Владикавказский математический журнал
Январь–март, 2001, Том 3, Выпуск 1

УДК **517.98**

ЛОКАЛЬНО ОГРАНИЧЕННЫЕ ПРОСТРАНСТВА ВЕКТОР-ФУНКЦИЙ И НЕЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В НИХ

В. Г. Фетисов, Н. П. Безуглова

На единой методологической основе исследуются нелинейные операторы типа суперпозиции, интегрального оператора Урысона в пространствах измеримых вектор-функцией.

1. Некоторые обозначения, определения и вспомогательные предложения

Пусть (T, Σ, μ) — пространство с мерой, т. е. T — множество, Σ — σ-алгебра его подмножеств, μ — счетно-аддитивная неотрицательная мера на Σ. Без ограничения общности можно предполагать, что все атомы дискретной части T являются точками. Пусть $\Sigma(\mu)$ (соответственно $\Sigma^\sigma(\mu)$) есть кольцо (соответственно σ-кольцо) множеств из Σ, имеющих конечную (соответственно σ-конечную) меру. Всюду в дальнейшем будем считать, что:

(a) если $A \subset B \in \Sigma$ и $\mu(B) = 0$, то $A \in \Sigma$ (полнота меры μ);

(b) если для любого $B \in \Sigma(\mu)$ имеем $B \cap A \in \Sigma$, то $A \in \Sigma$;

(c) для любого $A \in \Sigma$ имеем $\mu(A) = \sup\{\mu(B) : B \subset A, B \in \Sigma(\mu)\}$;

(d) существуют дизъюнктные множества $\{T_i\}$ такие, что $\mu(T \setminus \bigcup T_i) = 0$ и $0 < \mu(T_i) < +\infty$ при любом i;

(e) для любого $A \in \Sigma(\mu)$ существуют множество N меры нуль и не более, чем счетное, множество J индексов i такие, что $A \setminus N = \bigcup\limits_{i \in J} (A \cap T_i)$.

Как известно [1], условия (a)–(e) выполнены для любой полной σ-конечной меры и для меры, порожденной существенно верхним интегралом меры Радона на любом локально компактном пространстве. Без ущерба для нетривиальности всего дальнейшего изложения можно считать, что (T, Σ, μ) есть отрезок [0,1] с мерой Лебега μ или же ограниченный компакт в $\mathbb{R}^n$ с мерой Лебега μ.

Пусть (T, Σ, μ) — пространство с мерой, E — квазибанахово идеальное пространство с мерой Лебега μ, (т. е. E — F^*-пространство с инвариантной ρ-метрикой и F-нормой $\|\cdot\|_E$; например, L^p, $0 < p < \infty$), X — банахово идеальное пространство. Символом $L^0(X)$ обозначаем пространство (классов эквивалентности) всех X-значных измеримых функций на T.

Через $E(X)$ обозначим решеточное квазибанахово пространство всех измеримых вектор-функций $\vec{f} : T \to X$ таких, что $\|\vec{f}\|_{E(X)} = \|\|\vec{f}\|_X\|_E < +\infty$. Мы ограничиваемся в своем изложении в основном двумя модельными примерами $E(X)$, а именно:

(1) через $L^p(X)$ (или $L^p(T, X)$ [2]) обозначается пространство всех измеримых вектор-функций $\vec{f}(t)$ таких, что F-норма элемента вводится формулой:

$$\|\vec{f}\|_p = \left(\int\limits_T \|\vec{f}(t)\|_X^p d\mu(t) \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty \quad (0 < p < \infty); \tag{1}$$

(2) через $L^*_\varphi(X)$ (или $L^*_\varphi(T, X)$, [3]) обозначим пространство всех измеримых вектор-функций $\vec{f}(t)$ таких, что (см. [4])

$$\|\vec{f}\|_\varphi = \inf \left\{ \varepsilon > 0 : \int\limits_T \varphi(\|\vec{f}(t)\|_X/\varepsilon) d\mu(t) \le \varepsilon \right\}, \quad \text{где} \quad \varphi \in \Phi(L).$$

Определение 1.1. Последовательность $\{\vec{f}_n(t)\}_{n=1}^\infty$ элементов пространства $E(X)$ называется C-последовательностью, если для каждой числовой последовательности $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty \downarrow 0$ $(\lambda_n \in \mathbb{R})$, ряд $\sum\limits_{n=1}^\infty \lambda_n \vec{f}_n(t)$ сходится.

