Владикавказский математический журнал
Июнь–сентябрь, 2001, Том 3, Выпуск 3

УДК **511.3**

О НАИЛУЧШИХ РАЦИОНАЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЯХ К ТРАНСЦЕНДЕНТНЫМ ЧИСЛАМ $\psi(x)\cdot e^x$. II

Б. Г. Тасоев

Работа служит продолжением предыдущей статьи автора и посвящена дальнейшему развитию предложенного им метода. При использовании данного метода отпадает нужда в явном представлении числителей и знаменателей подходящих дробей и, как следствие, расширяется класс чисел, для которых удается получить точные оценки.

Настоящая работа является продолжением статьи [5] и посвящена дальнейшим приложениям развитого там метода [4]. Необходимые сведения из теории чисел и цепных дробей имеются в [1–3], [6–8]. Отметим, что данная работа вместе с [5] уточняют и развивают некоторые результаты из [9–15]; подробнее об этом уже сказано в [5].

1. О разложении чисел вида $ae^{\frac{1}{a}}, a^{-1}e^{\frac{1}{a}}, be^{\frac{1}{a}}, bc^{-1}e^{\frac{1}{a}}, e^{\frac{1}{a}}+bc^{-1}$

Теорема 1.1. *Пусть $a\in\mathbb{N}, a>1$. Имеют место разложения*

$$ae^{\frac{1}{a}} = [a+1;\overline{2a-1,2n+2,1}]_{n=0}^{\infty}, \tag{1.1}$$

$$a^{-1}e^{\frac{1}{a}} = [0;a-1,2a,\overline{1,2n+2,2a-1}]_{n=0}^{\infty}. \tag{1.2}$$

$\lhd$ Как известно [7],

$$e^x = 1+\cfrac{x}{1-\cfrac{x}{2+\cfrac{x}{3-\cfrac{x}{2+\cfrac{x}{5-\dots}}}}}.$$

Положим $x=a^{-1}$ и умножим обе части последнего равенства на a

$$ae^{\frac{1}{a}} = a+\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{2a+\cfrac{1}{3-\cfrac{1}{2a+\cfrac{1}{5-\dots}}}}}.$$

Получим

$$\gamma_0 = a + \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{2a + \cfrac{1}{\gamma_1}}} = a + \frac{2a\gamma_1 + 1}{(2a-1)\gamma_1 + 1} = [a+1; 2a-1, \gamma_1],$$

$$\gamma_1 = 3 - \cfrac{1}{2a + \cfrac{1}{\gamma_2}} = \frac{(6a-1)\gamma_2 + 3}{2a\gamma_2 + 1} = [2; 1, 2a-1, \gamma_2].$$

Предположим, что для γ_{n-1} выполняется равенство

$$\gamma_{n-1} = [2n-2; 1, 2a-1, \gamma_n].$$

Тогда

$$\gamma_n = 2n + 1 - \cfrac{1}{2a + \cfrac{1}{\gamma_{n+1}}} = \frac{((2n+1)\cdot 2a - 1)\,\gamma_{n+1} + (2n+1)}{2a\gamma_n + 1}$$
$$= [2n; 1, 2a-1, \gamma_{n+1}],$$

и, следовательно, по индукции равенство (1.1) верно.

Аналогично доказывается равенство (1.2). $\triangleright$

Следующая теорема дает разложения в арифметические цепные дроби чисел вида $be^{\frac{1}{a}}, b^{-1}e^{\frac{1}{a}}, \frac{b}{c}e^{\frac{1}{a}} (a, b, c \in \mathbb{Z})$.

Теорема 1.2. *Имеют место разложения*

$$4e^{\frac{1}{10}} = [4; \overline{2+10n, 2, 1, 1, 1, 6+10n, 1, 7}]_{n=0}^{\infty}, \tag{1.3}$$

$$\frac{1}{5}e^{\frac{1}{10}} = [0; 4, 1, \overline{1+4n, 9, 1}]_{n=0}^{\infty}, \tag{1.4}$$

$$\frac{2}{5}e^{\frac{1}{10}} = [0; 2, 3, 1, 4, 2, 2, 1, 1, 4, 2, \overline{4+4n, 1, 1, 4, 6+4n, 1, 1, 4, 2,}]_{n=0}^{\infty}. \tag{1.5}$$

$\triangleleft$ Воспользовавшись разложением (1.11) из [5], получим

$$4e^{\frac{1}{10}} = \left[4; \frac{9}{4}, 4, \frac{1}{4}, 116, \frac{1}{4}, 4, \frac{49}{4}, 4, \frac{1}{4}, 276, \frac{1}{4}, 4, \frac{89}{4}, 4, \frac{1}{4}, 436, \frac{1}{4}, \ldots\right].$$

Вычислим

$$\gamma_0 = \left[4; \frac{9}{4}, 4, \frac{1}{4}, 116, \frac{1}{4}, \gamma_1\right] = [4; 2, 2, 1, 1, 1, 6, 1, \gamma_1 + 3],$$

$$\gamma_1+3=[7;12,2,1,1,1,16,1,\gamma_2+3],\quad \gamma_2+3=[7;22,2,1,1,1,26,1,\gamma_3+3].$$

Предположим, что

$$\gamma_{n-1}+3=[7;2+10(n-1),2,1,1,1,6+10(n-1),1,\gamma_n+3],$$

$$\begin{aligned}\gamma_n+3&=\Big[4;\frac{40n+9}{4},4,\frac{1}{4},160n+116,\frac{1}{4},\gamma_{n+1}\Big]+3\\&=[7;2+10n,2,1,1,1,6+10n,1,\gamma_{n+1}],\end{aligned}$$

и, следовательно, верно равенство (1.3).

