Владикавказский математический журнал
Январь–март, 2001, Том 3, Выпуск 1

УДК **517.55**

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ТИПА РИМАНА ДЛЯ ДВОЯКОКРУГОВЫХ ОБЛАСТЕЙ С КРАЕВЫМ УСЛОВИЕМ, СОДЕРЖАЩИМ ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ

Х. П. Дзебисов

В теории аналитических функций комплексного переменного краевой задачей типа Римана называют задачу нахождения двух функций $f^+(z)$ и $f^-(z)$, аналитических соответственно внутри и вне некоторого замкнутого контура L, по известному на контуре линейному соотношению граничных значений не только этих функций, но и значений их производных.

В работе эта задача рассматривается для аналитических функций двух комплексных переменных в полных двоякокруговых выпуклых областях пространства $\mathbb{C}^2$. Разработанный математический аппарат решения рассматриваемых краевых задач позволяет найти их решения в замкнутом виде, что является крайне редким фактом для функций многих переменных.

Рассмотрим в пространстве $\mathbb{C}^2$ функцию двух комплексных переменных $f(z)$ $(z = (z_1, z_2))$, определенную интегралом

$$f(z) = \frac{1}{4\pi^2 i} \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\tau \int\limits_{0}^{2\pi} dt \int\limits_{|\xi|=1} \frac{F(t,\xi)\, d\xi}{\xi - u_1(\tau,\delta)}, \tag{1}$$

где $0 < \alpha < \beta < 1$, $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$, $u_1(\tau,\delta) = \tau^{\delta_1} z_1 + \tau^{\delta_2} z_2 e^{it}$, $F(t,\xi) \in \mathrm{Lip}_{\Delta}^{\xi}(\alpha)$, т.е. на множестве $\Delta = \{(t,\xi) : 0 \le t \le 2\pi,\ |\xi| = 1\}$ функция $F(t,\xi)$ удовлетворяет условию Липшица с показателем $0 < \alpha \le 1$ по ξ равномерно относительно t.

Функции, определенные интегралом (1), отнесем к классу $M_{\delta_1,\delta_2}^{\alpha,\beta}$.

Разобъем пространство $\mathbb{C}^2$ на следующие непустые пересекающиеся множества

$$
\begin{aligned}
&K(\beta,\delta_1,\delta_2)=\{(z):\beta^{\delta_1}|z_1|+\beta^{\delta_2}|z_2|-1<0\},\\
&,_1=\{(z):\lambda_2(\alpha)>0,\ \lambda_2(\beta)>0\},\\
&,_2=\{(z):\lambda_3(\alpha)<0\},\\
&E_1=\{(z):\lambda_1(\alpha)<0,\ \lambda_3(\beta)<0\},\\
&E_2=\{(z):\lambda_1(\alpha)\le 0,\ \lambda_1(\beta)\ge 0,\ \lambda_2(\beta)<0,\ \lambda_3(\beta)\ge 0,\ |z_2|>p|z_1|^\nu\},\\
&E_3=\{(z):\lambda_1(\alpha)\le 0,\ \lambda_2(\beta)<0,\ |z_2|\le p|z_1|^\nu\},\\
&E_5=\{(z):\lambda_1(\alpha)\ge 0,\ \lambda_2(\alpha)<0,\ \lambda_3(\alpha)\ge 0,\ \lambda_3(\beta)\le 0,\ |z_2|\ge p|z_1|^\nu\},\\
&E_6=\{(z):\lambda_2(\alpha)<0,\ \lambda_3(\beta)\le 0,\ |z_2|\le p|z_1|^\nu\},\\
&E_7=\{(z):\lambda_1(\alpha)>0,\ \lambda_3(\beta)\ge 0,\ |z_2|\ge p|z_1|^\nu\},\\
&E_8=\{(z):\lambda_1(\alpha)>0,\ \lambda_2(\alpha)\le 0,\ \lambda_2(\beta)\le 0,\ \lambda_3(\beta)>0,\ |z_2|<p|z_1|^\nu\},\\
&E_9=\{(z):\lambda_1(\alpha)\ge 0,\ \lambda_2(\alpha)>0,\ \lambda_3(\beta)\le 0\},\\
&E_{10}=\{(z):\lambda_2(\alpha)>0,\ \lambda_2(\beta)\le 0,\ \lambda_3(\beta)\ge 0\},\\
&E_{11}=\{(z):\lambda_2(\alpha)>0,\ \lambda_2(\beta)\le 0,\ \lambda_3(\beta)\ge 0\},
\end{aligned}
$$