Определение 1.2. Пространство вектор-функций $E(X)$ называется C-пространством, если для любой C-последовательности его элементов $\{\vec{f}_n(t)\}_{n=1}^\infty \subset E(X)$ ряд $\sum\limits_{n=1}^\infty \vec{f}_n(t)$ сходится.

Лемма 1.1. *Для того, чтобы последовательность элементов* $\{\vec{f}_n(t)\}_{n=1}^\infty \subset E(X)$ *являлась C-последовательностью, необходимо и достаточно, чтобы множество* $A_0 = \left\{ \sum\limits_{n=1}^\infty a_n \vec{f}_n(t) : |a_n| \le 1 \right\}$ *было ограниченным.*

$\lhd$ *Достаточность.* Пусть известно, что множество элементов $A_0 = \left\{ \sum\limits_{n=1}^\infty a_n \vec{f}_n(t) : |a_n| \le 1 \right\}$ является ограниченным. Пусть $\{c_n\}_{n=1}^\infty \downarrow 0$ — произвольная числовая последовательность и $\varepsilon > 0$. В силу ограниченности множества A_0 найдется номер n_0 такой, что для $n > n_0$, $\|c_n \vec{f}_n(t)\| < \varepsilon$ для всех элементов $\vec{f}_n(t) \in A_0$, где $\|\cdot\|$ означает F-норму в пространстве $E(X)$. Отсюда для номеров $n, m, n_0 < n < m$ имеем:

$$\left\| \sum_{i=n+1}^m c_i \vec{f}_i(t) \right\| = \left\| c_k \sum_{i=n+1}^m \frac{c_i}{c_k} \vec{f}_i(t) \right\| = \|c_k \vec{f}(t)\| < \varepsilon,$$

где $c_k = \max_{n \le i \le m} c_i$ и $\vec{f}(t) = \sum\limits_{i=n+1}^{m} \frac{c_i}{c_k} \vec{f}_i(t) \in A_0$. Значит, последовательность $\{\vec{f}_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ является C-последовательностью.

Необходимость. Предположим, что множество A_0 не является ограниченным. Тогда существуют сходящаяся числовая последовательность $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} \downarrow 0$, ограниченная числовая последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $|a_n| \le 1$, и подпоследовательности номеров $\{n_k\}$, $\{n'_k\}$ такие, что последовательность $\Big\{\lambda_k \sum\limits_{n=n_k}^{n'_k} a_n \vec{f}_n(t) : k \in \mathbb{N}\Big\}$ не сходится к нулю, где $n_k < n'_k < n_{k+1}$.

Полагаем:

$$c_n = \begin{cases} \lambda_k a_k, & \text{если} \ \ n_k < n \le n'_k, \\ 0, & \text{для всех остальных номеров.} \end{cases}$$

Можно видеть, что последовательность $\{c_n\}_{n=1}^{\infty} \downarrow 0$, но ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n \vec{f}_n(t)$ расходится. Отсюда видно, что $\{\vec{f}_n(t)_{n=1}^{\infty}\}$ не будет C-последовательностью. Противоречие. $\triangleright$

Лемма 1.2 (А. Н. Колмогоров — А. Я. Хинчин — В. Орлич). *Пусть дана C-последовательность $\{\vec{f}_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ пространства $L^0(X)$. Тогда на каждом множестве T_0 конечной меры ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\vec{f}_n(t)|^2$ сходится μ-почти всюду.*

Теорема 1.1 (Л. Шварца [5]). *Пространства вектор-функций $L^p(X)$ при $0 \le p \le \infty$ являются C-пространствами.*

Следствие 1.1 (см. [3]). *Пространства вектор-функций $L^*_\varphi(X)$ являются C-пространствами при условии, что φ-функция класса $\Phi(L)$ подчиняется Δ_2-условию при всех u.*

$\triangleleft$ Доказательство следствия 1.1 вытекает из теоремы 1.1, если положить $\varphi(u) = u^p$, $u \in \overline{\mathbb{R}}^+$. $\triangleright$

Отметим, что определения C-последовательности и C-пространства проще, чем (0)-условие, введенное В. Матушевской и В. Орличем в [6], которые на широком классе модулярных пространств показали необходимость (0)-условия (см. [6]).

