Владикавказский математический журнал
Июль–сентябрь, 2000, Том 2, Выпуск 3

УДК **539.377**

ИЗМЕНЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ, СВЯЗАННОЕ С КОЭФФИЦИЕНТОМ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Т. З. Чочиев

В настоящей статье удалось построить формулу, выражающую закон изменения нелинейного температурного поля, установлена ее непосредственная связь с заданием начального и краевого условий, а также физическими свойствами среды.

В работе [4], ввиду сложности нелинейного температурного поля, не дана общая схема функции отношения $p(x,t)$, поэтому не вскрыта ее связь с физическими условиями задачи. В настоящей статье удалось построить формулу, выражающую закон изменения нелинейного температурного поля, установлена ее непосредственная связь с заданием начального и краевого условий, а также физическими свойствами среды. Напоминаем, что если коэффициент теплопроводности k является функцией от температуры: $k = k(T)$, то задача нелинейного температурного поля

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(T)\frac{\partial T}{\partial x}\right) \tag{1}$$

для однородного упругого полупространства, ограниченного поверхностью $x = 0$, при соблюдении условий

$$T|_{t=0} = T_0, \quad \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\alpha}{k}(T-\theta) = 0 \text{ при } x = 0 \tag{2}$$

и при принятии обозначения Кирхгофа

$$F = \frac{1}{k_0}\int\limits_{T_0}^{T} k(T)\,dT,$$

приводится к уравнению теплопроводности

$$\frac{c\rho}{k(T)}\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \tag{3}$$

где $c\rho$ — объемная теплоемкость, k_0 — коэффициент теплопроводности, который соответствует линейному температурному полю, T_0 — начальная температура, $\alpha(t)$ — коэффициент теплоотдачи на поверхности $x = 0$ полупространства, θ — температура, установившаяся на поверхности в результате теплообмена. Вводя промежуточные функции $\lambda(T)$ и T^* [4] формулой

$$\int \frac{dF}{\lambda} = T^*, \tag{$*$}$$

получаем

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{p_0}{p} e^{\int_0^x \frac{c\rho}{pk} dx}, \ \ \frac{\partial F}{\partial x} = p_0 e^{\int_0^x \frac{c\rho}{pk} dx} \tag{4}$$

$$\left(V = p_0(t) e^{\int_0^x \frac{c\rho}{pk} dx} \right), \tag{5}$$

где $p_0(t)$ — произвольная функция, а (4) удовлетворяет уравнению (3). Функция отношения $p(x,t)$ определяется равенством

$$p(x,t) = \frac{\partial F}{\partial x} \Big/ \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial T^*}{\partial x} \Big/ \frac{\partial T^*}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial x} \Big/ \frac{\partial T}{\partial t}.$$

В связи с тем, что $F(x,t)$ температурная функция, также должно иметь место

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{V}{p}\right) = \frac{\partial V}{\partial t} \ \Rightarrow \ \frac{\partial V}{\partial x} - p\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{1}{p}\frac{\partial p}{\partial x} V,$$

решение которого есть

$$V = \varphi(\tau) e^{-\frac{1}{2}\int_0^\sigma \frac{\partial \frac{1}{p}}{\partial x} d\sigma} \ \ (d\tau = p dx + dt, \ d\sigma = p dx - dt), \tag{6}$$

где $\varphi(\tau)$ — произвольная функция. Сравним ее правую часть с правой частью формулы (5),

$$p_0 e^{\int_0^x \frac{c\rho}{pk} dx} = \varphi(\tau) e^{-\frac{1}{2}\int_0^\sigma \frac{\partial \frac{1}{p}}{\partial x} d\sigma} \quad (\varphi(\tau)|_{t=0} = p_0(t)). \tag{7}$$

Обозначение Кирхгофа и ($*$) приводят к соотношениям (см. [4])