где

$$
\begin{aligned}
\lambda_1(\tau)&=\tau^{\delta_1}|z_1|+\tau^{\delta_2}|z_2|-1,\\
\lambda_2(\tau)&=\tau^{\delta_1}|z_1|-\tau^{\delta_2}|z_2|-1,\\
\lambda_3(\tau)&=\tau^{\delta_1}|z_1|+\tau^{\delta_2}|z_2|+1,\\
p&=\nu\left(\frac{\delta_2}{\delta_1}\right)^{1-\nu},\quad \nu=\frac{\delta_1}{\delta_2}.
\end{aligned}
$$

В каждом из указанных множеств для функций класса $M^{\alpha,\beta}_{\delta_1,\delta_2}$ были получены вычислительные формулы, представимые повторными интегралами, см. [5]. Так, например:

$$
f(z)=\int\limits_{\alpha}^{\tau_0} h^+(\tau)\,d\tau+\int\limits_{\tau_0}^{\beta} g(\tau)\,d\tau\quad (z\in E_2); \tag{2}
$$

$$
f(z)=\int\limits_{\tau_1}^{\beta} h^-(\tau)\,d\tau+\int\limits_{\alpha}^{\tau_1} g(\tau)\,d\tau\quad (z\in E_9); \tag{3}
$$

$$
f(z)=\int\limits_{\alpha}^{\beta} d\tau\int\limits_{0}^{2\pi} f^{\pm}(\tau,u_1(\tau,\delta))\,d\tau\quad (z\in K(\beta,\delta_1,\delta_2)\cup ,_1\cup ,_2), \tag{4}
$$

где

$$f^{\pm}(\tau, u_1(\tau,\delta)) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=1} \frac{F(t,\xi)\,d\xi}{\xi - u_1(\tau,\delta)}, \qquad |u_1(\tau,\delta)| < 1, \quad (|u_1(\tau,\delta)| > 1),$$

$$h^{\pm}(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f^{\pm}(t, u_1(\tau,\delta))\,dt, \tag{5}$$

$$g(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\varphi(\tau)+\psi}^{2\pi-\varphi(\tau)+\psi} f^{+}(\tau, u_1(\tau,\delta))\,dt + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\varphi(\tau)+\psi}^{\varphi(\tau)+\psi} f^{-}(\tau, u_1(\tau,\delta))\,dt, \tag{6}$$

$$\varphi(\tau) = \arccos\left((1 - \tau^{2\delta_1}|z_1|^2 - \tau^{2\delta_2}|z_2|^2)/2\tau^{\delta_1+\delta_2}\cdot|z_1||z_2|\right), \tag{7}$$

$$\psi = \arg z_1 - \arg z_2,$$

τ_0, τ_1 — нули функций λ_1 и λ_2 соответственно. Как показали исследования [5], функции класса $M^{\alpha,\beta}_{\delta_1,\delta_2}$ являются непрерывными в пространстве $\mathbb{C}^2$, аналитическими в областях $K(\beta,\delta_1,\delta_2)$, $,_1$ и $,_2$ и неаналитическими в области $\mathbb{C}^2 \backslash \overline{(K(\beta,\delta_1,\delta_2) \cup ,_1 \cup ,_2)}$, причем $K(\beta,\delta_1,\delta_2)$ есть ограниченная полная выпуклая двоякокруговая область с центром в точке $(0,0)$ [1].

Пусть $f \in M^{\alpha,\beta}_{\delta_1,\delta_2}$, $D = \sum\limits_{k=1}^{2} \delta_k \left(\frac{\partial}{\partial z_k} z_k + \frac{\partial}{\partial \bar z_k}\bar z_k\right)$, $L[f] = f + Df$.

Функции, определяемые дифференциальным оператором $L[f]$ отнесем к классу $P^{\alpha,\beta}_{\delta_1,\delta_2}$. Функции же

$$h^{\pm}(\alpha) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f^{\pm}(t, u_1(\alpha,\delta))\,dt \quad \text{и} \quad h^{\pm}(\beta) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f^{\pm}(t, u_1(\beta,\delta))\,dt \tag{8}$$

отнесем к классу T, они являются аналитическими соответственно в областях

$$K(\alpha,\delta_1,\delta_2)\ \left(\Omega_2 = \{(z) : \alpha^{\delta_1}|z_1| - \alpha^{\delta_2}|z_2| - 1 > 0\}\right)$$

и

$$K(\beta,\delta_1,\delta_2)\ \left(\Omega_1 = \{(z) : \beta^{\delta_1}|z_1| - \beta^{\delta_2}|z_2| - 1 > 0\}\right)$$

и неаналитическими в областях $\mathbb{C}^2\backslash K(\alpha,\delta_1,\delta_2) \cup \Omega_2$ и $\mathbb{C}^2\backslash K(\beta,\delta_1,\delta_2) \cup \Omega_1$ (см. [1]).