Определение 1.3 (см. [7]). Пусть даны два C-пространства $E_1(X)$ и $E_2(X)$ и произвольный оператор $W : E_1(X) \to L^0(X)$. Оператор W называется λ-инвариантным, если для каждого измеримого подмножества $T_0 \subset T$ выполняется условие:

$$W(\vec{v}) \Leftrightarrow W(\vec{v} + \lambda \mathbf{1}_{T_0} \vec{u}) = \mathbf{1}_{T_0} \cdot \{W(\vec{v}) \Leftrightarrow W(\vec{v} + \lambda \vec{u})\} \ \ \Big(\vec{u}, \vec{v} \in E_1(X)\Big), \qquad (2)$$

почти всюду на T.

Здесь $\mathbf{1}_{T_0}$ обозначает характеристическую функцию измеримого подмножества $T_0 \subset T$.

Очевидно, λ-инвариантный оператор является H_λ-оператором. Действительно, $W(\vec{v}) \Leftrightarrow W(\vec{v}+\lambda\vec{u}) = \mathbf{1}_{T_1} \cdot \{W(\vec{v}) \Leftrightarrow W(\vec{v}+\lambda\vec{u})\} + \mathbf{1}_{T_2} \cdot \{W(\vec{v}) \Leftrightarrow W(\vec{v}+\lambda\vec{u})\}$ для любых дизъюнктных измеримых подмножеств $T_1 \cap T_2 = \varnothing$, $T_1 \cup T_2 = T$, почти всюду на T (см. подробнее [10]).

Оператор W, будучи λ-инвариантным, удовлетворяет соотношению: $W(\vec{v}) \Leftrightarrow W(\vec{v}+\lambda\vec{u}) = W(\vec{v}) \Leftrightarrow W(\vec{v}+\lambda\mathbf{1}_{T_1}\vec{u}) + W(\vec{v}) \Leftrightarrow W(\vec{v}+\lambda\mathbf{1}_{T_2}\vec{u})$, значит,

$$\|W(\vec{v}) \Leftrightarrow W(\vec{v}+\lambda\vec{u})\|_2 \leq \|W(\vec{v}) \Leftrightarrow W(\vec{v}+\lambda\mathbf{1}_{T_1}\vec{u})\|_2 + \|W(\vec{v}) \Leftrightarrow W(\vec{v}+\lambda\mathbf{1}_{T_2}\vec{u})\|_2,$$

т. е. оператор W является H_λ-оператором (при $H \equiv I$).

Примечание 1.1. Для $\lambda = 1$ λ-инвариантный оператор назовем инвариантным оператором. Условие (2) инвариантности ($\lambda = 1$) оператора W имеет вид:

$$W(\vec{v}) \Leftrightarrow W(\vec{v}+\mathbf{1}_{T_0}\vec{u}) = \mathbf{1}_{T_0} \cdot \{W(\vec{v}) \Leftrightarrow W(\vec{v}+\vec{u})\} \quad \Big(\vec{u},\, \vec{v} \in E_1(X),\ T_0 \subset T\Big). \tag{3}$$

Определение 1.4. Отображение $\rho : E(X) \to \mathbb{R}^+$ назовем аддитивной формой, обусловленной F-нормой $\|\cdot\|$ на $E(X)$, если:

(a) для любых $\vec{u}$, $\vec{v} \in E(X)$, $\operatorname{supp}\vec{u}(t) \cap \operatorname{supp}\vec{v}(t) = \varnothing$, выполняется условие $\rho(\vec{u}+\vec{v}) = \rho(\vec{u}) + \rho(\vec{v})$;

(b) $\rho(\vec{x}_n) \downarrow 0 \Leftrightarrow \|\vec{x}_n\| \downarrow 0$ и $n \to \infty$;

(c) $\rho(\vec{x}_n) \leq \alpha \Leftrightarrow \|\vec{x}_n\| \leq k_\alpha,\ n \in \mathbb{N}$ и $(\alpha, k_\alpha) \in \mathbb{R}^2$.