Для доказательства разложения (1.4) воспользуемся разложением (1.1). Получим

$$\frac{1}{5}e^{\frac{1}{10}}=\Big[0;\frac{9}{2},40,\frac{1}{2},4,\frac{19}{2},2,2,38,\frac{1}{2},12,\frac{19}{2},2,4,38,\frac{1}{2},20,\frac{29}{2},2,\dots\Big].$$

Далее находим, что

$$\gamma_0=\Big[0;\frac{9}{2},40,\frac{1}{2},4,\gamma_1\Big]=\frac{124\gamma_1+21}{561\gamma_1+95}=[0;4,1,1,9,1,5,\gamma_1],$$

$$\gamma_1=\Big[\frac{19}{2};2,2,38,\frac{1}{2},12,\gamma_2\Big]=\frac{13901\gamma_2+1000}{1404\gamma_2+101}=[9;1,9,9,1,13,\gamma_2].$$

Предположим, что верно равенство γ_n. Тогда

$$\gamma_{n+1}=\Big[\frac{19}{2};2,2+n,38,\frac{1}{2},12+4n,\gamma_{n+2}\Big]=[9;1,9+4n,9,1,13+4n,\gamma_{n+2}].$$

Следовательно, по индукции верно (1.4).

Путем разложения находим, что

$$\frac{2}{5}e^{\frac{1}{10}}=\Big[0;2,2,\frac{1}{2},18,\frac{1}{2},10,\frac{9}{2},2,\frac{9}{2},18,\frac{1}{2},26,\frac{9}{2},2,\dots\Big],$$

$$\gamma_0=\Big[0;2,2,\frac{1}{2},18,\frac{1}{2},10,\frac{9}{2},2,\gamma_1\Big]=[0;2,3,1,4,2,2,1,1,4,2,\gamma_1],$$

$$\gamma_1=\Big[\frac{9}{2};18,\frac{1}{2},26,\frac{9}{2},2,\gamma_2\Big]=[4;1,1,4,2,6,1,1,4,2,\gamma_2].$$

По индукции приходим к заключению

$$\gamma_n=\Big[\frac{1+8n}{2},18,10+16n,\frac{9}{2},2,\gamma_{n+1}\Big]=[4n;1,1,4,4n+2,1,1,4,2,\gamma_{n+1}].$$

Таким образом, находим, что

$$\begin{aligned}\frac{2}{5}e^{\frac{1}{10}}=&[0;2,3,1,4,2,2,1,1,4,2,\gamma_1]\\=&[0;2,3,1,4,2,2,1,1,4,2,4,1,1,4,6,1,1,4,2,8,1,1,4,10,\\&\ 1,1,4,2,12,1,1,4,1,4,1,1,4,2,\dots]\\=&[0;2,3,1,4,2,2,1,1,4,2,\overline{4+4n,1,1,4,6+4n,1,1,4,2,}]_{n=0}^{\infty}.\end{aligned}$$

Теорема доказана. $\triangleright$

Задача о разложении $e^{\frac{1}{a}}+\frac{b}{c}$ решается аналогичным образом.

Теорема 1.3. *Имеет место разложение*

$$e^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}=[2;6,1,\overline{2,1,1,1,1+2n,7,3+2n}]_{n=0}^{\infty}. \tag{1.6}$$

$\lhd$ В силу разложения (1.11) из [5]

$$e^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}=[1;1,1,1,5,1,1,9,1,1,13,1,1,17,1,1,\dots]+\frac{1}{2}.$$

Вычислим

$$\begin{aligned}\gamma_0=[1;1,1,1,5,1,1,\gamma_1]+\frac{1}{2}=\frac{61\gamma_1+33}{37\gamma_1+20}+\frac{1}{2}&=\frac{159\gamma_1+86}{74\gamma_1+40}\\ &=\Big[2;6,1,2,1,1,1,\frac{\gamma_1-2}{4}\Big],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_1=&[9;1,1,13,1,1,\gamma_2]=\frac{533\gamma_2+276}{56\gamma_2+29},\\ \frac{\gamma_1-2}{4}=&\frac{421\gamma_2+218}{224\gamma_2+116}=\Big[1;1,7,3,2,1,1,1,\frac{\gamma_2-2}{4}\Big].\end{aligned}$$

Предположим, что утверждение верно для γ_n. Рассмотрим его для γ_{n+1}

$$\gamma_{n+1}=[8n+9;1,1,8n+13,1,1,\gamma_{n+2}]\quad(n=0,1,2,\dots).$$

Вычислим

$$\begin{aligned}\frac{\gamma_{n+1}-2}{4}&=\frac{1}{4}\cdot\frac{(256n^2+752n+533)\gamma_{n+2}+(128n^2+384n+276)}{(37n+56)\gamma_{n+2}+(16n+29)}-\frac{1}{2}\\ &=\frac{(256n^2+688n+421)\gamma_{n+2}+(128n^2+352n+218)}{(128n+224)\gamma_{n+2}+(64n+116)}\\ &=\Big[2n+1;1,7,2n+3,2,1,1,1,\frac{\gamma_{n+2}-2}{4}\Big].\end{aligned}$$

Следовательно, согласно принципу математической индукции, получим

$$\begin{aligned}\sqrt{e}+\frac{1}{2}&=[2;6,1,2,1,1,1,1,1,7,3,2,1,1,1,3,1,7,5,2,1,1,1,5,1,7,7,2,1,1,1,\dots]\\ &=[2;6,1,\overline{2,1,1,1,2n+1,1,7,2n+3}]_{n=0}^{\infty}.\end{aligned}$$

Определим теперь наилучшие рациональные приближения к числам (1.1)–(1.6).