Теорема 1. *Пусть $F(t,\xi) \in Lip^{\xi}_{\Delta}(\alpha)$. Тогда в области E_2 функции классов $M^{\alpha,\beta}_{\delta_1,\delta_2}$ и T связаны соотношением*

$$L[f](z) = f(z) + D[f(z)] = \beta g(\beta) - \alpha h^{+}(\alpha), \tag{9}$$

где $g(\beta)$ определяется из формулы (6).

$\triangleleft$ Пусть $(z) \in E_2$. Тогда функции класса $M^{\alpha,\beta}_{\delta_1,\delta_2}$ в этой области представимы повторными интегралами (2), в которых произведем замену переменной τ по формуле

$$\tau = \rho \cdot A^{-1}, \quad A = |z_1|^{\delta_1^{-1}} + |z_2|^{\delta_2^{-1}}.$$

В результате получим

$$Af(z) = \int\limits_{\alpha A}^{\tau_0 A} h^{+}\left(\frac{\rho}{A}\right) d\rho + \int\limits_{\tau_0}^{\beta A} g\left(\frac{\rho}{A}\right) d\rho.$$

К обеим частям полученного равенства применим оператор D, пользуясь обобщением формулы Лейбница о дифференцировании интеграла от параметра

$$\begin{gathered} D[f(z)] = \int\limits_{\alpha A}^{\tau_0 A} D\left[h^{+}\left(\frac{\rho}{A}\right)\right] d\rho + \int\limits_{\tau_0}^{\beta A} D\left[g\left(\frac{\rho}{A}\right)\right] d\rho \\ + D[\tau_0 A]\big(h^{+}(\tau_0) - g(\tau_0)\big) + D[\beta A] g(\beta) - D[\alpha A] h^{+}(\alpha). \end{gathered} \tag{10}$$

Непосредственным подсчетом убеждаемся, что

$$D[\tau_0 A] = 0, \quad D[\beta A] = \beta A, \quad D[\alpha A] = \alpha A,$$

следовательно, из (10) получим доказываемое соотношение (9). $\triangleright$

Теорема 2. *При выполнении условий теоремы 1 функции классов $M^{\alpha,\beta}_{\delta_1,\delta_2}$ и T в области $K(\beta,\delta_1,\delta_2)$ связаны соотношением*

$$f(z) + D[f(z)] = \beta h^{+}(\beta) - \alpha h^{+}(\alpha). \tag{11}$$

$\triangleleft$ Доказательство равенства (11) аналогично доказательству теоремы 1. $\triangleright$

Рассмотрим следующие двумерные множества пространства $\mathbb{C}^2$:

$$C_1 = \{(z) : |z_1| = \beta^{-\delta_2},\ z_2 = 0\},$$

$$C_2 = \{(z) : |z_1| = \alpha^{-\delta_1},\ z_2 = 0\},$$
$$C_3 = \{(z) : z_1 = 0,\ |z_2| = \beta^{-\delta_2}\},$$
$$C_4 = \{(z) : z_1 = 0, \||z_2| = \alpha^{-\delta_2}\}.$$

Теорема 3. *Если $F(\cdot,\cdot) \in Lip^{\xi}_{\Delta}(\alpha)$, $f(\cdot) \in M^{\alpha,\beta}_{\delta_1,\delta_2}$, то функции класса $P^{\alpha,\beta}_{\delta_1,\delta_2}$ непрерывны в пространстве $\mathbb{C}^2$ за исключением множеств C_k, $k = 1,2,3,4$.*

$\lhd$ Найдем предельные значения функций класса $P^{\alpha,\beta}_{\delta_1,\delta_2}$ из областей E_2 и $K(\beta,\delta_1,\delta_2)$ на двумерном множестве C_1.

1. Пусть $(z) \in E_2$. Через

$$\sigma_{m,l}(\beta) = \begin{cases} \beta^{2\delta_2}|z_2|^2 + \beta^{2\delta_1}|z_1|^2 - 2\beta^{\delta_1+\delta_2}|z_1||z_2|m = 0, \\ \arg z_1 - \arg z_2 = l, \quad \arg 0 = \arg z_1^0 - l, \\ |m| \le 1, \quad l < 2\pi, \quad \delta_1 > 0,\ \delta_2 > 0,\ 0 < \beta < 1, \end{cases} \tag{12}$$

обозначим семейство двумерных поверхностей, проходящих через фиксированную точку $(z_1^0, 0) = (\xi_0\beta^{-\delta_1}, 0) = (z^0) \in C_1$, $|\xi_0| = 1$.