Примерами аддитивных форм для конкретных пространств вектор-функций $\vec{f}(t)$ будут являться интегральные модуляры вида:

$$(a)\ \rho(\vec{f}) = \int\limits_T \|\vec{f}(t)\|_X^p d\mu(t), \quad \vec{f} \in L^p(X); \tag{4}$$

$$(b)\ \rho(\vec{f}) = \int\limits_T \varphi\Big(\|\vec{f}(t)\|_X\Big) d\mu(t), \quad \vec{f} \in L^*_\varphi(X); \tag{5}$$

если φ-функция $\varphi(u)$ удовлетворяет Δ_2-условию.

Определение 1.5. F^*-пространство вектор-функций $E(X)$ называется пространством типа $L(X)$, если:

(1) $\mathbf{1}_T \in E(X)$;

(2) $E(X)$ обладает абсолютно непрерывной F-нормой;

(3) в $E(X)$ существует аддитивная форма ρ.

Примечание 1.2. Пространство $L^p(X)$ $(0 < p < \infty)$ является пространством типа $E(X)$; аналогично для $L^*_\varphi(X)$, если φ удовлетворяет Δ_2-условию.

Как известно, сравнение свойств вектор-функций и функций от двух переменных, связанных между собой формулой $\Phi(s,t) = [\vec{f}(t)](s)$, удобно проводить в рамках теории пространств со смешанной квазинормой [8], так как последние позволяют описывать принадлежность интегральных операторов некоторым важным классам через свойства их ядер. Пусть (T_1, Σ_1, μ_1) и (T, Σ, μ) — два пространства с мерами μ_1 и μ соответственно.

Для данных X — БИП (= банахова идеального пространства) на (T_1, Σ_1, μ_1), E — КИП (= квазибанахова идеального пространства) на (T, Σ, μ) через $E[X]$ обозначим пространство всех измеримых функций $\Phi(s,t)$ на $T_1 \times T$, удовлетворяющих двум условиям:

(1) при всех $t \in T$ функция $s \mapsto \Phi(s,t)$ входит в X;

(2) функция $|\Phi| = \|\Phi(\cdot, t)\|_X$ входит в E.

Известное условие (C) (см. [8]) в пространстве X обеспечивает измеримость функции $|\Phi|$. Значит, $E[X]$ — линейное множество, а, следовательно, и идеальное квазинормированное пространство на произведении $T_1 \times T$, а так как E — КИП, то формула $\|\Phi\|_{E[X]} = \||\Phi|\|_E$ превращает $E[X]$ в КИПСК (см. также [3], где для более общих ситуаций имеются модельные примеры КИПСК $L_{(\alpha)}$, $L_{(\bar{\alpha})}$, Орлича $L^*_{(\varphi)}$).

Ответ на вопрос, когда имеет место топологическое совпадение пространства вектор-функций $E(X)$ с пространством со смешанной квазинормой $E[X]$, дает следующая лемма:

Лемма 2.2. *Следующие условия эквивалентны:*

(1) $E(X) = E[X]$ при каноническом вложении $\Phi(s,t) = [\vec{f}(t)](s)$;

(2) X — БИП с условием $(\mathrm{A}) : (x_n \downarrow 0) \Rightarrow \Big(\|x_n\|_X \to 0$ *при* $n \to \infty\Big)$.

$\lhd$ Доказательство леммы 2.2 проводится аналогично доказательству следствия 2.3 работы [9]. $\rhd$

2. Некоторые свойства нелинейных операторов в квазинормированных пространствах $E(X)$ измеримых вектор-функций

Цель этого параграфа — на единой методологической основе исследовать нелинейные операторы типа: суперпозиции, интегрального оператора Урысона в пространствах $E(X)$ и др.