Теорема 1.4. *Пусть α — цепная дробь из равенств (1.1)–(1.6). Тогда для любого $\varepsilon > 0$ неравенство*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < (c+\varepsilon)\frac{\ln\ln q}{q^2 \ln q}$$

имеет бесконечно много решений в целых числах p, q.

Существует число $q' = q(\varepsilon)$ такое, что

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > (c-\varepsilon)\frac{\ln\ln q}{q^2 \ln q}$$

для всех целых p, q, где $q \geq q'(\varepsilon)$.

При этом

1) *при* $\alpha = ae^{\frac{1}{a}}$ $c = \frac{1}{2}$, 2) *при* $\alpha = \frac{1}{a}e^{\frac{1}{2}}$ $c = \frac{1}{2}$, 3) *при* $\alpha = 4e^{\frac{1}{10}}$ $c = \frac{1}{5}$,
4) *при* $\alpha = \frac{1}{5}e^{\frac{1}{10}}$ $c = \frac{1}{4}$, 5) *при* $\alpha = \frac{2}{5}e^{\frac{1}{10}}$ $c = \frac{1}{2}$, 6) *при* $\alpha = e^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}$ $c = 1$.

2. О разложении чисел вида $ae^{\frac{2}{2a+1}}, a^{-1}e^{\frac{2}{2a+1}}, \frac{b}{c}e^{\frac{2}{2a+1}}, \frac{be^{\frac{2}{2a+1}}+c}{me^{\frac{2}{2a+1}}+n}, e^{\frac{2}{2a+1}} + \frac{b}{c}$

Теорема 2.1. *Пусть $a \in \mathbb{N}, 2\dagger a, a \geq 3$. Тогда имеют место разложения*

$$ae^{\frac{2}{a}} = \left[a+2; \overline{\frac{a-1}{2}, 5+12n, 1, \frac{a-3}{2}, 1, 1, 1+3n, 1, 2a-1, 3+3n, 2}\right]_{n=0}^{\infty}. \quad (2.1)$$

При $a = 3$

$$3e^{\frac{2}{3}} = [5; \overline{1, 5+12n, 2, 1, 1+3n, 1, 5, 3+3n, 2}]_{n=0}^{\infty}. \quad (2.2)$$

$\lhd$ Рассмотрим разложение

$$e^x = 1 + \cfrac{x}{1 - \cfrac{x}{2 + \cfrac{x}{3 - \cfrac{x}{2 + \cfrac{x}{5 - \ldots}}}}}.$$

Положим $x = \frac{2}{a}, 2\dagger a$,

$$e^{\frac{2}{a}} = 1 + \cfrac{2}{a - \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3a - \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5a - \ldots}}}}}.$$

Умножим обе части последнего равенства на a

$$ae^{\frac{2}{a}} = a + \cfrac{2}{1 - \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{3 - \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{5 - \ldots}}}}}.$$

Отсюда находим, что

$$\gamma_0 = a + \cfrac{2}{1 - \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{\gamma_1}}} = a + \frac{2a\gamma_1 + 2}{(a-1)\gamma_1 + 1} = \left[a+2; \frac{a-1}{2}, 2\gamma_1\right],$$

$$\gamma_1 = 3 - \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{\gamma_2}} = \frac{(3a-1)\gamma_2 + 3}{a\gamma_2 + 1},$$

$$2\gamma_1 = \frac{(6a-2)\gamma_2 + 6}{a\gamma_2 + 1} = \left[5; 1, \frac{a-3}{2}, 1, 1, \frac{\gamma_2 - 1}{2}\right],$$

$$\gamma_2 = 5 - \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{\gamma_3}} = \frac{(5a-1)\gamma_3 + 5}{a\gamma_3 + 1},$$

$$\frac{\gamma_2 - 1}{2} = \frac{(4a-1)\gamma_3 + 4}{2a\gamma_3 + 2} = \left[1; 1, 2a-1, \frac{\gamma_3}{2}\right],$$

$$\gamma_3 = 7 - \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{\gamma_4}} = \frac{(7a-1)\gamma_4 + 7}{a\gamma_4 + 1},$$

$$\frac{\gamma_3}{2} = \frac{(7a-1)\gamma_4 + 7}{2a\gamma_4 + 2} = \left[3; 2, \frac{a-1}{2}, 2\gamma_4\right],$$

$$\gamma_4 = 9 - \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{\gamma_5}} = \frac{(9a-1)\gamma_5 + 9}{a\gamma_5 + 1},$$

$$2\gamma_4 = \frac{(18a-2)\gamma_5 + 18}{a\gamma_5 + 1} = \left[17; 1, \frac{a-3}{2}, 1, 1, \frac{\gamma_5 - 1}{2}\right].$$