Из задания $\sigma_{m,l}$ следует, что в равенстве (6) величины $\varphi(\beta)$ и ψ будут постоянными, если $(z^0) \in \sigma_{m,l}(\beta)$.

На этом основании будем обозначать $\varphi(\beta)$ через φ_m, а ψ через l, если точка (z) принадлежит какой-либо фиксированной двумерной поверхности $\sigma_{m,l}(\beta)$.

В дальнейшем будем понимать под

$$\lim_{(z)\to(z^0)} L[f](z) = L[f_2](z^0), \tag{13}$$

если $(z) \in \sigma_{m,l}(\beta)$, $(z^0) \in C_1$, $|\xi_0| = 1$, где $L[f]$ — дифференциальный оператор, определяемый равенством (9).

2. Пусть теперь $(z) \in \sigma_{m,l}(\beta) \in E_2$, $(z^0) \in C_1$.

В равенстве (9) перейдем к пределу при $(z) \to (z^0)$. Тогда

$$L[f_2](z^0) = \beta \lim_{(z)\to(z^0)} g(\beta) - \alpha \lim_{(z)\to(z^0)} h^+(\alpha). \tag{14}$$

а) Существование $\lim\limits_{(z)\to(z^0)} g(\beta)$ по двумерной поверхности $\sigma_{m,l}$ доказано в [2] и [3]. Оттуда же следует, что

$$\begin{gathered} \lim_{(z)\to(z^0)} g(\beta) = \frac{1}{4\pi^2 i}\int_0^{2\pi} dt \int_{|\xi|=1} \frac{F(t,\xi)\,d\xi}{\xi - \xi_0} \\ + \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} F(t,\xi_0)\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_{l-\varphi_m}^{l+\varphi_m} F(t,\xi_0)\,dt, \end{gathered} \tag{15}$$

где особый интеграл $\int \frac{F(t,\xi)\,d\xi}{\xi-\xi_0}$ понимается в смысле главного значения по Коши.

б) Так как функция $h^+(\alpha)$ аналитическая в области $K(\alpha,\delta_1,\delta_2)$, то в силу $h^+(\alpha)$ имеем

$$\lim_{(z)\to(z^0)} h^+(\alpha) = \frac{1}{4\pi^2 i}\int\limits_0^{2\pi} dt \int\limits_{|\xi|=1} \frac{F(t,\xi)\,d\xi}{\xi - u_1^0(\alpha,\delta)}, \tag{16}$$

где

$$u_1^0(\alpha,\delta) = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\delta_1}\xi_0, \quad |\xi_0| = 1. \tag{17}$$

Подставляя правые части равенств (15) и (16) в (14), окончательно получим

$$\begin{aligned} L[f_2](z_0) =& \frac{\beta}{4\pi^2 i}\int\limits_0^{2\pi} dt \int\limits_{|\xi|=1} \frac{F(t,\xi)\,d\xi}{\xi-\xi_0} + \frac{\beta}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi} F(t,\xi_0)\,dt - \\ &- \frac{\beta}{2\pi}\int\limits_{l-\varphi_m}^{l+\varphi_m} F(t,\xi_0)\,dt - \frac{\alpha}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} dt \int\limits_{|\xi|=1} \frac{F(t,\xi)\,d\xi}{\xi - u_1^0(\alpha,\delta)}. \end{aligned} \tag{18}$$

3. Пусть $(z) \in K(\beta,\delta_1,\delta_2)$ и $(z) \to (z^0) \in C_1$.

Используя формулу (11) и проведя аналогичные выкладки как в пункте 2, получим

$$\begin{aligned} \lim_{(z)\to(z^0)} L[f](z) =& L[f^+](z^0) = \frac{\beta}{4\pi^2 i}\int\limits_0^{2\pi} dt \int\limits_{|\xi|=1} \frac{F(t,\xi)\,d\xi}{\xi-\xi_0} \\ &+ \frac{\beta}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi} F(t,\xi_0)\,dt - \frac{\alpha}{4\pi^2 i}\int\limits_0^{2\pi} dt \int\limits_{|\xi|=1} \frac{F(t,\xi)\,d\xi}{\xi - u_1^0(\alpha,\delta)}. \end{aligned} \tag{19}$$

Сравнивая формулы предельных значений (18) и (19) из областей E_2 и $K(\beta,\delta_1,\delta_2)$ на множестве C_1, заметим, что в точке $(z^0) \in C_1$ при переходе из области $K(\beta,\delta_1,\delta_2)$ в область E_2, функции класса $P^{\alpha,\beta}_{\delta_1,\delta_2}$ совершают скачок равный

$$L[f^+](z^0) - L[f_2](z_0) = \frac{\beta}{2\pi}\int\limits_{l-\varphi_m}^{l+\varphi_m} F(t,\xi_0)\,dt. \tag{20}$$

На этом основании соотношения (18) и (19) можно считать аналогами формул Сохоцкого для функций класса $P^{\alpha,\beta}_{\delta_1,\delta_2}$. Оттуда же следует справедливость теоремы 3 для множества C_1.