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \lambda \frac{\partial T^*}{\partial t} = \frac{p_0}{p} e^{\int_0^x \frac{c\rho}{pk} dx}, \qquad \frac{\partial F}{\partial x} = \lambda \frac{\partial T^*}{\partial x} = p_0 e^{\int_0^x \frac{c\rho}{pk} dx},$$

$$\frac{\partial T^*}{\partial x} = \frac{p_0 p}{c\rho} \lambda_0 \frac{\partial}{\partial x} e^{\int_0^x \frac{c\rho}{pk} dx}, \qquad \frac{\partial T^*}{\partial t} = \frac{p_0 \lambda_0}{c\rho} \frac{\partial}{\partial x} e^{\int_0^x \frac{c\rho}{pk} dx}.$$

Здесь, так же, как и выше, правые части должны удовлетворять условию потенциальности поля

$$\frac{\partial(pV_0)}{\partial t}=\frac{\partial V_0}{\partial x}\quad\left(V_0=\frac{p_0\lambda_0}{c\rho}\frac{\partial}{\partial x}e^{\int_0^x\frac{c\rho}{pk}dx}\right) \tag{8}$$

или уравнению

$$\frac{\partial V_0}{\partial x}-\frac{\partial V_0}{\partial t}p=\frac{\partial p}{\partial t}V_0, \tag{9}$$

решением которого является

$$V_0=\varphi_1(\tau)e^{\frac{1}{2}\int_0^\sigma\frac{\partial\ln p}{\partial t}d\sigma},$$

где $\varphi_1(\tau)$ произвольная функция. Сравнив V_0 с правой частью выражения (8)

$$\frac{\lambda_0 p_0}{c\rho}\frac{\partial}{\partial x}e^{\int_0^x\frac{c\rho}{pk}dx}=\varphi_1(\tau)e^{\frac{1}{2}\int_0^\sigma\frac{\partial\ln p}{\partial t}d\sigma} \tag{10}$$

и приняв во внимание (7), получим

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi(\tau)e^{-\frac{1}{2}\int_0^x\frac{\partial\frac{1}{p}}{\partial x}dx}\right)=\varphi_1(\tau)\frac{c\rho}{\lambda_0}e^{\frac{1}{2}\int_0^\sigma\frac{\partial\ln p}{\partial t}d\sigma}. \tag{11}$$

Это и есть равенство, которому должна удовлетворять функция отношения $p(x,t)$. В (11) вошли новые переменные τ и σ, поэтому возникает необходимость преобразования координат

$$\frac{\partial}{\partial x}=p\left(\frac{\partial}{\partial\tau}+\frac{\partial}{\partial\sigma}\right),\quad\frac{\partial}{\partial t}=p\left(\frac{\partial}{\partial\tau}-\frac{\partial}{\partial\sigma}\right)$$

$$(d\tau=pdx+dt,\ d\sigma=pdx-dt).$$

Результат перехода дает

$$p\varphi e^{\frac{1}{2}\int_0^\sigma\left(\frac{\partial\ln p}{\partial\tau}+\frac{\partial\ln p}{\partial\sigma}\right)d\sigma}\left[\frac{\varphi'(\tau)}{\varphi(\tau)}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\int_0^\sigma\ln p\,d\sigma}{\partial\sigma^2}+2\frac{\partial^2\int_0^\sigma\ln p\,d\sigma}{\partial\sigma\partial\tau}\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{\partial^2\int_0^\sigma\ln p\,d\sigma}{\partial\tau^2}\right)\right]=\frac{c\rho}{\lambda_0}\varphi_1(\tau)e^{\frac{1}{2}\int_0^\sigma\left(\frac{\partial\ln p}{\partial\tau}-\frac{\partial\ln p}{\partial\sigma}\right)d\sigma}.$$

Так как $\frac{1}{\lambda_0}$ есть некоторое решение (1.11) из [4] зависящее от τ, то без ограничения общности можем допустить

$$\varphi_1(\tau)=\lambda_0(\tau)\varphi^*(\tau)\quad\left(\varphi^*(\tau)=\frac{\varphi(\tau)}{c\rho}\right).$$

