 1958 г.

Теорема Рота. *Пусть $\alpha \in \mathbb{A}$, $\deg\alpha = n \geqslant 3$, а δ — любое положительное число. Тогда неравенство*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^{2+\delta}}$$

имеет лишь конечное число решений в числах $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$.

Здесь и ниже $\mathbb{A}, \mathbb{Z}$ и $\mathbb{N}$ — множества алгебраических, целых и натуральных чисел соответственно.

Долгое время в теореме Рота не удается заменить степенную функцию q^δ на функцию, растущую медленнее. С. Ленг в 1965 г. пишет о том, что «Очень трудной является гипотеза, состоящая в том, что для числа α степени $n \geqslant 3$ неравенство

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2(\log q)^x}$$

имеет лишь конечное число решений при $x > 1$ или по крайней мере при $x > x_0(\alpha)$» ([6], с. 98.). В настоящей работе при условиях $\alpha \in \mathbb{A}, \deg\alpha = 3$: 1) приводится новое доказательство теоремы Рота, 2) доказано, что неравенство

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2 \ln^{\,1+\delta} q},$$

где $0 < \delta < 1$, имеет лишь конечное число решений в числах $p, q \in \mathbb{N}$.

Аналогичным образом могут быть доказаны неравенства для чисел вида $\alpha = \sqrt[n]{D}$, $n > 3$.

1. О последовательности многочленов, определяющей его корни

Пусть $\alpha = \sqrt[3]{D}$ — алгебраическое число степени 3 и пусть

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots] \tag{1.1}$$

разложение числа α в непрерывную (арифметическую) дробь,

$$\alpha_{k+1} = [a_{k+1}; a_{k+2}, a_{k+3}, \ldots]. \tag{1.2}$$

Известно [1, 4], что имеют место следующие равенства:

$$\alpha = \frac{p_k\alpha_{k+1} + p_{k-1}}{q_k\alpha_{k+1} + q_{k-1}}, \tag{1.3}$$

$$\frac{p_k}{q_k} = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_k], \tag{1.4}$$

$$p_0 = a_0, \quad p_1 = a_0a_1 + 1, \quad p_k = a_kp_{k-1} + p_{k-2}, \tag{1.5}$$

$$q_0 = 1, \; q_1 = a_1, \; q_k = a_kq_{k-1} + q_{k-2}, \tag{1.6}$$

$$q_kp_{k-1} - p_kq_{k-1} = (-1)^k, \tag{1.7}$$

$$\frac{p_0}{q_0} < \frac{p_2}{q_2} < \frac{p_4}{q_4} < \cdots < \frac{p_{2k}}{q_{2k}} < \ldots, \tag{1.8}$$

$$\frac{p_1}{q_1} > \frac{p_3}{q_3} > \frac{p_5}{q_5} > \cdots > \frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}} > \ldots, \tag{1.9}$$

$$\frac{p_{2k}}{q_{2k}} < \alpha < \frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}}, \tag{1.10}$$

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| = \frac{1}{\gamma_{k+1} q_k^2}, \tag{1.11}$$

$$\gamma_{k+1} = [a_{k+1}; a_{k+2}, \ldots] + [0; a_k, a_{k-1}, \ldots, a_1], \tag{1.12}$$

$$\varepsilon_k = \left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| > \left|\alpha - \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}\right| = \varepsilon_{k+1}, \tag{1.13}$$

$$\varepsilon_k = \left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| = \frac{1}{\alpha_{k+1} q_k^2} = \frac{1}{q_k q_{k+1}} - \frac{1}{q_{k+1} q_{k+2}}. \tag{1.14}$$

Положим $\alpha_{k+1} = x$. Тогда из равенства (1.3) следует, что

$$(q_k x + q_{k-1})\sqrt[3]{D} = p_k x + p_{k-1}.$$

Возведя обе части этого равенства в третью степень и приведя подобные члены, получим, что

$$\sum_{i=0}^{3} C_3^i (d q_k^{3-i} q_{k-1}^i - p_k^{3-i} p_{k-1}^i) x^{3-i} = 0.$$

Таким образом, для числа α_{k+1} мы получили уравнение третьей степени с целыми коэффициентами, α и α_{k+1} являются эквивалентными числами. Поэтому α_{k+1} также алгебраические иррациональности степени 3.

Рассмотрим многочлен [2]

$$f_k(x) = \sum_{i=0}^{3} C_3^i (D q_k^{3-i} q_{k-1}^i - p_k^{3-i} p_{k-1}^i) x^{3-i}. \tag{1.15}$$

В силу сказанного выше α_{k+1} является корнем этого многочлена, т. е. при переходе через это число $f_k(x)$ меняет знак. Поэтому для $[\alpha_{k+1}] = a_{k+1}$ значения многочлена $f_k(a_{k+1})$ и $f_k(a_{k+1}+1)$ имеют разные знаки.

Покажем, что

$$C_3^i (D q_k^{3-i} q_{k-1} - p_k^{3-i} p_{k-1}) = \frac{1}{i!} f_{k-1}^{(i)}(a_k), \quad k \geqslant 0, \quad 0 \leqslant i \leqslant 3. \tag{1.16}$$

В самом деле, справедливы равенства

$$f_{k-1}(x) = \sum_{m=0}^{3} C_3^m (D q_{k-1}^{3-m} q_{k-2}^m - p_{k-1}^{3-m} p_{k-2}^m) x^{3-m};$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{i!} f_{k-1}^{(i)}(x) &= \sum_{m=0}^{3-i} C_3^m C_{3-m}^i (D q_{k-1}^{3-m} q_{k-2}^m - p_{k-1}^{3-m} p_{k-2}^m) x^{3-m-i} \\
&= \sum_{m=0}^{3-i} C_3^i C_{3-i}^m (D q_{k-1}^{3-m} q_{k-2}^m - p_{k-1}^{3-m} p_{k-2}^m) x^{3-m-i} \\
&= C_3^i \sum_{m=0}^{3-i} C_{3-i}^m (D q_{k-1}^{3-m} q_{k-2}^m - p_{k-1}^{3-m} p_{k-2}^m) x^{3-m-i}.
\end{aligned}$$

Итак,

$$\frac{1}{i!}f_{k-1}^{(i)}(a_k)=C_3^i\sum_{m=0}^{3-i}C_{3-i}^m(Dq_{k-1}^{3-m}q_{k-2}^m-p_{k-1}^{3-m}p_{k-2}^m)a_k^{3-m-i}.$$