Для остальных множеств $C_k,\ k = 2, 3, 4$ доказательство теоремы аналогично.

Для постановки и решения краевых задач потребуется еще предельное значение функций класса $M^{\alpha,\beta}_{\delta_1,\delta_2}$ в точке $(z^0) = (\xi_0\beta^{-\delta_1}, 0) \in C_1$.

Пусть $(z) \in \mathbb{C}^2$. В силу непрерывности функции класса $M^{\alpha,\beta}_{\delta_1,\delta_2}$ в $\mathbb{C}^2$, это предельное значение будет равно

$$f^+(z^0) \equiv f_2(z^0) = \frac{1}{4\pi^2 i}\int\limits_{\alpha}^{\beta} d\tau \int\limits_{0}^{2\pi} dt \int\limits_{|\xi|=1} \frac{F(t,\xi)\,d\xi}{\xi - u_1^0(\tau,\delta)}, \tag{21}$$

где

$$\lim_{(z)\to(z^0)} f(z) = \begin{cases} f^+(z^0), & \text{если } (z) \in K(\beta,\delta_1,\delta_2), \\ f_2(z^0), & \text{если } (z) \in E_2, \end{cases}$$

$$u_1^0(\tau,\delta) = \left(\frac{\tau}{\beta}\right)^{\delta_1}\xi_0, \quad |\xi_0| = 1.$$

Отметим, что $|u_1^0(\tau,\delta)| = 1$ при $\tau = \beta$, поэтому только в этом случае внутренний интеграл в формуле (21) будем понимать как особый в смысле главного значения по Коши.

Приведем определения следующих функций [3]

Определение 1. Будем говорить, что однозначная функция $a(\xi, l, \varphi_m)$ принадлежит классу λ^+ (или λ^-) и писать $a(\xi, l, \varphi_m) \in \lambda^+$ (или $\alpha(\xi, l, \varphi_m) \in \lambda^-$), если она допускает непрерывные частные производные по действительным переменным l, φ_m $(|l| < 2\pi, |\varphi_m| < \pi)$ такие, что

$$\frac{\partial a}{\partial l} + \frac{\partial a}{\partial \varphi_m} = -\frac{1}{\pi}F(l+\varphi_m,\xi), \qquad \frac{\partial a}{\partial l} - \frac{\partial a}{\partial \varphi_m} = \frac{1}{\pi}F(l-\varphi_m,\xi)$$

$$\left(\text{или } \frac{\partial a}{\partial l} + \frac{\partial a}{\partial \varphi_m} = \frac{1}{\pi}F(l+\varphi_m,\xi), \qquad \frac{\partial a}{\partial l} - \frac{\partial a}{\partial \varphi_m} = -\frac{1}{\pi}F(l-\varphi_m,\xi)\right),$$

где $F(t,\xi) \in \mathrm{Lip}^{\xi}_{\Delta}(\alpha)$, ξ — комплексное переменное ($|\xi| = 1$).

Определение 2. Будем говорить, что однозначная функция $G(\xi, l, \varphi_m)$ принадлежит классу λ $(G \in \lambda)$, если она допускает непрерывные частные производные по действительным переменным l и φ_m $(|l| < 2\pi, |\varphi_m < \pi|)$ такие, что

$$\frac{\partial G}{\partial l} + \frac{\partial G}{\partial \varphi_m} = -\frac{1}{\pi}G(l,\varphi_m,\xi)\cdot F(l+\varphi_m,\xi),$$

$$\frac{\partial G}{\partial l} - \frac{\partial G}{\partial \varphi_m} = \frac{1}{\pi} G(l, \varphi_m, \xi) \cdot F(l - \varphi_m, \xi),$$

где $F(t, \xi) \in \mathrm{Lip}^{\xi}_{\Delta}(\alpha)$, ξ — комплексное переменное ($|\xi| = 1$), $G(\xi, l, \pi) = 1$.

В [3] также сформулированы необходимые и достаточные условия принадлежности функций $a(\xi, l, \varphi_m)$ и $G(\xi, l, \varphi_m)$ к классам λ^+, λ^-, λ. Приведем их.