Следовательно, последнее приводимо к сложному нелинейному уравнению

$$\frac{\partial^2 \int \ln p\, d\sigma}{\partial \tau^2} + 2\frac{\partial^2 \int \ln p\, d\sigma}{\partial \sigma \partial \tau} + \frac{\partial^2 \int \ln p\, d\sigma}{\partial \sigma^2} = \frac{2}{p^2} - 2\frac{\varphi^{*\prime}(\tau)}{\varphi^*(\tau)}, \tag{12}$$

которое можно записать в виде системы

$$\frac{\partial \int \ln p\, d\sigma}{\partial \tau} + \frac{\partial \int \ln p\, d\sigma}{\partial \sigma} = V, \quad \frac{\partial V^*}{\partial \tau} + \frac{\partial V^*}{\partial \sigma} = \frac{2}{p^2} - 2\frac{\varphi^{*\prime}(\tau)}{\varphi^*(\tau)}, \tag{13}$$

или, считая $\rho^*(x,t)$ заданной, можно построить равносильную систему

$$\begin{gathered}\frac{\partial \int_0^\sigma \ln p\, d\sigma}{\partial \tau} + \frac{\partial \int_0^\sigma \ln p\, d\sigma}{\partial \sigma} = \rho^* + 2\left(\frac{1}{p^2} - \frac{\varphi^{*\prime}(\tau)}{\varphi^*(\tau)}\right),\\ \frac{\partial V^*}{\partial \tau} + \frac{\partial V^*}{\partial \sigma} = \frac{V^* - \rho^*}{l}, \\ V^* - \rho^* = 2l\left(\frac{1}{p^2} - \frac{\varphi^{*\prime}(\tau)}{\varphi^*(\tau)}\right),\end{gathered} \tag{14}$$

где l определим позднее. Из второго уравнения находим V^* в виде

$$V^* = e^{\frac{1}{2}\int_0^\xi l d\xi}\left(C_1(\eta) - \frac{1}{2}\int\limits_0^\xi e^{-\frac{1}{2}\int_0^\xi l d\xi} \cdot \frac{\rho^*}{l} d\xi\right) \quad (\xi = \tau + \sigma,\ \eta = \tau - \sigma), \tag{15}$$

и правую часть первого уравнения заменяем третьим

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\int\limits_0^\sigma \ln p d\sigma = \frac{V^*}{2} \Rightarrow p = e^{\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \sigma}\int_0^\xi V^* d\xi}. \tag{16}$$

По установленным формулам (15) и (16) третье соотношение из (14) переписывается как

$$\frac{V^*}{2l} - \frac{\rho^*}{2l} = e^{-\frac{\partial}{\partial \sigma}\int_0^\xi V^* d\xi} - \frac{\varphi^{*\prime}(\tau)}{\varphi^*(\tau)},$$

или, заменив левую часть данного равенства левой частью второго уравнения из (14) — в форме

$$\frac{\partial V^*}{\partial \xi} = e^{-\frac{\partial}{\partial \sigma}\int_0^\xi V^* d\xi} - \frac{\varphi^{*\prime}(\tau)}{\varphi^*(\tau)}.$$

После умножения на $e^{\frac{\partial}{\partial\sigma}\int_0^\xi V^* d\xi}\frac{\partial\xi}{\partial\sigma}$ имеем

$$e^{\frac{\partial}{\partial\sigma}\int_0^\xi V^* d\xi}\frac{\partial V^*}{\partial\sigma}+\frac{\varphi^{*\prime}(\tau)}{\varphi^*(\tau)}e^{\frac{\partial}{\partial\sigma}\int_0^\xi V^* d\xi}\frac{\partial\xi}{\partial\sigma}=\frac{\partial\xi}{\partial\sigma},$$

откуда получаем уравнение относительно экспоненты

$$\frac{\partial}{\partial\xi}e^{\frac{\partial}{\partial\sigma}\int_0^\xi V^* d\xi}+\frac{\varphi^{*\prime}(\tau)}{\varphi^*(\tau)}e^{\frac{\partial}{\partial\sigma}\int_0^\xi V^* d\xi}=1\quad\left(\frac{\partial\xi}{\partial\sigma}=1\right),$$