Предположим, что верны условия для $\gamma_{3n-2}, \gamma_{3n-1}, \gamma_{3n}$. Тогда

$$\gamma_{3n+1} = 6n + 3 - \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{\gamma_{3n+2}}} = \frac{(6an + 3a - 1)\gamma_{3n+2} + (6n+3)}{a\gamma_{3n+2} + 1},$$

$$2\gamma_{3n+1} = \frac{(12an+6a-2)\gamma_{3n+2}+(12n+6)}{a\gamma_{3n+2}+1} = \left[12n+5; 1, \frac{a-3}{2}, 1, 1, \frac{\gamma_{3n+2}-1}{2}\right],$$

$$\gamma_{3n+2} = 6n+5-\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{\gamma_{3n+3}}} = \frac{(6an+5a-1)\gamma_{3n+3}+(6n+5)}{a\gamma_{3n+3}+1},$$

$$\frac{\gamma_{3n+2}-1}{2} = \frac{(6an+4a-1)\gamma_{3n+3}+(6n+4)}{2a\gamma_{3n+3}+2} = \left[3n+1; 1, 2a-1, \frac{\gamma_{3n+3}}{2}\right],$$

$$\gamma_{3n+3} = 6n+7-\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{\gamma_{3n+4}}} = \frac{(6an+7a-1)\gamma_{3n+4}+(6n+7)}{a\gamma_{3n+4}+1},$$

$$\frac{\gamma_{3n+3}}{2} = \frac{(6an+7a-1)\gamma_{3n+3}+(6n+7)}{2a\gamma_{3n+4}+2} = \left[3n+3; 2, \frac{a-1}{2}, 2\gamma_{3n+4}\right].$$

Отсюда, по индукции, следует, что

$$ae^{\frac{2}{a}} = \left[a+2; \frac{a-1}{2}, \overline{5+12n, 1, \frac{a-3}{2}, 1, 1, 1+3n, 1, 2a-1, 3+3n, 2, \frac{a-1}{2}}\right]_{n=0}^{\infty},$$

и равенство (2.1) доказано.

Аналогично докажем (2.2). В самом деле,

$$3e^{\frac{2}{3}} = 3+\cfrac{2}{1-\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3-\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{5-\cfrac{1}{3+\dots}}}}}}.$$

Находим

$$\gamma_0 = 3+\cfrac{2}{1-\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{\gamma_1}}} = \frac{12\gamma_1+5}{2\gamma_1+1} = [5; 1, 2\gamma_1];$$

$$\gamma_1 = 3-\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{\gamma_2}} = \frac{8\gamma_2+3}{3\gamma_2+1}; \quad 2\gamma_1 = \frac{16\gamma_2+6}{3\gamma_2+1} = \left[5; 2, 1, \frac{\gamma_2-1}{2}\right];$$

$$\gamma_2 = 5-\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{\gamma_3}} = \frac{14\gamma_3+5}{3\gamma_3+1}; \quad \frac{\gamma_2-1}{2} = \frac{11\gamma_3+4}{6\gamma_3+2} = \left[1; 1, 5, \frac{\gamma_3}{2}\right];$$

$$\gamma_3 = 7 - \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{\gamma_4}} = \frac{20\gamma_4 + 7}{3\gamma_4 + 1}; \quad \frac{\gamma_3}{2} = \frac{20\gamma_4 + 7}{6\gamma_4 + 2} = [3; 2, 1, 2\gamma_4].$$

Предположим, что верны условия для $\gamma_{3n-2}, \gamma_{3n-1}, \gamma_{3n}$. Тогда

$$\gamma_{3n+1} = 6n + 3 - \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{\gamma_{3n+2}}} = \frac{(18n+8)\gamma_{3n+2} + (6n+3)}{3\gamma_{3n+2} + 1},$$

$$2\gamma_{3n+1} = \frac{(36n+16)\gamma_{3n+2} + (12n+6)}{3\gamma_{3n+2} + 1} = \left[12n + 5; 2, 1, \frac{\gamma_{3n+2} - 1}{2}\right],$$

$$\gamma_{3n+2} = 6n + 5 - \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{\gamma_{3n+3}}} = \frac{(18n+14)\gamma_{3n+3} + (6n+5)}{3\gamma_{3n+3} + 1},$$

$$\frac{\gamma_{3n+2} - 1}{2} = \frac{(18n+11)\gamma_{3n+3} + (6n+4)}{6\gamma_{3n+3} + 2} = \left[3n + 1; 1, 5, \frac{\gamma_{3n+3}}{2}\right],$$

$$\gamma_{3n+3} = 6n + 7 - \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{\gamma_{3n+4}}} = \frac{(18n+20)\gamma_{3n+4} + (6n+7)}{3\gamma_{3n+4} + 1},$$

$$\frac{\gamma_{3n+3}}{2} = \frac{(18n+20)\gamma_{3n+3} + (6n+7)}{6\gamma_{3n+4} + 2} = [3n + 3; 2, 1, 2, \gamma_{3n+4}],$$

откуда, по индукции, следует, что

$$3e^{\frac{2}{3}} = [5; 1, \overline{5 + 12n, 2, 1, 1 + 3n, 1, 5, 3 + 3n, 2, 1}]_{n=0}^{\infty},$$

т. е. верно равенство (2.2).

Теорема 2.2. *Пусть $a \in \mathbb{N}, 2 \dagger a, a > 3$. Тогда имеет место разложение*

$$\frac{1}{a}e^{\frac{2}{a}} = \Big[0; a - 2, \frac{a-2}{2}, \overline{1, 5 + 12n, \frac{a-1}{2}, 2,} \\ \overline{2 + 3n, 2a - 1, 1, 2 + 3n, 1, 1, \frac{a-3}{2}}\Big]_{n=0}^{\infty}. \tag{2.3}$$

При $a = 3$ имеет место разложение

$$\frac{1}{3}a^{\frac{2}{3}} = [0; 1, 1, 1, \overline{5 + 12n, 1, 2, 2 + 3n, 5, 1, 2 + 3n, 1, 2}]_{n=0}^{\infty}. \tag{2.4}$$

$\lhd$ Используя разложение (1.3) из [5]

$$e^{\frac{2}{a}} = 1 + \cfrac{2}{a - \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3a - \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5a - \ldots}}}}},$$