Лемма 1. *Для того чтобы однозначная функция $a(\xi, l, \varphi_m)$ была представима в виде интеграла*

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{l+\varphi_m}^{l-\varphi_m} F(t, \xi)\, dt, \quad \text{или} \quad \frac{1}{2\pi} \int\limits_{l+\varphi_m}^{2\pi - \varphi_m + l} F(t, \xi)\, dt,$$

где $F(t, \xi) \in Lip^{\xi}_{\Delta}(\alpha)$, необходимо и достаточно, чтобы $a(\xi, l, \varphi_m) \in \lambda^-$ (λ^+).

Лемма 2. *Для того чтобы однозначная функция $G(\xi, l, \varphi_m) \in \lambda$ необходимо и достаточно, чтобы $G(\xi, l, \varphi_m) = e^{a(\xi, l, \varphi_m)}$, где $a(\xi, l, \varphi_m) \in \lambda^+$ (λ^-).*

Перейдем теперь к постановке краевых задач.

Предварительная краевая задача. *Пусть в пространстве $\mathbb{C}^2$ заданы области $K(\beta, \delta_1, \delta_2)$ и E_2. Требуется найти функцию $f(z)$ класса $M^{\alpha,\beta}_{\delta_1,\delta_2}$, исчезающую на многообразии бесконечно удаленных точек, разность предельных значений $L[f^+](z^0)$ и $L[f_2](z^0)$ которой в точках множества C_1, удовлетворяют соотношению*

$$L[f^+](z^0) - L[f_2](z^0) = \beta a(\xi, l, \varphi_m). \tag{22}$$

Решение. Так как $a(\xi, l, \varphi_m) \in \lambda^-$, то на основании леммы 1 найдется такая функция $F(t, \xi)$, что

$$a(\xi, l, \varphi_m) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{l-\varphi_m}^{l+\varphi_m} F(t, \xi)\, dt,$$

где $F(t, \xi) \in \mathrm{Lip}^{\xi}_{\Delta}(\alpha)$, поэтому краевое условие (22) эквивалентно формуле (20). Следовательно, функция из класса $M^{\alpha,\beta}_{\delta_1,\delta_2}$ дает решение задачи. Очевидно, что в классе функций $M^{\alpha,\beta}_{\delta_1,\delta_2}$ это решение единственно. Действительно, допустим, что задача (22) имеет еще одно решение в классе $M^{\alpha,\beta}_{\delta_1,\delta_2}$ и пусть

$$\tilde{f}(z) = \frac{1}{4\pi^2 i} \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\tau \int\limits_{0}^{2\pi} dt \int\limits_{|\xi|=1} \frac{\tilde{F}(t, \xi)\, d\xi}{\xi - u_1(\tau, \delta)},$$

означает разность этих двух решений. Тогда в силу условия (22) должно быть

$$L[\tilde{f}](z^0) - L[f](z^0) = 0,$$

т. е. $a(\xi, l, \varphi_m) = 0$. Отсюда и из леммы 1 следует, что $\tilde{F}(t, \xi) = 0$, поэтому $\tilde{f}(z) = 0$.

Краевая задача 1. *Пусть в $\mathbb{C}^2$ заданы области $K(\beta, \delta_1, \delta_2)$ и E_2. Требуется найти функцию $f(z)$ класса $M^{\alpha,\beta}_{\delta_1,\delta_2}$, обращающуюся в единицу на многообразии бесконечно удаленных точек, предельные значения $L[f^+](z^0)$ и $L[f_2](z^0)$ которой в точках множества $C_1 = \{(z) : z_1^0 = \beta^{-\delta_1}\xi_0, z_2^0 = 0\}$ удовлетворяют соотношению*

$$L[f^+](z^0) = G(\xi, l, \varphi_m) L[f_2](z^0), \tag{23}$$

где $G(\xi, l, \varphi_m) \in \lambda$.

Решение краевой задачи 1 легко находится при помощи решения предварительной краевой задачи. Действительно, логарифмируя краевое условие (23), получим

$$\ln L[f^+](z^0) - \ln L[f_2](z^0) = \ln G(\xi, l, \varphi_m). \tag{24}$$

На основании леммы 2 и определения функции $G(\xi, l, \varphi_m)$

$$\ln G(\xi, l, \varphi) = \beta a(\xi, l, \varphi_m) + 2\pi n i \equiv \frac{1}{2\pi} \int\limits_{l-\varphi_m}^{l+\varphi_m} F(t, \xi)\, dt + 2\pi n i,$$

где $F(t, \xi) \in \mathrm{Lip}^{\xi}_{\Delta}(\alpha)$.