Решая последнее уравнение получаем

$$e^{\frac{\partial}{\partial\sigma}\int_0^\xi V^* d\xi}=\frac{C(\eta)+\int_0^\xi\varphi^*(\tau)d\tau}{\varphi^*(\tau)}. \tag{17}$$

Следовательно (см. (16)),

$$\frac{1}{p}=\pm\sqrt{\frac{\varphi^*(\tau)}{C(\eta)+\int_0^\xi\varphi^*(\tau)d\xi}}, \tag{18}$$

а также учитывая, что V^* допускает непрерывные производные (см. (15)), из (17) выводим

$$V^*=\int\limits_0^\sigma\frac{{\varphi^*}^2(\tau)-\varphi^{*\prime}(\tau)\left[C(\eta)+\int_0^\xi\varphi^*(\tau)d\xi\right]}{\varphi^*(\tau)\left[C(\eta)+\int_0^\xi\varphi^*(\tau)d\xi\right]}d\sigma+V_0^*(\xi). \tag{19}$$

Результат приравнивания правых частей (15) и (19) позволяет определить $\rho^*(\xi,\eta)$ в виде

$$\frac{\rho^*}{2l}=\frac{1}{2}\int\limits_0^\sigma\frac{{\varphi^*}^2-\varphi^{*\prime}\left[C(\eta)+\int_0^\xi\varphi^* d\xi\right]}{\varphi^*\left[C(\eta)+\int_0^\xi\varphi^* d\xi\right]}d\sigma$$

$$-\frac{\partial}{\partial\xi}\int\limits_0^\sigma\frac{{\varphi^*}^2-\varphi^{*\prime}\left[C(\eta)+\int_0^\xi\varphi^* d\xi\right]}{\varphi^*\left[C(\eta)+\int_0^\xi\varphi^* d\xi\right]}d\sigma-\frac{\partial}{\partial\xi}\left[V_0^* e^{-\int_0^\xi l d\xi}\right]. \tag{20}$$

Далее, значения p, V^*, ρ из (18)–(20) внесем в третье равенство выражения (14) при условии, что $V_0^*\equiv 0$ (это допущение упрощает нахождение l)

$$l-\frac{1}{l}$$

$$=2\frac{\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\varphi^*(\tau)\int_0^\sigma\frac{d\sigma}{C(\eta)+\int_0^\xi\varphi^* d\xi}\right]-\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\varphi^{*\prime}(\tau)}{\varphi^*(\tau)}\sigma\right)-\frac{{\varphi^*}^2-\varphi^{*\prime}\left[C(\eta)+\int_0^\xi\varphi^* d\xi\right]}{\varphi^*\left[C(\eta)+\int_0^\xi\varphi^* d\xi\right]}}{\int_0^\sigma\frac{\varphi^*(\tau)d\sigma}{C(\eta)+\int_0^\xi\varphi^* d\xi}-\frac{\varphi^{*\prime}(\tau)}{\varphi^*(\tau)}\sigma}. \tag{21}$$

Отсюда и определяем l. Установленные выше формулы (18)–(20) удовлетворяют всем равенствам (14). Так как в формуле (19) при $\sigma = 0$, $V^* = 0$, то в правой части (15) $C_1(\eta) = 0$. Все выше перечисленные функции зависят от $C(\eta)$ и $\varphi^*(\tau)$ и, следовательно, согласно (10) будет

$$\frac{p_0}{c\rho}\frac{\partial}{\partial x}e^{\int \frac{c\rho}{pk}dx} = \varphi^* e^{\frac{1}{2}\int \frac{\partial \ln p}{\partial t}d\sigma},$$

Тем самым установлено тождественное равенство (см. (11))

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi(\tau)e^{-\frac{1}{2}\int_0^\sigma \frac{\partial \frac{1}{p}}{\partial x}d\sigma}\right) = \varphi(\tau)e^{\frac{1}{2}\int_0^\sigma \frac{\partial \ln p}{\partial t}d\sigma},$$

на основании которого частные производные функции $F(x,t)$ выражаются (см. (5) и (7)) формулами