С другой стороны, в силу (1.5) и (1.6) находим

$$\begin{aligned}
C_3^i(Dq_k^{3-i}q_{k-1}^i-p_k^{3-i}p_{k-1}^i)&=DC_3^iq_k^{3-i}q_{k-1}^i-C_3^ip_k^{3-i}p_{k-1}^i\\
&=DC_3^i(a_kq_{k-1}+q_{k-2})^{3-i}q_{k-1}^i-C_3^i(a_kp_{k-1}+p_{k-2})^{3-i}p_{k-1}^i\\
&=DC_3^i\sum_{m=0}^{3-i}C_{3-i}^mq_{k-1}^{3-m-i}q_{k-2}^mq_{k-1}^ia_k^{3-m-i}-C_3^i\sum_{m=0}^{3-i}C_{3-i}^mp_{k-1}^{3-m-i}p_{k-2}^mp_{k-1}^ia_k^{3-m-i}\\
&=DC_3^i\sum_{m=0}^{3-i}C_{3-i}^mq_{k-1}^{3-m}q_{k-2}^ma_k^{3-m-i}-C_3^i\sum_{m=0}^{3-i}C_{3-i}^mp_{k-1}^{3-m}p_{k-2}^ma_k^{3-m-i}\\
&=C_3^i\sum_{m=0}^{3-i}C_{3-i}^m(Dq_{k-1}^{3-m}q_{k-2}^m-p_{k-1}^{3-m}p_{k-2}^m)a_k^{3-m-i}.
\end{aligned}$$

Следовательно, равенство (1.15) имеет место.

Покажем теперь, что каждый из многочленов (1.15) имеет один и только один положительный корень.

Действительно, многочлен

$$f_{-1}(x)=-x^3+D$$

имеет единственный положительный корень. Предположим, что $f_k(x)$ имеет один и только один положительный корень. Рассмотрим многочлен $f_{k+1}(x)$. Установим, что

$$f_{k+1}(x)=x^nf_k\Big(a_{k+1}+\frac{1}{x}\Big). \tag{1.17}$$

В самом деле, учитывая равенство

$$C_3^iC_{3-i}^j=C_3^jC_{3-j}^i,$$

можем написать цепочку равенств

$$
\begin{aligned}
x^3 f_k\Big(a_{k+1}+\frac{1}{x}\Big) &= x^3\sum_{i=0}^{3} C_3^i (Dq_k^{3-i}q_{k-1}^i - p_{k-1}^{3-i}p_{k-1}^i)\Big(a_{k+1}+\frac{1}{x}\Big)^{3-i}\\
&= \sum_{i=0}^{3} C_3^i (Dq_k^{3-i}q_{k-1}^i - p_k^{3-i}p_{k-1}^i)\sum_{j=0}^{3-i} C_{3-i}^j a_{k+1}x^{3-j}\\
&= D\sum_{i=0}^{3}\Big(C_3^i q_k^{3-i}q_{k-1}\sum_{j=0}^{3-i} C_{3-i}^j a_{k+1}^{3-j-1} - x^{3-i}\Big)\\
&- \sum_{i=0}^{3}\Big(C_3^i p_k^{3-i}p_{k-1}^i\sum_{j=0}^{3-i} C_{3-i}^j a_{k+1}^{3-j-1}x^{3-j}\Big)\\
&= D\sum_{i=0}^{3} C_3^i (a_{k+1}q_k + q_{k-1})^{3-i}q_k^i x^{3-i}\\
&- \sum_{i=0}^{3} C_3^i (a_{k+1}p_k + p_{k-1})^{3-i}p_k^i x^{3-i}\\
&= D\sum_{i=0}^{3} C_3^i q_{k+1}^{3-i}q_k^i x^{3-i} - \sum_{i=0}^{3} C_3^i p_{k+1}^{3-i}p_k^i x^{3-i}\\
&= \sum_{i=0}^{3} C_3^i (Dq_{k+1}^{3-i}q_k^i - p_k^{3-i}p_k^i)x^{3-i} = f_{k+1}(x).
\end{aligned}
$$

Из (1.16) следует, что $f_{k+1}(x)$ имеет единственный положительный корень. Таким образом, для цепной дроби

$$\sqrt[3]{D} = [a_0; a_1, a_2, a_3, \dots, a_k, \dots]$$

находим рекурентную последовательность многочленов

$$
\begin{aligned}
&f_{-1}(x) = -x^3 + D,\\
&f_k(x) = \sum_{i=0}^{3}\frac{1}{i!}f_{k-1}^{(i)}(a_k)x^{3-i}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,
\end{aligned}
\tag{1.18}
$$

каждый из которых определяет соответствующий элемент разложения $\sqrt[3]{D}$ в цепную дробь. Многочлен $f_k(x)$ определяет элемент $a_{k+1} = c$ так, что $f_k(c)$ и $f_k(c+1)$ имеют противоположные знаки.

Пример. Определить первые десять элементов разложения

$$\sqrt[3]{2} = [a_0; a_1, a_2, a_3, \dots, a_9, \dots].$$

Решение. Последовательно находим

$$f_{-1}(x) = -x^3 + 2,$$

$$f_{-1}(1) = 1, \quad f_{-1}(2) = -6, \quad f'_{-1}(1) = -3, \quad f''_{-1}(1) = -6,$$

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 3x - 3;$$

$$f_1(3) = -10, \quad f_0(4) = 3, \quad a_1 = 3, \quad f'_0(3) = 6, \quad f''_0(3) = 12$$

$$f_1(x) = -10x^3 + 6x^2 + 6x + 1;$$

$$f_1(3) = 3, \quad f_1(2) = -43, \quad a_2 = 1, \quad f'_1(1) = -12, \quad f''_1(1) = -48, \quad f'''_1(1) = -60,$$

$$f_2(x) = 3x^3 - 12x^2 - 24x - 10;$$

$$f_2(5) = -55, \quad f_2(6) = 82, \quad a_3 = 5, \quad f'_2(5) = 81, \quad f''_2(5) = 66,$$

$$f_3(x) = -55x^3 + 81x^2 + 33x + 3;$$

$$f_3(1) = 62, \quad f_3(2) = -47, \quad a_4 = 3, \quad f'_3(1) = 30, \quad f''_3(1) = -330,$$

$$f_4(x) = 62x^3 + 30x^2 - 84x - 55;$$

$$f_4(1) = -47, \quad f_4(2) = 393, \quad a_5 = 1, \quad f'_4(1) = 162, \quad f''_4(1) = 432,$$

$$f_5(x) = -47x^3 + 162x^2 + 216x + 62;$$

$$f_5(4) = 510, \quad f_5(5) = -1683, \quad a_6 = 4, \quad f'_5(4) = -744, \quad f''_5(4) = -804,$$

$$f_6(x) = 510x^3 - 744x^2 - 402x - 47;$$

$$f_6(1) = -683, \quad f_6(2) = 253, \quad a_7 = 1, \quad f'_6(1) = -360, \quad f''_6(1) = 1572,$$

$$f_7(x) = -683x^3 - 360x^2 + 786x + 510;$$

$$f_7(1) = 253, \quad f_7(2) = -4822, \quad a_8 = 1, \quad f'_7(1) = -1983, \quad f''_7(1) = -4819,$$

$$f_8(x) = 253x^3 - 1983x^2 - 2409x - 683;$$

$$a_9 = 8$$

Таким образом, получаем

$$\sqrt[3]{2} = [1; 3, 1, 5, 1, 1, 4, 1, 1, 8, \ldots].$$

2. О некоторых свойствах коэффициентов многочленов

Пусть $\alpha = \sqrt[3]{D}$ — кубическая иррациональность,

$$\sqrt[3]{D} = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots] \text{ —} \tag{2.1}$$