Таким образом,

$$\ln L[f^+](z^0) - \ln L[f_2](z^0) = \frac{\beta}{2\pi} \int\limits_{l-\varphi_m}^{l+\varphi_m} F(t, \xi)\, dt + 2\pi n i. \tag{25}$$

Полагая

$$a_n(\xi, l, \varphi_m) = a(\xi, l, \varphi_m) + 2\pi n i, \quad , (z) = \ln L[f](z),$$

условие (25) перепишется так

$$,^{+}(z^0) - ,^{-}(z^0) = a_n(\xi, l, \varphi_m). \tag{26}$$

Следовательно, мы пришли к задаче отыскания функции класса $M^{\alpha,\beta}_{\delta_1,\delta_2}$ по разности предельных значений $\mathrm{Ln}\, L[f](z)$ и $\ln L[f_2](z)$ в точках множества

C_1, которая была бы разрешима, если в краевом условии (26) правая часть $a(\xi, l, \varphi_m) \in \lambda^-$ и, поэтому $a(\xi, l, \varphi_m) = 0$.

Таким образом, для разрешимости задачи с краевым условием (26) правая часть $a_n(\xi, l, \varphi_m)$ должна удовлетворять условию

$$a_n(\xi, l, \varphi_m) = 0. \tag{27}$$

Из условия (27) и определения $a_n(\xi, l, \varphi_m)$, получаем, что задача с краевым условием (26) будет разрешима при $n = 0$.

Решение ее в классе функций $M^{\alpha,\beta}_{\delta_1,\delta_2}$ при дополнительном условии исчезновения решения в бесконечно удаленных точках, имеет вид

$$,\ (z) = \frac{1}{4\pi^2 i} \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\tau \int\limits_{0}^{2\pi} dt \int\limits_{|\xi|=1} \frac{F(t,\xi)\, d\xi}{\xi - u_1(\tau,\delta)},$$

или

$$\ln L[f](z) = ,\ (z).$$

Отсюда

$$L[f](z) e^{\Gamma(z)}. \tag{28}$$

Решение же функционального уравнения (28) проведем следующим образом.

Пусть для определенности точка $(z) \in K(\beta, \delta_1, \delta_2)$. Известно (см. [4]), что в этом случае для аналитической в области D функции $L[f](z)$ существует обратный интегральный оператор

$$L^{-1}[f] = \int\limits_{0}^{1} f(\varepsilon^{\delta_1} z_1, \varepsilon^{\delta_2} z_2) d\varepsilon. \tag{29}$$

Применяя к обеим частям (28) оператор (29), получим решение краевой задачи 1 в явном виде

$$f(z) = L^{(-1)}[e^{\Gamma(z)}] = \int\limits_{0}^{1} e^{\Gamma(\varepsilon^{\delta_1} z_1, \varepsilon^{\delta_2} z_2)} d\varepsilon, \tag{30}$$

где

$$,\ (\varepsilon^{\delta_1} z_1, \varepsilon^{\delta_2} z_2) = \frac{1}{4\pi^2 i} \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\tau \int\limits_{0}^{2\pi} dt \int\limits_{|\xi|=1} \frac{F(t,\xi)\, d\xi}{\xi - u_2(\tau,\varepsilon,\delta)},$$

$$u_2(\tau,\varepsilon,\delta) = (\varepsilon\tau)^{\delta_1} z_1 + (\varepsilon\tau)^{\delta_2} z_2 e^{it}.$$

Краевая задача 2. *Пусть в пространстве* $\mathbb{C}^2$ *заданы области* $K(\beta,\delta_1,\delta_2)$ *и* E_2. *Требуется найти две функции* $f(z)$ *и* $\tilde f(z)$ *класса* $M^{\alpha,\beta}_{\delta_1,\delta_2}$ *при дополнительном условии обращения в единицу функции* f *и в ноль функции* $\tilde f$ *на любом многообразии бесконечно удаленных точек, предельные значения которых на множестве* C_1 *удовлетворяют условию*

$$L[f^+](z^0)\cdot L[\tilde f^+](z^0) = G(\xi,l,\varphi_m)L[f_2](z^0)\cdot L[\tilde f_2](z^0) + a(\xi,l,\varphi_m), \tag{31}$$

где $a(\xi,l,\varphi_m)\in\lambda^{-1}$, $G(\xi,l,\varphi_m)\in\lambda$.

Решение. Функцию $f(z)$ будем искать из соотношения

$$L[f^+](z^0) = G(\xi,l,\varphi_m)L[f_2](z^0), \tag{32}$$

которое является условием краевой задачи 1. Поэтому

$$f(z) = L^{(-1)}[e^{\Gamma(z)}],$$

где , (z) — определяется формулой (30).