получаем

$$\frac{1}{a} e^{\frac{2}{a}} = \frac{1}{a} + \cfrac{2}{a^2 - \cfrac{a}{1 + \cfrac{1}{3a - \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5a - \ldots}}}}},$$

откуда находим, что

$$\gamma_0 = \frac{1}{a} + \cfrac{2}{a^2 - \cfrac{a}{1 + \cfrac{1}{\gamma_1}}} = \frac{(a+1)\gamma_1 + (a+2)}{(a^2 - a)\gamma_1 + a^2} = \Big[0; a-2, \frac{a-1}{2}, 1, \frac{2\gamma_1 - (a-4)}{a}\Big];$$

$$\gamma_1 = 3a - \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\gamma_2}} = \frac{(3a-1)\gamma_2 + 3a}{\gamma_2 + 1};$$

$$\frac{2\gamma_2 - (a-4)}{a} = \frac{(5a+2)\gamma_2 + (5a+4)}{a\gamma_2 + a} = \Big[5; \frac{a-1}{2}, 2, \frac{\gamma_2 - (a-2)}{2}\Big];$$

$$\gamma_2 = 5a - \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\gamma_3}} = \frac{(5a-1)\gamma_3 + 5a}{\gamma_3 + 1};$$

$$\frac{\gamma_2 - (a-2)}{2} = \frac{(4a+1)\gamma_3 + (4a+2)}{2a\gamma_3 + 2a} = \Big[2; 2a-1, 1, \frac{\gamma_3 - (2a-2)}{2a}\Big];$$

$$\gamma_3 = 7a - \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\gamma_4}} = \frac{(7a-1)\gamma_4 + 7a}{\gamma_4 + 1};$$

$$\frac{\gamma_3 - (2a-2)}{2a} = \frac{(5a+1)\gamma_4 + (5a+2)}{2a\gamma_4 + 2a} = \Big[2; 1, 1, \frac{a-3}{2}, 1, \frac{2\gamma_4 - (a-4)}{a}\Big].$$

Предположим, что верны условия для $\gamma_{3n-2}, \gamma_{3n-1}, \gamma_{3n}$. Тогда

$$\gamma_{3n+1} = (3+6n)a - \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\gamma_{3n+2}}} = \frac{(6an + 3a - 1)\gamma_{3n+2} + (6an + 3a)}{\gamma_{3n+2} + 1};$$

$$\frac{2\gamma_{3n+1}-(a-4)}{a}=\frac{(12an+5a+2)\gamma_{3n+2}+(12an+5a+4)}{a\gamma_{3n+2}+a}$$
$$=\left[12n+5;\frac{a-1}{2},2,\frac{\gamma_{3n+2}-(a-2)}{2a}\right];$$

$$\gamma_{3n+2}=5a+6an-\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\gamma_{3n+3}}}=\frac{(6an+5a-1)\gamma_{3n+3}+(6an+5a)}{\gamma_{3n+3}+1};$$

$$\frac{\gamma_{3n+2}-(a-2)}{2a}=\frac{(6an+4a+1)\gamma_{3n+3}+(6an+4a+2)}{2a\gamma_{3n+3}+2a}$$
$$=\left[3n+2;2a-1,1,\frac{\gamma_{3n+3}-(2a-2)}{2a}\right];$$

$$\gamma_{3n+3}=7a+6an-\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\gamma_{3n+4}}}=\frac{(6an+7a-1)\gamma_{3n+4}+(6an+7a)}{\gamma_{3n+4}+1};$$

$$\frac{\gamma_{3n+3}-(2a-2)}{2a}=\frac{(6an+5a+1)\gamma_{3n+4}+(6an+5a+2)}{2a\gamma_{3n+4}+2a}$$
$$=\left[3n+2;1,1,\frac{a-3}{2},1,\frac{2\gamma_{3n+4}-(a-4)}{2}\right].$$

откуда по индукции следует (2.3).

Покажем справедливость (2.4). Воспользовавшись равенством

$$\frac{1}{3}e^{\frac{2}{3}}=\frac{1}{3}+\cfrac{2}{9-\cfrac{3}{1+\cfrac{1}{9-\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{15-\cfrac{1}{1+\dots}}}}}},$$

находим

$$\gamma_0=\frac{1}{3}+\cfrac{2}{9-\cfrac{3}{1+\cfrac{1}{\gamma_1}}}=\frac{4\gamma_1+15}{6\gamma_1+9}=\left[0;1,1,1,\frac{2\gamma_1+1}{3}\right];$$

$$\gamma_1=9-\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\gamma_2}}=\frac{8\gamma_2+9}{\gamma_2+1};$$

$$\frac{2\gamma_1+1}{3}=\frac{17\gamma_2+19}{3\gamma_2+3}=\Big[5;1,2,\frac{\gamma_2-1}{6}\Big];$$

$$\gamma_2=15-\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\gamma_3}}=\frac{14\gamma_3+15}{\gamma_3+1};$$

$$\frac{\gamma_2+1}{6}=\frac{13\gamma_3+14}{6\gamma_3+6}=\Big[2;5,1,\frac{\gamma_3-4}{6}\Big];$$

$$\gamma_3=21-\frac{\gamma_4}{\gamma_4+1}=\frac{20\gamma_4+21}{\gamma_4+1},$$

$$\frac{\gamma_3-4}{6}=\frac{16\gamma_4+17}{6\gamma_4+6}=\Big[2;1,2,\frac{2\gamma_4+1}{3}\Big],$$

что, по индукции, влечет справедливость (2.4). $\triangleright$

Покажем теперь, что имеют место разложения для чисел вида $e^{\frac{2}{a}}+\frac{m}{n}$.