ее разложение в арифметическую цепную дробь. Применим к (2.1) описанный в параграфе 1 алгоритм:

$$f_{-1}(x) = -x^3 + D,$$

$$f_k(x) = A_k x^3 + 3B_k x^2 + 3C_k x + A_{k-1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \tag{2.2}$$

где

$$A_k = f_{k-1}(a_k) = Dq_k^3 - p_p^3, \tag{2.3}$$

$$B_k = \frac{1}{3} f'_{k-1}(a_k) = Dq_k^2 q_{k-1} - p_k^2 p_{k-1}, \tag{2.4}$$

$$C_k = \frac{1}{6} f''_{k-1}(a_k) = Dq_k q_{k-1}^2 - p_k p_{k-1}^2, \tag{2.5}$$

$$A_{k-1} = \frac{1}{6} f'''_{k-1}(x) = Dq_{k-1}^3 - p_{k-1}^3. \tag{2.6}$$

Лемма 2.1. *Имеют место следующие равенства:*

$$A_k q_{k-1} - B_k q_k = (-1)^k p_k^2, \tag{2.7}$$

$$A_k p_{k-1} - B_k p_k = (-1)^k q_k^2, \tag{2.8}$$

$$A_k q_{k-1}^2 - C_k q_k = (-1)^k p_k (q_k p_{k-1} + p_k q_{k-1}), \tag{2.9}$$

$$C_k q_k - B_k q_{k-1} = (-1)^k p_k p_{k-1}, \tag{2.10}$$

$$A_{k-1} q_k - C_k q_{k-1} = (-1)^{k-1} p_{k-1}^2, \tag{2.11}$$

$$B_k^2 - A_k C_k = Dp_k q_k, \tag{2.12}$$

$$A_k A_{k-1} - B_k C_k = -D(p_k q_{k-1} + q_k p_{k-1}), \tag{2.14}$$

$$(A_k A_{k-1} - B_k C_k) - 4(B_k^2 - A_k C_k)(C_k^2 - B_k A_{k-1}) = D^2, \tag{2.15}$$

$$C_k^2 - A_{k-1} B_k = Dp_{k-1} q_{k-1}, \tag{2.13}$$

$$\alpha_{k+1} = \frac{(-1)^k (q_k \alpha^2 + p_k \alpha) - B_k}{A_k}, \tag{2.16}$$

$$\gamma_{k+1} = \frac{(-1)^k (q_k^2 \alpha^2 + p_k q_k \alpha + p_k^2)}{A_k q_k}, \tag{2.17}$$

◁ Пользуясь (2.3)–(2.6), на основе (1.7), последовательно находим, что

$$\begin{aligned} A_k q_{k-1} - B_k q_k &= (Dq_k^3 - p_k^3) q_{k-1} - (Dq_k^2 q_{k-1} - p_k^2 p_{k-1}) q_k \\ &= p_k^2 q_k p_{k-1} - p_k^3 q_{k-1} = p_k^2 (q_k p_{k-1} - p_k q_{k-1}) = (-1)^k p_k^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A_kp_{k-1}-B_kp_k&=(Dq_k^3-p_k^3)p_{k-1}-(Dq_k^2q_{k-1}-p_k^2p_{k-1})p_k\\&=Dq_k^3p_{k-1}-Dq_k^2q_{k-1}p_k=Dq_k^2(q_kp_{k-1}-p_kq_{k-1})=(-1)^kDq_k^2;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A_kq_{k-1}^2-C_kq_k^2&=(Dq_k^3-p_k^3)q_{k-1}^2-(Dq_kq_{k-1}^2-p_kp_{k-1}^2)q_k^2\\&=p_kp_{k-1}^2q_k^2-p_k^3q_{k-1}^2=p_k(q_k^2p_{k-1}^2-q_{k-1}^2p_k^2)=(-1)^kp_k(a_kp_{k-1}+p_kq_{k-1});\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}C_kq_k-B_kq_{k-1}&=(Dq_kq_{k-1}^2-p_kp_{k-1}^2)q_k-(Dq_k^2q_{k-1}-p_k^2p_{k-1})q_{k-1}\\&=p_k^2p_{k-1}q_{k-1}-p_kp_{k-1}^2q_k=p_kp_{k-1}(q_{k-1}p_k-p_{k-1}q_k)=(-1)^{k-1}p_kp_{k-1};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A_{k-1}q_k-C_kq_{k-1}&=(Dq_{k-1}^3-p_{k-1}^3)q_k-(Dq_kq_{k-1}^2-p_kp_{k-1}^2)q_{k-1}\\&=p_kp_{k-1}^2q_{k-1}-p_{k-1}^3q_k=p_{k-1}^2(q_{k-1}p_k-p_{k-1}q_k)=(-1)^{k-1}p_{k-1}^2;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B_k^2-A_kC_k&=(Dq_k^2q_{k-1}-p_k^2p_{k-1})^2-(Dq_k^3-p_k^3)(Dq_kq_{k-1}^2-p_kp_{k-1}^2)\\&=Dq_k^2p_kp_{k-1}(q_kp_{k-1}-p_kq_{k-1})+Dp_k^2q_kq_{k-1}(p_kq_{k-1}-q_kp_{k-1})\\&=Dq_kp_k(q_kp_{k-1}-p_kq_{k-1})^2=Dp_kq_k;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}C_k^2-A_{k-1}B_k&=(Dq_kq_{k-1}^2-p_kp_{k-1}^2)^2-(Dq_{k-1}^3-p_{k-1}^3)(Dq_k^2q_{k-1}-p_k^2p_{k-1})\\&=Dp_kp_{k-1}q_{k-1}^2(p_kq_{k-1}-q_kp_{k-1})+Dq_kq_{k-1}p_{k-1}^2(q_kp_{k-1}-p_kq_{k-1})\\&=Dp_{k-1}q_{k-1}(q_{k-1}p_k-p_{k-1}q_k)^2=Dp_{k-1}q_{k-1};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&A_kA_{k-1}-B_kC_k=(Dq_k^3-p_k^3)(Dq_{k-1}^3p_{k-1}^3)-(Dq_k^2q_{k-1}-p_k^2p_{k-1})\\&\times(Dq_kq_{k-1}^2-p_kp_{k-1}^2)=Dq_k^2p_{k-1}^2(p_kq_{k-1}-q_kp_{k-1})+Dq_k^2q_{k-1}^2(q_kp_{k-1}-p_kq_{k-1})\\&\qquad=(-1)^kD(p_k^2q_{k-1}^2-q_k^2p_{k-1}^2)=-D(p_kq_{k-1}+q_kp_{k-1});\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(A_kA_{k-1}-B_kC_k)^2-4(B_k^2-A_kC_k)(C_k^2-B_kA_{k-1})\\&=D^2(p_kq_{k-1}+q_kp_{k-1})^2-4D^2p_kq_kp_{k-1}q_{k-1}=D^2(p_kq_{k-1}-q_kp_{k-1})^2=D^2.\end{aligned}$$