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \varphi(\tau)e^{-\frac{1}{2}\int_0^\sigma \frac{\partial \frac{1}{p}}{\partial x}d\sigma}, \qquad \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\varphi(\tau)}{p(\tau,\sigma)}e^{-\frac{1}{2}\int_0^\sigma \frac{\partial \frac{1}{p}}{\partial x}d\sigma}.$$

Более того, поскольку правые части удовлетворяют условиям теоремы Шварца (см. (5)), то дифференциальное соотношение

$$dF = \frac{1}{k_0}K(T)dT = \frac{\varphi(\tau)}{p(\tau,\sigma)}e^{-\frac{1}{2}\int_0^\sigma \frac{\partial \frac{1}{p}}{\partial x}d\sigma}dt + \varphi(\tau)e^{-\frac{1}{2}\int_0^\sigma \frac{\partial \frac{1}{p}}{\partial x}d\sigma}d\sigma \qquad (22)$$

позволяет исключить температурную функцию $T(x,t)$. Пусть $k(T_1)$ ($T_0 < T_1 < T$) — есть значение $k(T)$ в состоянии $T = T_1$ (по теореме о среднем). Тогда вместо второго условия (2) будем иметь[1]

$$F(x,t)|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x} - \alpha(t)\left[\frac{F}{k(T_1)} + \frac{T_0-\theta}{k_0}\right] = 0 \ \text{ при } x = 0. \qquad (23)$$

Так как

$$\frac{\partial F}{\partial x} = k(T)\frac{\partial T}{\partial x},$$

где F обозначение Кирхгофа, то в этом смысле записанное краевое условие (23) обратно дает (2). Соотношение (22) можно представить в виде определенного интеграла

$$F = \int\limits_{\tau_0}^{\tau} \frac{\varphi(\tau)}{p(\tau,\sigma)}e^{-\frac{1}{2}\int_0^\sigma \frac{\partial \frac{1}{p}}{\partial x}d\sigma}d\tau,$$

[1] $k(T)$ — удовлетворяет всем условиям теоремы о среднем. При $x = 0$ $\lim_{t\to 0}\ k(T_1) = k(T_0)$.

где $\tau|_{t=0} = \tau_0$. Таким образом, выполнено начальное условие. Далее, замечая, что

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \varphi(\tau) e^{-\frac{1}{2}\int_0^\sigma \frac{\partial \frac{1}{p}}{\partial x} d\sigma} - \left(\frac{\varphi(\tau)}{p} e^{-\frac{1}{2}\int_0^\sigma \frac{\partial \frac{1}{p}}{\partial x} d\sigma} \right)_{t=0},$$

краевое условие (23) можно при $x = 0$ представить в виде

$$\varphi(\tau) e^{-\frac{1}{2}\int_0^\sigma \frac{\partial \frac{1}{p}}{\partial x} d\sigma} - \alpha \left[\frac{1}{k(T_1)} \int\limits_0^\tau \frac{\varphi(\tau)}{p} e^{-\frac{1}{2}\int_0^\sigma \frac{\partial \frac{1}{p}}{\partial x} d\sigma} d\tau + \frac{T_0 - \theta}{k_0} \right] = \varphi(0).$$

Введя обозначение

$$\int\limits_0^\tau \frac{\varphi(\tau)}{p} e^{-\frac{1}{2}\int_0^\sigma \frac{\partial \frac{1}{p}}{\partial x} d\sigma} d\tau = Q \quad (\text{при } x = 0), \tag{23$_1$}$$

из дифференциального уравнения

$$\frac{\partial Q}{\partial \tau} - \frac{\alpha}{pk(T_1)} Q = \frac{\alpha}{p} \left[\frac{T_0 - \theta}{k_0} + \frac{\varphi(0)}{\alpha} \right] \quad \text{при } x = 0$$

находим Q:

$$Q = -\frac{T_0 - \theta}{k_0} k(T_1) + e^{\frac{1}{k(T_1)}\int_0^\tau \frac{\alpha}{p} d\tau}$$
$$\times \left[Q_0 + \frac{T_0 - \theta}{k_0} k(T_1) - \varphi(0) k(T_1) \int\limits_0^\tau \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial \tau} e^{-\frac{1}{k(T_1)}\int_0^\tau \frac{\alpha}{p} d\tau} d\tau \right], \tag{24}$$