Теорема 2.1. *Пусть $E_1(X)$ — F-пространство, $E_2(X)$ — пространство типа $L(X)$, ρ — аддитивная форма, обусловленная F-нормой $\|\cdot\|_2$, а оператор $W : E_1(X) \to E_2(X)$ подчиняется условиям:*

(a) $W(\vec{u}) \geq 0$ *почти всюду на* T, *если* $\vec{u} \in E_1(X)$, $\vec{u} \geq 0$ *почти всюду;*

(b) $W(\mathbf{1}_{T_1}\vec{u}_1 + \mathbf{1}_{T_2}\vec{u}_2) \geq \mathbf{1}_{T_1} \cdot W(\vec{u}_1) + \mathbf{1}_{T_2} \cdot W(\vec{u}_2)$ *почти всюду на* T, *если* $\vec{u}_1, \vec{u}_2 \in E_1(X)$, $\vec{u}_1, \vec{u}_2 \geq 0$, *почти всюду на* T *и* T_1, T_2 *— измеримые,* $T_1 \cap T_2 = \varnothing$, $T_1 \subset T$, $T_2 \subset T$.

Тогда для любого абсолютно ограниченного в $E_1(X)$ *множества* $\mathbf{C}$ *образ* $T(C)$ *— абсолютно ограничен в* $E_2(X)$.

$\lhd$ От противного. Допустим, что существует множество C, абсолютно ограниченное в $E_1(X)$ такое, что образ $T(C)$ в пространстве $E_2(X)$ не будет абсолютно ограниченным. Это значит, что существуют $\varepsilon_0 > 0$, последовательности $\{\vec{u}_k(t)\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbf{C}$ и $\{T_k\} \in \Sigma$, $T_k \subset T$ $(\forall k)$ такие, что $\mu(T_k) \to 0$ при $k \to \infty$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu(T_k) < \infty$ и $\|\mathbf{1}_{T_k} \cdot W(\vec{u}_k)\|_2 > \varepsilon_0$.

Рассуждая по аналогии, как в [10], можно утверждать, что существует последовательность подмножеств $\{T_k\}_{k=1}^{\infty} \subset T$ такая, что $T_i \cap T_j = \varnothing$, $i \neq j$ и $\{\vec{f}_n(t)\}_{n=1}^{\infty} \subset E_1(X)$, $\vec{f}_n(t) \geq 0$ почти всюду, $\forall n \in \mathbb{N}$, удовлетворяющие условиям $\sum_{n=1}^{\infty} \|\mathbf{1}_{T_n}\vec{f}_n(t)\|_1 < +\infty$, но $\|\mathbf{1}_{T_n}W(\vec{f}_n)\|_2 > \varepsilon_0 > 0$. Тогда найдется $\varepsilon_0' > 0$ такое, что $\rho(\mathbf{1}_{T_n}W(\vec{f}_n)) > \varepsilon_0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Обозначим

$$\vec{v}(s) = \begin{cases} \vec{f}_n(t), & \text{если } \ t \in T_n, \\ 0, & \text{если } \ t \in T \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n\right) = T_0. \end{cases}$$

Очевидно, что $\vec{v} \in E_1(X)$ и, значит, по условию $W(\vec{v}) \in E_2(X)$. С другой стороны, имеем:

$$W(\vec{v}) = W\Big(\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{T_n}\vec{f}_n\Big) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{T_n}W(\vec{f}_n),$$

откуда $\|W(\vec{v})\|_2 \geq \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{T_n}W(\vec{f}_n)\right\|_2$.

Так как

$$\rho\Big(\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{T_n}W(\vec{f}_n)\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \rho(\mathbf{1}_{T_n}W(\vec{f}_n)) = \infty,$$

то $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{T_n}W(\vec{f}_n) \notin E_2(X)$, следовательно, $W(\vec{v}) \notin E_2(X)$. Противоречие. $\rhd$

Следствие 2.1. *В условиях теоремы 2.1, если оператор* W *непрерывен по мере в точке* $\vec{u}_0 \in E_1(X)$, *то оператор* W *непрерывен по* F*-норме пространства* $E_1(X)$ *в точке* $\vec{u}_0$.