Из равенства (1.3) находим, что

$$\alpha_{k+1}=\frac{p_{k-1}-\alpha q_{k-1}}{\alpha q_k-p_k},$$

а умножив и разделив правую часть на $q_k^2\alpha^2 + p_k q_k \alpha + p_k^2$, выводим

$$\alpha_{k+1} = \frac{1}{A_k}(\alpha^2 q_k^2 p_{k-1} + \alpha p_k p_{k-1} q_k + p_k^2 p_{k-1} - \alpha^3 q_k^2 q_{k-1} - \alpha^2 q_k p_k q_{k-1}$$
$$-\alpha p_k^2 q_{k-1}) = -\frac{1}{A_k}(\alpha^3 q_k^2 q_{k-1} + p_k^2 p_{k-1}) + \frac{1}{A_k}\alpha^3 q_k (q_k p_{k-1} - p_k q_{k-1})$$
$$+\frac{1}{A_k}\alpha p_k (q_k p_{k-1} - p_k q_{k-1}) = -\frac{D q_k^2 q_{k-1} - p_k^2 p_{k-1}}{A_k} + \frac{(-1)^k \alpha^2 q_k}{A_k} + \frac{(-1)^k \alpha p_k}{A_k}$$
$$= \frac{(-1)^k (q_k \alpha^2 + p_k \alpha) - B_k}{A_k},$$

$$\alpha_{k+1} = \alpha_{k+1} + \frac{q_{k-1}}{q_k} = \frac{(-1)^k (q_k \alpha^2 + p_k \alpha) - B_k}{A_k} + \frac{q_{k-1}}{q_k}$$
$$= \frac{(-1)^k (q_k^2 \alpha^2 + p_k q_k \alpha) - B_k q_k + A_k q_{k-1}}{A_k q_k} = \frac{(-1)^k (q_k^2 \alpha^2 + p_k q_k \alpha) + (-1)^k p_k^2}{A_k q_k}$$
$$= (-1)^k \frac{q_k^2 \alpha^2 + p_k q_k \alpha + p_k^2}{A_k q_k}. \ \triangleright$$

Лемма 2.2. *Если* $2|k$, *то*

$$A_k > 0, \quad C_k < 0, \quad A_{k-1} < 0. \tag{2.18}$$

Если $2 \dagger k$, *то*

$$A_k < 0, \quad C_k > 0, \quad A_{k-1} > 0. \tag{2.19}$$

$\triangleleft$ Утверждения $A_k > 0$, $A_{k-1} < 0$ при $2|k$ и $A_k < 0$, $A_{k-1} > 0$ при $2 \dagger k$ следуют из (1.10).

Пусть $2|k$, тогда, в силу (1.14), находим, что

$$\frac{p_k}{q_k} = \alpha - \varepsilon_k, \ \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} = \alpha + \varepsilon_{k-1}, \ \varepsilon_k < \varepsilon_{k-1}, \ \varepsilon_k < \frac{1}{q_k q_{k+1}}, \ \varepsilon_{k-1} < \frac{1}{q_{k-1} q_k}.$$

Поэтому

$$D - \frac{p_k}{q_k} \cdot \frac{p_{k-1}^2}{q_{k-1}^2} = D - (\alpha - \varepsilon_k)(\alpha + \varepsilon_{k-1})^2 = -2\alpha^2 \varepsilon_{k-1} + \varepsilon_k (\alpha + \varepsilon_{k-1})^2 < 0.$$

При $2 \dagger k$

$$D - \frac{p_k}{q_k} \cdot \frac{p_{k-1}^2}{q_{k-1}^2} = D - (\alpha + \varepsilon_k)(\alpha - \varepsilon_{k-1})^2$$
$$= 2\alpha^2 \varepsilon_{k-1} - \alpha \varepsilon_{k-1}^2 - \varepsilon_k (\alpha - \varepsilon_{k-1})^2$$
$$= \varepsilon_{k-1} \left((2\alpha^2 - \alpha \varepsilon_{k-1}) - \frac{\varepsilon_k}{\varepsilon_{k-1}} (\alpha - \varepsilon_{k-1})^2 \right) > 0. \ \triangleright$$

Лемма 2.3. *Пусть*

$$b_k = \frac{1}{\gamma_{k+1}} \left(\alpha^2 + \frac{p_k}{q_k}\alpha + \frac{p_k^2}{q_k^2} \right), \tag{2.20}$$

где γ_{k+1} *определяется условием (1.12). Тогда справедливы представления:*

$$A_k = (-1)^k b_k q_k; \tag{2.21}$$

$$B_k = (-1)^{k-1} \left(\frac{p_k^2}{q_k^2} - b_k \frac{q_{k-1}}{q_k} \right) \cdot q_k; \tag{2.22}$$

$$C_k = (-1)^{k-1} \left(\frac{p_k}{q_k} \cdot \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} + \frac{p_k^2}{q_k^2} - b_k \cdot \frac{q_{k-1}}{q_k} \right) q_{k-1}; \tag{2.23}$$

$$A_{k-1} = (-1)^{k-1} \left(\frac{p_{k-1}^2}{q_{k-1}^2} + \frac{p_k}{q_k} \cdot \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} + \frac{p_k^2}{q_k^2} - b_k \cdot \frac{q_{k-1}}{q_k} \right) \frac{q_{k-1}^2}{q_k}. \tag{2.24}$$

$\lhd$ В силу (2.3)–(2.6) и (1.11) находим, что

$$\begin{aligned} |A_k| = |Dq_k^3 - p_k^3| &= q_k^3 \Big| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \Big| \left(\alpha^2 + \frac{p_k}{q_k}\alpha + \frac{p_k^2}{q_k^2} \right) \\ &= q_k^3 \cdot \frac{1}{\gamma_{k+1} q_k^2} \left(\alpha^2 + \frac{p_k}{q_k}\alpha + \frac{p_k^2}{q_k^2} \right) = b_k q_k. \end{aligned}$$

Далее, из (2.7) получаем

$$\begin{aligned} B_k q_k = A_k q_{k-1} + (-1)^k p_k^2 = (-1)^k b_k q_k p_k + (-1)^{k-1} p_k^2 \\ = (-1)^{k-1} (p_k^2 - b_k q_{k-1} q_k), \end{aligned}$$

откуда следует равенство (2.22).