где в силу обозначений постоянная Q_0 получается равной 0. Подставим в правую часть (23) вместо Q значение из (24) и продифференцируем обе части по τ:

$$\varphi(\tau) e^{-\frac{1}{2}\int_0^\sigma \frac{\partial \frac{1}{p}}{\partial x} d\sigma}$$
$$= \alpha e^{\frac{1}{k(T_1)}\int_0^\tau \frac{\alpha}{p} d\tau} \left[\frac{T_0 - \theta}{k_0} - \varphi^*(0) \int\limits_0^\tau \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial \tau} e^{-\frac{1}{k(T_1)}\int_0^\tau \frac{\alpha}{p} d\tau} d\tau \right] + \varphi(0)$$

или

$$\left[\varphi(\tau) e^{-\frac{1}{2}\int_0^\sigma \frac{\partial \frac{1}{p}}{\partial x} d\sigma} - \varphi(0) \right] e^{-\frac{1}{k(T_1)}\int_0^\tau \frac{\alpha}{p} d\tau}$$

$$= \alpha\left(\frac{T_0-\theta}{k_0} - \varphi(0)\int\limits_0^\tau \frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial\tau} e^{-\frac{1}{k(T_0)}\int_0^\tau \frac{\alpha}{p}d\tau} d\tau\right).$$

Предположим, что

$$\varphi(\tau)e^{-\frac{1}{2}\int_0^\sigma \frac{\partial\frac{1}{p}}{\partial x}d\sigma} - \varphi(0) = \frac{\alpha}{p} - \frac{\alpha(0)}{p(0)} e^{\frac{1}{k(T_0)}\int_0^\tau \frac{\alpha}{p}d\tau}, \tag{25}$$

а также

$$\int\limits_0^\tau \frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial\tau} e^{-\frac{1}{k(T_1)}\int_0^\tau \frac{\alpha}{p}d\tau} d\tau = D. \tag*{$(25)_1$}$$

Тогда относительно D имеем уравнение

$$\frac{\partial D}{\partial\tau} - \frac{\varphi(0)}{k(T_1)}D = -\frac{1}{k(T_1)}\left(\frac{\alpha(0)}{p(0)} + \frac{T_0-\theta}{k_0}\right),$$

решение которого

$$D = e^{\frac{\varphi(0)}{k(T_1)}\tau}\left[D_0 + \left(\frac{\alpha(0)}{p(0)} + \frac{T_0-\theta}{k_0}\right)\frac{1}{\varphi(0)}e^{-\frac{\varphi(0)}{k(T_1)}\tau}\right],$$

где

$$D_0 = -\left(\frac{\alpha(0)}{p(0)} + \frac{T_0-\theta}{k_0}\right)\frac{1}{\varphi(0)}.$$

Это решение вместе с обозначением $(25)_1$ дает:

$$e^{-\frac{1}{k(T_1)}\int_0^\tau \frac{\alpha}{p}d\tau} = D_0\frac{\varphi(0)}{k(T_1)}\int\limits_0^\tau \alpha e^{-\frac{\varphi(0)}{k(T_1)}\tau}d\tau + D_0^* \quad (D_0^* = 1)$$

или

$$-\frac{1}{k(T_1)}\int\limits_0^\tau \frac{\alpha}{p}d\tau = \ln\left[D_0\frac{\varphi(0)}{k(T_1)}\int\limits_0^\tau \alpha e^{-\frac{\varphi(0)}{k(T_1)}\tau}d\tau + D_0^*\right].$$

Следовательно,

$$\frac{1}{p} = \frac{-\left(\frac{\alpha(0)}{p(0)} + \frac{T_0-\theta}{k_0}\right)e^{\frac{\varphi(0)}{k(T_1)}\tau}}{\frac{1}{k(T_1)}\left(\frac{\alpha(0)}{p(0)} + \frac{T_0-\theta}{k_0}\right)\int_0^\tau \alpha e^{\frac{\varphi(0)}{k(T_1)}\tau}d\tau - 1} \quad \text{при } x = 0. \tag{26}$$

В точке $\tau = \sigma = 0$ будет

$$\frac{1}{p(0,0)} = \frac{T_0 - \theta}{k_0(1 - \alpha(0))}.$$

Если условимся, что $C(0) = p(0,0)$ (это предположение не накладывает никаких ограничений на установленные формулы (18), (19) и (20)), то из (18) сразу вычисляем значение $\varphi(0)$: $\varphi(0) = \frac{1}{p(0,0)}$.