Предельное значение функции $f(z)$ удовлетворяет соотношению (32), поэтому, заменяя в (31) произведение функций $G(\xi,l,\varphi_m)\cdot L[f_2](z^0)$ по формуле (32) на $L[f^+](z^0)$, получим

$$L[\tilde f](z^0) - L[\tilde f_2](z^0) = a(\xi,l,\varphi_m), \tag{33}$$

или, так как $a(\xi,l,\varphi_m)\in\lambda^-$, то по лемме 1 найдется единственное $\tilde F(t,\xi)$ такое, что

$$L[\tilde f^+](z^0) - L[\tilde f_2](z^0) = \frac{\beta}{2\pi}\int\limits_{l-\varphi_m}^{l+\varphi_m}\tilde F(t,\xi)\,d\xi. \tag{34}$$

Откуда, на основании решения предварительной краевой задачи имеем

$$L[\tilde f](z) = \frac{1}{4\pi^2 i}\int\limits_{\alpha}^{\beta} d\tau\int\limits_0^{2\pi} dt\int\limits_{|\xi|=1}\frac{\tilde F(t,\xi)\,d\xi}{\xi - u_1(\tau,\delta)}. \tag{35}$$

Применим теперь к обеим частям (35) интегральный оператор (29) при условии, что $(z)\in K(\beta,\delta_1,\delta_2)$. В результате получим решение краевой задачи 1

$$\tilde f(z) = \frac{1}{4\pi^2 i}\int\limits_0^1 \varepsilon d\varepsilon\int\limits_{\alpha}^{\beta} d\tau\int\limits_0^{2\pi} dt\int\limits_{|\xi|=1}\frac{\tilde F(t,\xi)\,d\xi}{\xi - u_2(\tau,\varepsilon,\delta)}$$

в явном виде. Легко показать, что функция $\tilde{f}(z)$ на бесконечности обращается в ноль, а $f(z)$ в единицу.

Замечание. Так как $C_1 = K(\beta, \delta_1, \delta_2) \cap E_2 \cap E_4, \qquad C_2 = E_4 \cap E_9 \cap {,}_1$, то можно ставить и решать задачи аналогичные краевым задачам 1 и 2 путем комбинации предельных значений $L[f](z)$ из областей $K(\beta, \delta_1, \delta_2)$, E_2, E_4, E_9 и ${,}_1$, которыми исчерпываются всевозможные пути подхода к множествам C_1 и C_2. Так, например, в [6] и [7] поставлены краевые задачи только для областей $K(\beta, \delta_1, \delta_2)$ и E_4.

Литература

1. *Айзенберг Л. А.* О граничных свойствах функций, аналитических в двоякокруговых областях // Докл. АН СССР.—1969.—Т. 125, № 5—С. 959–962.
2. *Боганов В. И.*, *Луканин Г. Л.* Интеграл типа Темлякова и его предельные значения // Докл. АН СССР.—1967.—Т. 176, № 1—С. 45–48.
3. *Боганов В. И.* Интеграл типа Темлякова и некоторые краевые задачи // Ученые записки Моск. обл. пед. ин-та им. Н. К. Крупской.—1967. —Т. 188.—С. 56–79.
4. *Баврин И. И.* Общие интегральные представления голоморфных функций // Докл. АН СССР.—Т. 217, № 1—С. 11–13.
5. *Дзебисов Х. П.* Интегральные представления голоморфных функций в специальных областях пространства $\mathbb{C}^2$ // Межвуз. сб. трудов «Аналитические функции и их приложения» Сев.-Осет. гос. ун-та.—1984.—С. 28–48.
6. *Дзебисов Х. П.* Интегральные представления аналитических функций в специальных областях пространства $\mathbb{C}^2$ и их приложения // Труды Саратовской зимней школы «Теория функций и приближений»—1988.—С. 50–52.
7. *Дзебисов Х. П.* Свойства функций в пространствах $\mathbb{C}$ и $\mathbb{C}^2$, определенных некоторыми интегралами // Респ. сб. трудов «Математический анализ и теория функций» Моск. обл. пед. ин-та им. Н. К. Крупской.—1985.—Т. 5—С. 102–119.
8. *Дзебисов Х. П.* Внутренняя и внешняя односторонние однородные краевые задачи сопряжения для двоякокруговых областей пространства $\mathbb{C}^2$ // Владикавказский мат. журн.—2000.—Т. 2, Вып. 4.—С. 5–12. (Полнотекст. база данных, номер гос. регистр. 0229905212 (http://alanianet.ru/omj/journal.htm).)

г. Владикавказ *Статья поступила 12 февраля 2001 г.*