Учитывая (2.10), находим

$$\begin{aligned} C_k q_k &= (-1)^{k-1} p_{k-1} p_k + B_k q_{k-1} \\ &= (-1)^{k-1} p_k p_{k-1} + (-1)^{k-1} \left(\frac{p_k^2}{q_k^2} - b_k \cdot \frac{q_{k-1}}{q_k} \right) q_k q_{k-1} \\ &= (-1)^{k-1} \left(\frac{p_k}{q_k} \cdot \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} + \frac{p_k^2}{q_k^2} - b_k \frac{q_{k-1}}{q_k} \right) q_k q_{k-1}, \end{aligned}$$

откуда следует (2.23).

Наконец, из равенства (2.21) следует, что

$$\begin{aligned} A_{k-1} q_k &= (-1)^{k-1} p_k^2 + C_k q_k \\ &= (-1)^{k-1} p_k^2 + (-1)^{k-1} \left(\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} \cdot \frac{p_k}{q_k} + \frac{p_k^2}{q_k^2} - b_k \cdot \frac{q_{k-1}}{q_k} \right) q_{k-1}^2, \end{aligned}$$

что и доказывает равенство (2.24). $\triangleright$

Лемма 2.4. *При* $2|k$ *будет*

$$A_k = \frac{3\alpha^2 q_k}{\gamma_{k+1}} - \frac{3\alpha}{\gamma_{k+1}^2 q_k} + \frac{1}{\gamma_{k+1}^3 q_k^3} = \frac{3\alpha^2 q_k}{\gamma_{k+1}} + O\left(\frac{1}{\gamma_{k+1}^2 q_k}\right). \tag{2.25}$$

При $2 \dagger k$ *верно*

$$|A_k| = \frac{3\alpha^2 q_k}{\gamma_{k+1}} + \frac{3\alpha}{\gamma_{k+1}^2 q_k} + \frac{1}{\gamma_{k+1}^3 q_k^3} = \frac{3\alpha^2 q_k}{\gamma_{k+1}} + O\left(\frac{1}{\gamma_{k+1}^2 q_k}\right). \tag{2.26}$$

$\triangleleft$ При $2|k$, имеем

$$\begin{aligned} A_k = q_k b_k &= \frac{q_k}{\gamma_{k+1}}\Big(\alpha^2 + \frac{p_k}{q_k}\alpha + \frac{p_k^2}{q_k^2}\Big) \\ &= \frac{q_k}{\gamma_{k+1}}\left[\alpha^2 + \Big(\alpha - \frac{1}{\gamma_{k+1} q_k^2}\Big)\alpha + \Big(\alpha - \frac{1}{\gamma_{k+1} q_k^2}\Big)^2\right] \\ &= \frac{3\alpha^2 q_k}{\gamma_{k+1}} - \frac{3\alpha}{\gamma_{k+1}^2 q_k} + \frac{1}{\gamma_{k+1}^3 q_k^3} \\ &= \frac{3\alpha^2 q_k}{\gamma_{k+1}} + O\Big(\frac{1}{\gamma_{k+1}^2 q_k}\Big). \end{aligned}$$

При $2 \dagger k$ находим, что

$$\begin{aligned} |A_k| &= \frac{q_k}{\gamma_{k+1}}\Big(\alpha^2 + \frac{p_k}{q_k}\alpha + \frac{p_k^2}{q_k^2}\Big) \\ &= \frac{q_k}{\gamma_{k+1}}\left[\alpha^2 + \Big(\alpha + \frac{1}{\gamma_{k+1} q_k^2}\Big)\alpha + \Big(\alpha + \frac{1}{\gamma_{k+1} q_k^2}\Big)^2\right] \\ &= \frac{q_k}{\gamma_{k+1}}\Big(3\alpha^2 + \frac{3\alpha}{\gamma_{k+1} q_k^2} + \frac{1}{\gamma_{k+1}^2 q_k^4}\Big) \\ &= \frac{3\alpha^2}{\gamma_{k+1}} q_k + \frac{3\alpha}{\gamma_{k+1} q_k} + \frac{1}{\gamma_{k+1}^3 q_k^3} \\ &= \frac{3\alpha^2 q_k}{\gamma_{k+1}} + O\Big(\frac{1}{\gamma_{k+1}^2 q_k}\Big). \ \triangleright \end{aligned}$$

Лемма 2.5. *Если* $A_k B_k > 0$, *то в разложении (2.1)* $a_k = a_{k+1} = 1$.

$\triangleleft$ Пусть $A_k B_k > 0$. Тогда, в силу (2.20), (2.21) и (2.22), находим

$$(-1)^{2k-1} b_k q_k \left(\frac{p_k^2}{q_k^2} - b_k \cdot \frac{q_{k-1}}{q_k}\right) > 0,$$

что равносильно неравенству

$$\frac{p_k^2}{q_k^2} - b_k \cdot \frac{q_{k-1}}{q_k} < 0.$$

Отсюда, в силу (2.20) следует, что

$$\frac{p_k^2}{q_k^2} - \frac{1}{\gamma_{k+1}} \left(\frac{p_k^2}{q_k^2} + \frac{p_k}{q_k}\alpha + \alpha^2 \right) \cdot \frac{q_{k-1}}{q_k} < 0$$

или

$$\gamma_{k+1} < \frac{q_k^2}{p_k^2} \left(\alpha^2 + \frac{p_k}{q_k}\alpha + \frac{p_k^2}{q_k^2} + \right) \cdot \frac{q_{k-1}}{q_k}.$$

С учетом

$$\gamma_{k+1} = \alpha_{k+1} + \frac{q_{k-1}}{q_k}$$

из последнего неравенства следует, что

$$\alpha_{k+1} = \gamma_{k+1} - \frac{q_{k-1}}{q_k} \leqslant \frac{q_k^2}{p_k^2} \left(\alpha^2 + \frac{p_k}{q_k} \right) \cdot \frac{q_{k-1}}{q_k} < 2,$$

т. е. $1 < \alpha_{k+1} < 2$, откуда $a_{k+1} = 1$.