Теорема 2.3. *Имеет место разложение*

$$\begin{aligned} e^{\frac{2}{3}}+\frac{1}{3}=\Big[&2;3,1,1,3,1,4,1,1,3,3,\overline{1,1,5+8n,2,4,1+2n,1,1,1,1,2,1,}\\ &\overline{1+2n,2,4,9+8n,1,3,1,1,2+2n,3,1,1,2,2+2n,1,3}\Big]_{n=0}^{\infty}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

$\triangleleft$ И вновь применим разложение (1.13) из [5]

$$\begin{aligned} e^{\frac{2}{3}}+\frac{1}{3}=\Big[&1;\frac{1}{2},1,1,\frac{7}{2},1,1,\frac{13}{2},1,1,\frac{19}{2},1,1,\frac{25}{2},1,1,\\ &\frac{31}{2},1,1,\frac{37}{2},1,1,\frac{43}{2},1,1,\frac{49}{2},1,1,\frac{55}{2},1,1,\ldots\Big]+\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Тогда находим, что

$$\begin{aligned} \gamma_0&=\Big[1;\frac{1}{2},1,1,\frac{7}{3},1,1,\frac{13}{2},1,1,\frac{19}{2},1,1,\gamma_1\Big]+\frac{1}{3}\\ &=\frac{23552\gamma_1+12335}{12092\gamma_1+6333}+\frac{1}{3}=\Big[2;3,1,1,3,1,4,1,1,3,3,1,1,\frac{4\gamma_1-3}{9}\Big]. \end{aligned}$$

Вычислим

$$\gamma_1=\Big[\frac{25}{2},1,1,\frac{31}{2},1,1,\gamma_2\Big]=\frac{1718\gamma_2+885}{132\gamma_2+68};$$

$$\frac{4\gamma_2-3}{9}=\frac{6476\gamma_2+3336}{1188\gamma_2+612}=\Big[5;2,4,1,1,1,1,1,2,1,\frac{\gamma_2-6}{9}\Big];$$

$$\gamma_2=\Big[\frac{37}{2};1,1,\frac{43}{2},1,1,\gamma_3\Big]=\frac{3422\gamma_3+1749}{180\gamma_3+92};$$

$$\frac{\gamma_2-6}{9}=\frac{2342\gamma_3+1197}{1620\gamma_3+828}=\Big[1;2,4,9,1,3,1,1,\frac{2\gamma_3-9}{18}\Big];$$

$$\gamma_3=\Big[\frac{49}{2},1,1,\frac{55}{2},1,1,\gamma_4\Big]=\frac{5702\gamma_4+2901}{228\gamma_4+116};$$

$$\frac{2\gamma_3-9}{18}=\frac{9352\gamma_4+4758}{4104\gamma_4+2088}=\Big[2;3,1,1,2,2,1,3,1,1,\frac{4\gamma_4-3}{9}\Big].$$

Предположим, что утверждение теоремы верно для γ_{3n}. Тогда

$$\begin{aligned}\gamma_{3n+3}&=\Big[\frac{25+36n}{2};1,1,\frac{31+36n}{2},1,1,\gamma_{3n+2}\Big]\\&=\frac{(1718+4248n+2592n^2)\gamma_{3n+2}+(885+2160n+1296n^2)}{(132+144n)\gamma_{3n+2}+(68+72n)},\end{aligned}$$

откуда находим, что

$$\begin{aligned}\frac{4\gamma_{3n+1}-3}{9}&=\frac{(6476+16560n+10368n^2)\gamma_{3n+2}+(3336+8424n+5184n^2)}{(1188+1296n)\gamma_{3n+2}+(612+648n)}\\&=\Big[8n+5;2,4,2n+1,1,1,1,1,2,1,\frac{\gamma_{3n+2}-6}{9}\Big].\end{aligned}$$

Вычислим

$$\begin{aligned}\gamma_{3n+2}&=\Big[\frac{37+36n}{2};1,1,\frac{43+36n}{2},1,1,\gamma_{3n+3}\Big]\\&=\frac{(3422+5976n+2592n^2)\gamma_{3n+3}+(1749+3024n+1296n^2)}{(180+144n)\gamma_{3n+3}+(92+72n)};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\gamma_{3n+2}-6}{9}&=\frac{(2342+5112n+2592n^2)\gamma_{3n+3}+(1197+2592n+1296n^2)}{(1020+1296n)\gamma_{3n+3}+(828+648n)}\\&=\Big[2n+1;2,4,8n+9,1,3,1,1,\frac{2\gamma_{3n+3}+9}{18}\Big].\end{aligned}$$

Далее, находим, что

$$\begin{aligned}\gamma_{3n+3}&=\Big[\frac{49+36n}{2},1,1,\frac{55+36n}{2},1,1,\gamma_{3n+4}\Big]\\&=\frac{(5702+7704n+2592n^2)\gamma_{3n+4}+(2901+3888n+1296n^2)}{(228+144n)\gamma_{3n+4}+(116+72n)};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{2\gamma_{3n+3}-9}{18}&=\frac{(9352+14112n+5184n^2)\gamma_{3n+4}+(4758+7128n+2592n^2)}{(4104+2592n)\gamma_{3n+4}+(2088+1296n)}\\&=\Big[2n+2;3,1,1,2,2n+2,1,3,1,1,\frac{4\gamma_{3n+4}-3}{9}\Big].\end{aligned}$$

Итак, по индукции получим

$$e^{\frac{2}{3}}+\frac{1}{3}=[2;3,1,1,3,1,4,1,1,3,3,1,1,\overline{5+8n,2,4,1+2n,1,1,1,1,2,1,}\\ \overline{1+2n,2,4,9+8n,1,3,1,1,2+2n,3,1,1,2,2+2n,1,3,1,1,}]_{n=0}^{\infty},$$

что и требовалось доказать. $\triangleright$

Аналогично можно доказать, что имеют место разложения для чисел вида $me^{\frac{2}{a}}$, $\frac{1}{m}e^{\frac{2}{a}}$, $\frac{m}{n}e^{\frac{2}{a}}$.