Таким образом, формула (26) полностью определяет функцию $\frac{1}{p}$ всюду при $x = 0$, а это позволяет найти функции $C(\eta)$ и $\varphi(\tau)$ (см. (24) и (18) при $x = 0$), как зависящие от начальных и краевых условий

$$C(\eta) = p^2(0,\eta)\left[\frac{\alpha(\eta)}{p(0,\eta)} - \frac{\alpha(0)}{p(0,0)} e^{\frac{1}{k(T_1)}\int_0^{\frac{\eta}{2}} \frac{\alpha}{p} d\tau} + \varphi(0)\right] e^{-\frac{1}{2}\int_0^{-\frac{\eta}{2}} \frac{\partial \frac{1}{p}}{\partial x} d\sigma},$$

$$\varphi(\tau) = e^{-\frac{1}{2}\int_0^{-\frac{\tau}{2}} \frac{\partial \frac{1}{p}}{\partial x} d\sigma}\left[\varphi(0) + \frac{\alpha(2\tau)}{p(0,2\tau)} - \frac{\alpha(0)}{p(0,0)} e^{\frac{1}{k(T_1)}\int_0^{\tau} \frac{\alpha}{p} d\tau}\right],$$

от которых зависят все остальные функции, включая $p(\xi,\eta)$ (см. (18))

$$\frac{1}{p(\xi,\eta)} = \sqrt{\frac{\varphi^*(\frac{\xi+\eta}{2})}{C(\eta) + \int_0^{\xi} \varphi^*(\tau) d\xi}},$$

а также функцию $Q(\tau,\sigma)$ (см. (24)), которая обеспечивает выполнимость краевого условия (23). Все функции, которые были введены выше, зависят от $p(\tau,\sigma)$, $\varphi(\tau)$, $C(\eta)$, и они полностью определены в полупространстве, включая точки поверхности $x = 0$. Причем, $\xi = \tau + \sigma$, $\eta = \tau - \sigma$ и при $x = 0$, $t = \tau - \sigma = \eta$, $\xi = 0$, $\sigma = -\tau$, $\eta = 2\tau = -2\sigma$.

Теперь функцию $F(x,t)$ можно считать определенной, т. е. удовлетворяющей уравнению (3), начальному и краевому условиям (23). А из (22) нужно попытаться явно определить температурную функцию T. Далее, поскольку $\varphi^*(\tau)$ найдена (см. (7)), находим и $p_0(t)$. Вернемся к $(*)$, $F(x,t)$ уже известна, между $F(x,t)$ и $T^*(x,t)$ (см. (4)) существует функциональная зависимость

$$T^*(x,t) = \psi(F).$$

С другой стороны (см. (8))

$$\frac{dF}{dT^*} = \lambda = \frac{k(T)}{\lambda_0(\tau)}$$

и

$$dT^* = \psi' dF = \frac{\lambda_0(\tau)}{k(T)} dF.$$

Литература

1. *Карлслоу Г., Егер Д.* Теплопроводность твердых тел.— М.: Наука, 1964.
2. *Коваленко А. Д.* Основы термоупругости.—Киев: Наука думка, 1970.
3. *Лыков А. В.* Теория теплопроводности.—М.: Высшая школа, 1967.
4. *Чочиев Т. З.* О фундаментальной функции нелинейного температурного поля // Владикавказский мат. журн.—2000.—Т. 2, Вып. 1.—С. 32–44.

г. Цхинвал *Статья поступила 13 апреля 2000 г.*