Далее, находим, что

$$1 < \frac{q_k^2}{p_k^2} \left(\alpha^2 + \frac{p_k}{q_k}\alpha \right) \cdot \frac{q_{k-1}}{q_k} < 2,$$

т. е.

$$\frac{q_k}{q_{k-1}} < \frac{q_k^2}{p_k^2} \left(\alpha^2 + \frac{p_k}{q_k} \right).$$

Поэтому

$$a_k < \frac{q_k^2}{p_k^2} \left(\alpha^2 + \alpha \cdot \frac{p_k}{q_k} \right) - \frac{q_{k-2}}{q_{k-1}} < 2,$$

и, следовательно, $a_k = 1$. $\rhd$

Лемма 2.6. *Пусть*

$$f_{k-1}(x) = A_{k-1}x^3 + 3B_{k-1}x^2 + 3C_{k-1}x + A_{k-2}.$$

Тогда при $2|(k-1)$ *наименьшее значение этой функции равно*

$$x = b_k = \frac{-B_{k-1} + \sqrt{Dp_{k-1}q_{k-1}}}{A_{k-1}}.$$

При $2 \dagger (k-1)$ *наибольшее значение функции достигается при*

$$x = b_k = \frac{-B_{k-1} - \sqrt{Dp_{k-1}q_{k-1}}}{A_{k-1}}.$$

$\lhd$ Пусть $2|(k-1)$. Тогда $A_{k-1} > 0$, $C_{k-1} > 0$ $A_{k-2} > 0$. Рассмотрим производную функции $f_{k-1}(x)$

$$f'_{k-1}(x) = 3(A_{k-1}x^2 + 2B_{k-1}x + C_{k-1})$$

и приравняем ее к нулю

$$A_{k-1}x^2 + 2B_{k-1}x + C_{k-1} = 0.$$

Учитывая (2.12), находим, что

$$x = b_k = \frac{-B_{k-1} + \sqrt{Dp_{k-1}q_{k-1}}}{A_{k-1}}.$$

Аналогично, при $2 \dagger (k-1)$ будет

$$x = b_k = \frac{-B_{k-1} - \sqrt{Dp_{k-1}q_{k-1}}}{A_{k-1}},$$

таким образом

$$b_k = \frac{(-1)^{k-1}\sqrt{Dp_{k-1}q_{k-1}} - B_{k-1}}{A_{k-1}}. \ \rhd$$

Следствие. $|f_{k-1}(b_k)| > |f_{k-1}(a_k)|$.

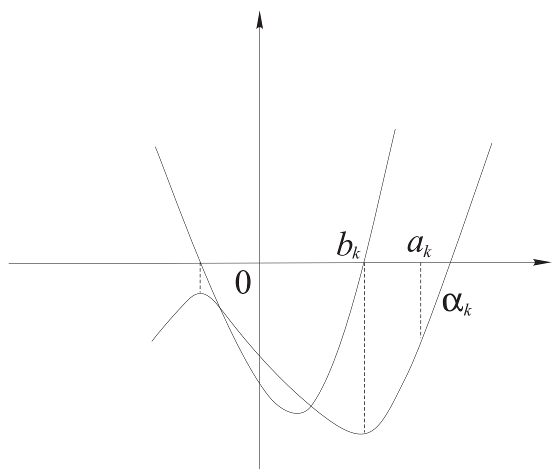

Рис. 1

Лемма 2.7. *Пусть* $\delta > 0$ *— любое число и* $\alpha_{k+1} > 12$. *Тогда, начиная с некоторого* k_0, *при* $k \geqslant k_0$ *выполнено*

$$\left|\frac{f'_{k-1}(a_k)}{f_{k-1}(a_k)}\right| \cdot \frac{1}{|f_{k-1}(a_k)|^\delta} < 1. \tag{2.29}$$

$\triangleleft$ Покажем, что в промежутке $(b_k, a_k]$ имеет место неравенство

$$\left|\frac{f'_{k-1}(x)}{f_{k-1}(x)}\right| \cdot \frac{1}{|f_{k-1}(x)|^\delta} < \frac{x-b_k}{a_k-b_k}.$$

Действительно,

$$\left|\int\limits_{b_k}^{a_k} \left|\frac{f'_{k-1}(x)}{f_{k-1}(x)}\right| \cdot \frac{1}{|f_{k-1}(x)|^\delta} dx\right| = \left|\int\limits_{b_k}^{a_k} \frac{d|f_{k-1}(x)|}{|f_{k-1}(x)|^{1+\delta}}\right|$$

$$= \left|\frac{1}{\delta} \cdot \frac{1}{|f_{k-1}(x)|^\delta}\Big|_{b_k}^{a_k}\right| = \frac{1}{\delta}\left|\frac{1}{(f_{k-1}(a_k))^\delta} - \frac{1}{(f_{k-1}(a_k))^\delta}\right| < \frac{1}{\delta} \cdot \frac{1}{(f_{k-1}(a_k))^\delta},$$

в то время как

$$\int\limits_{b_k}^{a_k} \frac{x-b_k}{a_k-b_k} dx = \left(\frac{x^2}{2(a_k-b_k)} - \frac{b_k x}{a_k-b_k}\right)\Big|_{b_k}^{a_k} = \frac{a_k+b_k}{2} - b_k = \frac{a_k-b_k}{2}.$$

Из (2.16), (1.2) и (2.27) находим, что

$$\begin{aligned} a_k - b_k &= \alpha_k - \frac{1}{\alpha_{k+1}} - b_k = \frac{(-1)^{k-1}(q_{k-1}\alpha^2 + p_{k-1}\alpha) - B_{k-1}}{A_{k-1}} \\ &- \frac{1}{\alpha_{k+1}} - \frac{(-1)^{k-1}\sqrt{Dp_{k-1}q_{k-1}} - B_{k-1}}{A_{k-1}} \\ &= \frac{(-1)^{k-1}(q_{k-1}\alpha^2 + p_{k-1}\alpha) - \sqrt{Dp_{k-1}q_{k-1}}}{A_{k-1}} - \frac{1}{\alpha_{k+1}} \\ &= \frac{q_{k-1}\alpha^2}{|A_{k-1}|} + \frac{p_k\alpha}{|A_{k-1}|} - \frac{\sqrt{D\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}q_{k-1}}}{|A_{k-1}|} - \frac{1}{\alpha_{k+1}}, \end{aligned}$$

откуда, с учетом (2.25), (2.26), (1.10) и (1.11) выводим

$$\begin{aligned}
a_k - b_k &= \frac{q_{k-1}\alpha^2}{\frac{3\alpha^2 q_{k-1}}{\gamma_k} + O\left(\frac{1}{\gamma_k^2 q_{k-1}}\right)} + \frac{\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} \cdot q_{k-1}\alpha}{\frac{3\alpha^2 q_{k-1}}{\gamma_k} + O\left(\frac{1}{\gamma_k^2 q_{k-1}}\right)} \\
&\quad - \frac{\alpha^2\sqrt{1 \pm \frac{1}{\gamma_k^2 q_{k-1}^2}}\, q_{k-1}}{\frac{3\alpha^2 q_{k-1}}{\gamma_k} + O\left(\frac{1}{\gamma_k^2 q_{k-1}}\right)} - \frac{1}{\alpha_{k+1}} \\
&= \frac{1}{3}\gamma_k \cdot \frac{1}{1 + O\left(\frac{1}{\gamma_k q_{k-1}^2}\right)} + \frac{\alpha^2\left(1 \pm \frac{1}{\gamma_k q_{k-1}^2}\right)}{\frac{3\alpha^2}{\gamma_k} q_{k-1} + O\left(\frac{1}{\gamma_k q_{k-1}}\right)} \\
&\quad - \frac{\gamma_k}{3} \cdot \frac{\sqrt{1 \pm \frac{1}{\gamma_k q_{k-1}^2}}}{1 + O\left(\frac{1}{\gamma_k q_{k-1}^2}\right)} - \frac{1}{\alpha_{k+1}} \\
&= \frac{\gamma_k}{3} \cdot \left(\frac{1}{1 + O\left(\frac{1}{\gamma_k q_{k-1}^2}\right)} + \frac{1 \pm \frac{1}{\gamma_k q_{k-1}^2}}{1 + O\left(\frac{1}{\gamma_k q_{k-1}^2}\right)} - \frac{\sqrt{1 \pm \frac{1}{\gamma_k q_{k-1}^2}}}{1 + O\left(\frac{1}{\gamma_k q_{k-1}^2}\right)} \right) - \frac{1}{\alpha_{k+1}} \\
&= \frac{2}{3}\gamma_k - \frac{1}{3}\gamma_k + O(1) - \frac{1}{\alpha_{k+1}} = \frac{1}{3}\gamma_k - \frac{1}{\alpha_{k+1}} + O(1).
\end{aligned}$$