Теорема 2.4. *Имеют место разложения*

$$3e^{\frac{2}{5}}=[4;\overline{2,9+40n,1,2,3+10n,1,5,5+10n,1,2,}\\ \overline{29+40n,1,2,8+10n,1,5,10+10n,1}]_{n=0}^{\infty}, \tag{2.6}$$

$$\frac{1}{2}e^{\frac{2}{5}}=[1;2,\overline{1,14+60n,1,1,5+15n,1,3,8+15n,}\\ \overline{1,1,44+60n,1,1,13+15n,3,1,15+15n,1}]_{n=0}^{\infty}, \tag{2.7}$$

$$\frac{3}{2}e^{\frac{2}{5}}=[2;4,\overline{4+20n,1,5,1+5n,1,11,2+5n,1,5,}\\ \overline{14+20n,1,5,4+5n,2,2,1,1,4+5n,1,5}]_{n=0}^{\infty}. \tag{2.8}$$

$\triangleleft$ Воспользовавшись разложением (1.13) из [5]

$$3e^{\frac{2}{5}}=\Big[3;\frac{1}{2},3,\frac{1}{3},\frac{39}{2},\frac{1}{3},3,\frac{23}{6},3,\frac{1}{3},\frac{99}{2},\frac{1}{3},3,\frac{43}{6},3,\frac{1}{3},\frac{159}{2},\frac{1}{3},3,\\ \frac{21}{2},3,\frac{1}{3},\frac{219}{2},\frac{1}{3},3,\frac{83}{6},3,\frac{1}{3},\ldots\Big],$$

находим, что

$$\gamma_0=\Big[3;\frac{1}{2},3,\frac{1}{3},\gamma_1\Big]=\frac{36\gamma_1+63}{8\gamma_1+15}=\Big[4;2,\frac{4\gamma_1+3}{9}\Big];$$

$$\gamma_1=\Big[\frac{39}{2};\frac{1}{3},3,\gamma_2\Big]=\frac{252\gamma_2+45}{12\gamma_2+2};\quad \frac{4\gamma_1+3}{9}=\frac{174\gamma_2+31}{18\gamma_2+3}=\Big[9;1,2,\frac{6\gamma_2-1}{6}\Big];$$

$$\gamma_2=\Big[\frac{23}{6};3,\frac{1}{3},\gamma_3\Big]=\frac{144\gamma_3+225}{36\gamma_3+54};\quad \frac{6\gamma_2-1}{6}=\frac{23\gamma_3+36}{6\gamma_3+9}=\Big[3;1,5,\frac{\gamma_3}{9}\Big];$$

$$\gamma_3=\Big[\frac{99}{2};\frac{1}{3},3,\gamma_4\Big]=\frac{612\gamma_4+105}{12\gamma_4+2};\quad \frac{\gamma_3}{9}=\frac{612\gamma_4+105}{108\gamma_4+18}=\Big[5;1,2,\frac{12\gamma_4+1}{3}\Big];$$

$$\gamma_4=\Big[\frac{43}{6};3,\frac{1}{3},\gamma_5\Big]=\frac{88\gamma_5+135}{12\gamma_5+18};\quad \frac{12\gamma_4+1}{3}=\frac{178\gamma_4+273}{6\gamma_4+9}=\Big[29;1,2,\frac{2\gamma_5-3}{18}\Big];$$

$$\gamma_5=\Big[\frac{159}{2};\frac{1}{3},3,\gamma_6\Big]=\frac{972\gamma_6+165}{12\gamma_6+2};\quad \frac{2\gamma_5-3}{18}=\frac{53\gamma_6+9}{6\gamma_6+1}=[8;1,5,\gamma_6];$$

$$\gamma_6=\Big[\frac{21}{2};3,\frac{1}{3},\gamma_7\Big]=\frac{128\gamma_7+195}{12\gamma_7+18};\quad \gamma_6=\frac{128\gamma_7+195}{12\gamma_7+18}=\Big[10;1,2,\frac{4\gamma_7+3}{9}\Big];$$

Индукцией по γ_{6n}, получаем

$$\gamma_{6n+1}=\Big[\frac{39+180n}{2};\frac{1}{3},3,\gamma_{6n+2}\Big]=\frac{(1080n+252)\gamma_{6n+2}+(180n+45)}{12\gamma_{6n+2}+2};$$

$$\gamma_{6n+2}=\Big[\frac{23+60n}{6};3,\frac{1}{3},\gamma_{6n+3}\Big]=\frac{(40n+16)\gamma_{6n+3}+(60n+25)}{4\gamma_{6n+3}+9};$$
$$\gamma_{6n+3}=\Big[\frac{99+180n}{2};\frac{1}{3},3,\gamma_{6n+4}\Big]=\frac{(1080n+612)\gamma_{6n+4}+(180n+105)}{12\gamma_{6n+4}+2};$$
$$\gamma_{6n+4}=\Big[\frac{43+60n}{6};3,\frac{1}{3},\gamma_{6n+5}\Big]=\frac{(120n+88)\gamma_{6n+5}+(180n+135)}{12\gamma_{6n+5}+18};$$
$$\gamma_{6n+5}=\Big[\frac{159+180n}{2};\frac{1}{3},3,\gamma_{6n+6}\Big]=\frac{(1080n+972)\gamma_{6n+6}+(180n+165)}{12\gamma_{6n+6}+2};$$
$$\gamma_{6n+6}=\Big[\frac{21+20n}{2};3,\frac{1}{3},\gamma_{6n+7}\Big]=\frac{(120n+128)\gamma_{6n+7}+(180n+195)}{12\gamma_{6n+7}+18},$$