Примечание 2.1. Если W есть инвариантный оператор, подчиняющийся условию (a) теоремы 2.1, тогда оператор W непрерывен в каждой точке $\vec{u}_0 \in E_1(X)$, где W непрерывен по мере и $W(\Theta_{E_1(X)}) = \mathbf{1}_{E_2(X)}$, ($\Theta$ — ноль пространства).

Лемма 2.1. *Пусть $\mathbf{1}_T \in \overset{\circ}{E}_1(X)$ и $\mathbf{1}_T \in \overset{\circ}{E}_2(X)$ ($\overset{\circ}{E}_i$ — подпространства в E_i элементов, имеющих абсолютно непрерывную F-норму), W произвольный оператор из $E_1(X)$ в $E_2(X)$.*

Следующие предложения эквивалентны:

(1) W непрерывен по мере в $\vec{u}_0 \in E_1(X)$;

(2) $\lim\limits_{\vec{u}\to\Theta} \mu\{t, |W(\vec{u}_0+\vec{z}) \Leftrightarrow W(\vec{u}_0)| > \alpha\} = 0$, где $\alpha > 0$, $\vec{z}$ — фиксированы.

Теорема 2.2. *Пусть $E_1(X)$ — F-пространство, $E_2(X)$ — пространство типа $L(X)$, причем $\mathbf{1}_T \in \overset{\circ}{E}_1(X)$ и $\mathbf{1}_T \in E_2(X)$, а $W : E_1(X) \to E_2(X)$ — произвольный оператор, подчиняющийся условиям (a) и (b) теоремы 2.1. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(1) W непрерывен в точке $\vec{u}_0 \in E_1(X)$;

(2) W непрерывен по мере в точке $\vec{u}_0 \in E_1(X)$.

$\lhd$ 2) $\Rightarrow$ 1). Пусть $\{\vec{u}_n\}_{n=1}^{\infty} \to \vec{u}_0$ по F-норме пространства $E_1(X)$, тогда $\{\vec{u}_n\}_{n=1}^{\infty} \to \vec{u}_0$ по мере на T при $n \to \infty$. Оператор W, будучи непрерывным по мере в точке $\vec{u}_0$, дает $W(\vec{u}_n) \to W(\vec{u}_0)$. А так как последовательность $\{\vec{u}_n\}_{n=1}^{\infty} \to \vec{u}_0$ абсолютно ограничена, то $\{W(\vec{u}_n)\}$ абсолютно ограниченное множество в $E_2(X)$ (согласно теореме 2.1). Значит, $\{W(\vec{u}_n)\}_{n=1}^{\infty} \to W(\vec{u}_0)$ по F-норме при $n \to \infty$.

(1) $\Rightarrow$ (2) Доказательство предоставляем читателю. $\rhd$

Примечание 2.2. Существуют F-пространства $E_1(X)$ и $E_2(X)$, $\mathbf{1}_T \in \overset{\circ}{E}_2(X)$, где $W : E_1(X) \to E_2(X)$ инвариантный оператор $W(\Theta_{E_1(X)}) = \Theta_{E_2(X)}$, для $\vec{a} \in E_2(X)$ и отображение $\Psi : E_1(X) \to E_2(X)$ такие, что:

(1) $|W(\vec{u})(t)| \leq \vec{a}(t) + \Psi(\vec{u})(t)$ почти всюду на T, $\forall \vec{u} \in E_1(X)$;

(2) для любого F-ограниченного множества $B \in E_1(X)$, $\Psi(B)$ ограничено в $E_2(X)$.

Примерами могут служить известный оператор суперпозиции $W(\vec{u})(t) = N[t, \vec{u}(t)]$ и $E_1(X) = L^{p_1}(X)$, $E_2(X) = L^{p_2}(X)$ при соответствующих ограничениях на $p_1, p_2 > 0$.