Так как $\gamma_k > 1,\ \alpha_{k+1} > 12$, то $a_k - b_k > \frac{1}{4}$.

Таким образом, неравенство

$$\left| \int_{b_k}^{a_k} \left| \frac{f'_{k-1}(x)}{f_{k-1}(x)} \right| \cdot \frac{1}{|f_{k-1}(x)|^\delta} dx \right| < \frac{1}{\delta} \frac{1}{|f_{k-1}(a_k)|^\delta} < \frac{1}{8} < \frac{a_k - b_k}{2}$$

выполняется начиная с некоторого $k \geqslant k_0$. $\rhd$

Примечание. Если бы

$$\left| \frac{f'_{k-1}(a_k)}{f_{k-1}(a_k)} \right| \cdot \frac{1}{|f_{k-1}(a_k)|^\delta} > 1,$$

то снова имели бы

$$\left| \int_{b_k}^{a_k} \frac{|f'_{k-1}(x)|}{|f_{k-1}(x)|^{1+\delta}} dx \right| < \int_{b_k}^{a_k} \frac{x - a_k}{a_k - b_k} dx,$$

что противоречит оценке определенных интегралов.

Лемма 2.8. *Пусть $A_k \cdot B_k < 0$. Тогда*

$$\gamma_{k+1} < 3\Big|\frac{B_k}{A_k}\Big| + 3. \tag{2.30}$$

◁ В силу (2.17), находим

$$\begin{aligned}\gamma_{k+1} &= \frac{q_k^2\alpha^2 + p_kq_k\alpha + p_k^2}{|A_k|q_k} = \frac{q_k}{|A_k|}\Big(\alpha^2 + \frac{p_k}{q_k}\alpha + \frac{p_k^2}{q_k^2}\Big)\\ &= \frac{q_k}{|A_k|}\left(\alpha^2 + \Big(\alpha \pm \frac{1}{\gamma_{k+1}q_k^2}\Big) + \Big(\alpha + \frac{1}{\gamma_{k+1}q_k^2}\Big)\right)^2\\ &= \frac{3\alpha^2q_k}{|A_k|} \pm \frac{3\alpha}{|A_k|\gamma_{k+1}q_k} + \frac{1}{|A_k|\gamma_{k+1}^2q_k^3}\\ &= \frac{3\alpha^2q_k}{|A_k|} + O\Big(\frac{1}{|A_k|q_k\gamma_{k+1}}\Big).\end{aligned}$$

С другой стороны, из (2.7) следует, что

$$|A_k|q_{k-1} + |B_k|q_k = p_k^2,$$

откуда

$$3\cdot\frac{q_{k-1}}{q_k} + 3\Big|\frac{B_k}{A_k}\Big| = 3\cdot\frac{p_k^2}{q_k^2}\cdot\frac{q_k}{|A_k|}.$$

Но в то же время

$$\begin{aligned}3\cdot\frac{p_k^2}{q_k^2}\cdot\frac{q_k}{|A_k|} &= 3\Big(\alpha \pm \frac{1}{q_k^2\gamma_{k+1}}\Big)^2\cdot\frac{q_k}{|A_k|}\\ &= \frac{3\alpha^2q_k}{|A_k|} \pm \frac{6\alpha}{q_k\gamma_{k+1}|A_k|} + \frac{3}{q_k^3\gamma_{k+1}^2|A_k|}\\ &= \frac{3\alpha^2q_k}{|A_k|} + O\Big(\frac{1}{|A_k|q_k\gamma_{k+1}}\Big) = \gamma_{k+1}.\end{aligned}$$

Таким образом, $\gamma_{k+1} < 3\Big|\frac{B_k}{A_k}\Big| + 3$. ▷

Лемма 2.9. *Имеет место предельное соотношение*

$$\lim_{k\to\infty}|A_k| = \infty.$$

◁ Следует из равенств (2.7)–(2.15). ▷

3. Основные результаты

Теорема 3.1. *Пусть* $\alpha = \sqrt[3]{D}$, $\deg\alpha = 3$, $D \in \mathbb{N}$, *а* δ *— любое положительное число. Тогда неравенство*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^{2+\delta}} \tag{3.1}$$

имеет лишь конечное число решений в числах $p, q \in \mathbb{N}$.

$\lhd$ Пусть $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots]$ — разложение числа α в цепную дробь, и его многочлены имеют вид:

$$f_k(x) = \sum_{i=0}^{3} C_3^i (Dq_k^{3-i} q_{k-1}^i - p_k^{3-i} p_{k-1}^i) x^{3-i} = A_k x^3 + 3B_k x^2 + 3C_k x + A_{k-1},$$

$$\begin{aligned} f_k(x) &= \sum_{i=0}^{3} \frac{1}{i!} f_{k-1}^{(i)}(a_k) x^{3-i} \\ &= f_{k-1}(a_k)x^3 + f'_{k-1}(a_k)x^2 + \frac{f''_{k-1}(x)}{2!}x^2 + \frac{1}{3} f'''_{k-1}(a_k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots. \end{aligned}$$

Предположим, что $\frac{p}{q} \neq \frac{p_n}{q_n}$. Тогда, в силу [4] верно

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{2q^2} > \frac{1}{q^{2+\delta}}.$$

Пусть $\frac{p}{q} = \frac{p_k}{q_k}$. Из (1.11) получаем

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| = \frac{1}{\gamma_{k+1} q_k^2}.$$

Очевидно, что $f_k(\alpha_{k+1}) = 0$. Если $A_k B_k > 0$, то, в виду леммы 2.5 будет $a_{k+1} = 1$ и, следовательно,

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| = \frac{1}{\gamma_{k+1} q_k^2} > \frac{1}{3q_k^2} > \frac{1}{q_k^{2+\delta}}.$$