откуда находим, что

$$\frac{4\gamma_{6n+1}+3}{9}=\Big[9+40n;1,2,\frac{6\gamma_{6n+2}-1}{6}\Big];$$

$$\frac{6\gamma_{6n+2}-1}{6}=\frac{(240n+92)\gamma_{6n+3}+(360n+144)}{24\gamma_{6n+3}+36}=\Big[3+10n;1,5,\frac{\gamma_{6n+3}}{9}\Big];$$
$$\frac{\gamma_{6n+3}}{9}=\Big[5+10n;1,2,\frac{12\gamma_{6n+4}+1}{3}\Big];$$
$$\frac{12\gamma_{6n+4}+1}{3}=\Big[29+40n;1,2,\frac{2\gamma_{6n+5}-3}{18}\Big];$$
$$\frac{2\gamma_{6n+5}-3}{18}=[8+10n;1,5,\gamma_{6n+6}];$$
$$\gamma_{6n+6}=\Big[10+10n;1,2,\frac{4\gamma_{6n+7}+3}{9}\Big],$$

и, следовательно, равенство (2.6) имеет место. $\triangleright$

Разложение (2.7) можно получить из разложения (1.13), умножив его на 3. Разложение (2.8) можно получить из разложения (2.5), разделив его на 2. $\triangleright$

Теорема 2.5. *Пусть α — цепная дробь из равенств (2.1)–(2.8). Тогда для любого $\varepsilon>0$ неравенство*

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<(c+\varepsilon)\frac{\ln\ln q}{q^2\ln q}$$

имеет бесконечно много решений в целых числах $p, q \in \mathbb{N}$.

Существует число $q' = q(\varepsilon)$ *такое, что*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > (c - \varepsilon)\frac{\ln\ln q}{q^2 \ln q}$$

для всех целых p, q, *где* $q \geq q'(\varepsilon)$.

При этом

1) *при* $\alpha = ae^{\frac{2}{a}}$ $c = \frac{1}{4}$, 2) *при* $\alpha = 3e^{\frac{2}{3}}$ $c = \frac{1}{4}$, 3) *при* $\alpha = \frac{1}{a}e^{\frac{2}{a}}$ $c = \frac{1}{4}$,
4) *при* $\alpha = \frac{1}{3}e^{\frac{2}{3}}$ $c = \frac{1}{4}$, 5) *при* $\alpha = e^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{3}$ $c = \frac{3}{4}$, 6) *при* $\alpha = 3e^{\frac{2}{5}}$ $c = \frac{3}{20}$.
7) *при* $\alpha = \frac{1}{2}e^{\frac{2}{5}}$ $c = \frac{1}{10}$, 8) *при* $\alpha = \frac{3}{2}e^{\frac{2}{5}}$ $c = \frac{3}{10}$.

Литература

1. *Бухштаб А. А.* Теория чисел.—М.: Просвещение, 1966.
2. *Галочкин А. И. и др.* Введение в теорию чисел.—М.: МГУ, 1984.
3. *Ленг С.* Введение в теорию диофантовых приближений.—М.: Мир, 1970.
4. *Тасоев Б. Г.* О рациональных приближениях к некоторым бесконечным цепным дробям.—МПГУ, Москва, Афтореф. дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук, 1997.
5. *Тасоев Б. Г.* О наилучших рациональных приближениях к трансцендентным числам $\psi(x) \cdot e^x$ // Владикавказский мат. журн.—2001.—Т. 3, № 2.—С. 23–49.
6. *Хинчин А. Я.* Цепные дроби.—М.: Наука, 1978.
7. *Хованский А. Н.* Приложение цепных дробей и их обобщений к вопросам приближенного анализа.—М.: ГИТТЛ, 1956.
8. *Шидловский А. Б.* Диофантовы приближения и трансцендентные числа.—М.: МГУ, 1982.
9. *Эйлер Л.* Введение в анализ.—М.: Физматгиз, 1961.
10. *Davis C. S.* Rational approximation to e // J. Austral Math. Soc. (Ser. A).—1978.—V. 25.—P. 497–502.
11. *Devis C. S.* A note on rational approximation // Bull. Austral. Math. Soc.—1979.—V. 20.—P. 407–410.
12. *Perron O.* Die Lehre von der Kettenbruchen, Band I.—Stuttgart: Teubner, 1954.
13. *Schiokawa J.* Number Theory and Combinatorics.—Japan.— Singapore: World Scientific Pub. Co, 1985.—P. 353–367.
14. *Takeshi O.* A note on the rational approximationa to e // Tokyo J. Math.—1992.—V. 15, No. 1.—P. 129–133.
15. *Takeshi O.* A note on the rational approximations to tank // Proc. Jap. Acad. A.—1993.—No. 6.—P. 161–163.

г. Цхинвал *Статья поступила 20 ноября 2000 г.*