Теорема 2.3. *Пусть $E_1(X)$ и $E_2(X)$ — два F-пространства на T, $\mathbf{1}_T \in \overset{\circ}{E}_2$, $W : E_1(X) \to E_2(X)$. Пусть для $\vec{u}_0 \in \overset{\circ}{E}_1(X)$, $\vec{u}_0 > 0$ на T, существуют возрастающая функция $\varphi : \overline{\mathbf{R}}^+ \to \overline{\mathbf{R}}^+$, удовлетворяющая условию $\lim\limits_{u\to\infty} \frac{\varphi(u)}{u} = \infty$, функция $\vec{a} \in E_2(X)$ и отображение $\Psi : E_1(X) \to E_2(X)$, переводящее всякое ограниченное по F-норме множество $B \subset E_1(X)$ в ограниченное множество $\Psi(B) \subset E_2(X)$, такие, что*

$$\varphi\left(\frac{|W(\vec{f})(t)|}{\vec{u}_0(t)}\right)\vec{u}_0(t) \leq \vec{a}(t) + \Psi(\vec{f}(t))$$

почти всюду на T для всех $\vec{f} \in E_1(X)$. Тогда для каждого $r > 0$, образ $W(B'(\vec{\Theta}, r))$ (шара с центром в Θ радиуса r) — абсолютно ограниченное множество в $E_2(X)$.

$\lhd$ По условию, $\vec{a} \in E_2(X)$, тогда для $\forall \varepsilon > 0$, существует $\beta_1 > 0$ такое, что $\|\beta_1 \vec{a}(t)\|_2 < \frac{\varepsilon}{2}$. По условию, $\Psi\Big(B'(\vec{\Theta}, r)\Big)$ ограниченное, тогда существует $\beta_2 > 0$ такое, что $\|\beta_2 \Psi(\vec{f})\|_2 < \frac{\varepsilon}{2}$ для любого элемента $\vec{f} \in B'(\Theta, r)$. Положим $\beta = \inf\{\beta_1, \beta_2\}$. Отсюда:

$$\Big\|\beta \cdot \varphi\Big(|W(\vec{f})(t)|/\vec{u}_0(t)\Big) \cdot \vec{u}_0(t)\Big\|_2 \le \|\beta \vec{a}(t)\|_2 + \|\beta \Psi(\vec{f}(t))\|_2 < \varepsilon.$$

Это означает, что образ $W(B'(\vec{\Theta}, r))$ есть абсолютно ограниченное множество в $E_2(X)$ (см. также теорему 1.4.13 из [10]). $\rhd$

Литература

1. *Коротков В. Б.* Интегральные операторы.—Новосибирск: Наука, 1983.
2. *Kalton N. J.* Isomorphism between L^p-function spaces when $p < 1$ // J. Func. Anal.—1981.—V. 42.—P. 299–337.
3. *Фетисов В. Г.* Об операторах в идеальных квазинормированных пространствах со смешанной квазинормой $E(\Omega)$ // Северо-Осетин. госуниверситет.—Депонир. в ВИНИТИ 22.05.90, № 2784–В90.
4. *Rolewicz S.* Metric linear spaces.—Warszawa: PWN, 1972.
5. *Schwartz L.* Un theoreme de la convergence dans les L^p, $0 \le p \le \infty$ // C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. A.—1969.—T. 268.—P. 704–706.
6. *Matuszewska W., Orlicz W.* A note on modular spaces IX // Bull. Acad. Polon. Sci.—1968.—V. 16.—P. 801–807.
7. *Фетисов В. Г.* О свойствах нелинейных λ — инвариантных операторов в локально ограниченных пространствах // Грозненский госуниверситет.—Т. 24.—Грозный.—1992.
8. *Бухвалов А. В., Коротков В. Б., Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С., Макаров Б. М.* Векторные решетки и интегральные операторы.—Новосибирск: Наука, 1992.
9. *Бухвалов А. В.* О пространствах со смешанной нормой // Вестник ЛГУ.—1973.—№ 19.—С. 5–12.
10. *Фетисов В. Г.* Операторы и уравнения в F-квазинормированных пространствах // Дисс. на соискание уч. степ. докт. физ.-мат. наук, Ин-т мат-ки. СО РАН, 1996.—280 с.

г. Ростов *Статья поступила 22 декабря 2000 г.*