Поэтому будем считать, что $A_k B_k < 0$. Из (2.20), (2.29) и (2.3) следует, что

$$\gamma_{k+1} < 3\left|\frac{B_k}{A_k}\right| + 3 = \left|\frac{f'_{k-1}(a_k)}{f_{k-1}(a_k)}\right| + 3 < |f_{k-1}(a_k)|^{\delta} + 3,$$

откуда, пользуясь (2.25) и (2.26) выводим

$$\gamma_{k+1} < |f_{k-1}(a_k)|^\delta + 3 = |A_k|^\delta + 3 = \left(\frac{3\alpha^2 q_k}{\gamma_{k+1}} + O\Big(\frac{1}{\gamma_{k+1}^2 q_k}\Big)\right)^\delta + 3 < q_k^\delta,$$

так как $\left(\frac{3\alpha^2}{\gamma_{k+1}}\right)^\delta < 1.$

(В случае $\left(\frac{3\alpha^2}{\gamma_{k+1}}\right)^\delta > 1$, т. е. $\gamma_{k+1} < (3\alpha^2)^\delta$ теорема также выполняется, так как

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| = \frac{1}{\gamma_{k+1} q_k^2}, \qquad \frac{1}{(3\alpha^2)^\delta q_k^2} > \frac{1}{q_k^{2+\delta}},$$

начинается с некоторого $k \geqslant k_0$.) $\triangleright$

Лемма 3.1. *Имеет место неравенство*

$$\left|\frac{f'_{k-1}(a_k)}{f_{k-1}(a_k)}\right| \cdot \frac{1}{\ln^{1+\delta}|f_{k-1}(a_k)|} < 1. \tag{3.2}$$

$\triangleleft$ Покажем, что в промежутке $(b_k, a_k]$ имеет место неравенство

$$\left|\frac{f'_{k-1}(x)}{f_{k-1}(x)}\right| \cdot \frac{1}{\ln^{1+\delta}|f_{k-1}(x)|} < \frac{x - b_k}{a_k - b_k}.$$

В самом деле,

$$\left|\int_{b_k}^{a_k} \left|\frac{f'_{k-1}(x)}{f_{k-1}(x)}\right| \cdot \frac{1}{\ln^{1+\delta}|f_{k-1}(x)|} dx\right| = \left|\int_{b_k}^{a_k} \frac{d\ln|f_{k-1}(x)|}{\ln^{1+\delta}|f_{k-1}(x)|}\right|$$
$$= \frac{1}{\delta}\left|\frac{1}{\ln^{\delta}|f_{k-1}(a_k)|} - \frac{1}{\ln^{\delta}|f_{k-1}(b_k)|}\right| < \frac{1}{\delta} \cdot \frac{1}{\ln^{\delta}|f_{k-1}(a_k)|}.$$

Воспользовавшись леммой (2.7), находим

$$\int_{b_k}^{a_k} \frac{x - b_k}{a_k - b_k} dx = \frac{a_k - b_k}{2} > \frac{1}{8}.$$

Таким образом,

$$\left|\int_{b_k}^{a_k} \left|\frac{f'_{k-1}(x)}{f_{k-1}(x)}\right| \cdot \frac{1}{\ln^{1+\delta}|f_{k-1}(x)|} dx\right| < \int_{b_k}^{a_k} \frac{x - b_k}{a_k - b_k} dx.$$

(В противном случае, т. е. если бы

$$\left|\frac{f'_{k-1}(a_k)}{f_{k-1}(a_k)}\right| \cdot \frac{1}{\ln^{1+\delta}|f_{k-1}(a_k)|} > 1,$$

мы имели бы

$$\left|\int_{b_k}^{a_k} \left|\frac{f'_{k-1}(x)}{f_{k-1}(x)}\right| \cdot \frac{1}{\ln^{1+\delta}|f_{k-1}(x)|} dx\right| > \int_{b_k}^{a_k} \frac{x-b_k}{a_k-b_k} dx,$$

что противоречит оценке определенных интегралов). $\triangleright$

Теорема 3.2. *Пусть $\alpha = \sqrt[3]{D}$ — алгебраическая иррациональность третьей степени, δ — любое положительное число. Тогда неравенство*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2 \ln^{1+\delta} q}$$

имеет лишь конечное число решений в числах p, $q \in \mathbb{N}$.

$\triangleleft$ Предположим, что $\frac{p}{q} \neq \frac{p_n}{q_n}$. Тогда

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{2q^2} > \frac{1}{q^2 \ln^{1+\delta} q},$$

начиная с некоторого $q \geqslant q_0$.

Пусть $\frac{p}{q} = \frac{p_k}{q_k}$. Если $A_k B_k > 0$, то в виду леммы 2.5, $a_{k+1} = 1$ и, следовательно,

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| = \frac{1}{\gamma_{k+1} q_k^2} > \frac{1}{3q_k^2} > \frac{1}{q_k^2 \ln^{1+\delta} q_k},$$

начиная с некоторого $q \geqslant q_1$.

Предположим теперь, что $A_k B_k < 0$. В силу (2.20), (3.2), (2.25) и (2.26) получим

$$\begin{aligned}\gamma_{k+1} &< 3\left|\frac{B_k}{A_k}\right| + 3 = \left|\frac{f'_{k-1}(a_k)}{f_{k-1}(a_k)}\right| + 3 < \ln^{1+\delta}|f_{k-1}(a_k)| + 3 \\ &= \ln^{1+\delta}|A_k| + 3 = \ln^{1+\delta}\left(\frac{3\alpha^2 a_k}{\gamma_{k+1}} + O\Big(\frac{1}{\gamma_{k+1}^2 q_k}\Big)\right) + 3 < \ln^{1+\delta} q_k,\end{aligned}$$

так как $\frac{3\alpha^2}{\gamma_{k+1}} < 1$.

(В случае, когда $\frac{3\alpha^2}{\gamma_{k+1}} > 1$, т. е. $\gamma_{k+1} < 3\alpha^2$ теорема 3.2 выполняется). $\triangleright$

Литература

1. *Ленг С.* Введение в теорию диофантовых приближений —М.: Мир, 1970.—103 с.
2. *Тасоев Б. Г.* О рациональных приближениях к некоторым бесконечным цепным дробям.—МПГУ, Москва, Автореф. дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук, 1997.
3. *Фельдман Н. И.* Приближения алгебраических чисел.—М.: МГУ, 1982.—311 с.
4. *Хинчин А. Я.* Цепные дроби.—М.: Наука, 1978.—112 с.
5. *Шидловский А. Б.* Диофантовы приближения и трансцендентные числа.—М.: МГУ, 1982.—264 с.
6. *Шмидт В.* Диофантовы приближения.—М.: Мир, 1983.—228 с.

г. Цхинвал

Статья поступила 23 августа 2001г.