Владикавказский математический журнал
Июль–сентябрь, 2000, Том 2, Выпуск 3

УДК **519.64**

К ВОПРОСУ ПРИМЕНЕНИЯ ВНЕШНИХ УЗЛОВ В МОДИФИЦИРОВАННЫХ СХЕМАХ ДИСКРЕТНЫХ ВИХРЕЙ

Д. Г. Санакидзе, Ш. С. Хубежты

Предложена модифицированная схема типа дискретных вихрей с увеличенной степенью точности, которая применяется к численному решению сингулярных интегральных уравнений с произвольными замкнутыми контурами интегрирования. Оценивается точность погрешности вычисления.

Рассмотрим сингулярный интеграл

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t)}{t-t_0}dt \quad (t_0 \in L), \tag{1}$$

где L — замкнутый ляпуновский контур на плоскости и $\varphi(t)$ заданная на L (достаточно гладкая) функция. Под $t = t(s)$ $(= x(s) + fy(s))$, $0 \leq s \leq l$ будем подразумевать уравнение L относительно дуговой абсциссы s. Введем на L систему равноотстоящих (по длине L) узлов $\{\tau_j\}_{j=1}^{2n}$ $(\tau_j = t(s_j))$. На основе разбиения данной системы на две $\{\tau_{2p-1}\}_{p=1}^{n}$ и $\{\tau_{2p}\}_{p=1}^{n}$ (подобно схеме дискретных вихрей [1], [2]) в [3] была предложена приближенная схема для интегралов вида (1):

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t)}{t-t_0}dt \approx \varphi(t_0) + \sum_{\sigma=0}^{n-1}(p_{2\sigma-1}+p_{2\sigma+1})\frac{\varphi(\tau_{2\sigma+1})-\varphi(t_0)}{\tau_{2\sigma+1}-t_0},\ t_0 \in \{\tau_{2p}\}_{p=1}^{n},$$

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t)}{t-t_0}dt \approx \varphi(t_0) + \sum_{\sigma=0}^{n-1}(p_{2\sigma}+p_{2\sigma+2})\frac{\varphi(\tau_{2\sigma+2})-\varphi(t_0)}{\tau_{2\sigma+2}-t_0},\ t_0 \in \{\tau_{2p-1}\}_{p=1}^{n},$$

где $p_j = \frac{1}{2\pi i}(\tau_{j+2}-\tau_j)$.

На этой основе для одного класса сингулярных интегральных уравнений была построена и обоснована вычислительная схема типа дискретных вихрей, имеющая определенно повышенную точность, обусловленную соответствующей точностью приведенной двухточечной интерполяционной квадратурной формулы для интегралов (1) по контуру L. Тем не менее, исследование вопроса о возможности дальнейшего повышения точности таких схем, естественно, представляет интерес.

Очевидно, путем применения более точных квадратурных формул может быть увеличена точность приближения самого интеграла (1). Однако, что касается численного решения сингулярных интегральных уравнений, то обоснование построенных на таких квадратурных формулах схем не укладывается в общие принципы схем метода дискретных вихрей и оказывается в значительной степени затруднительным.

Чтобы пояснить суть дела, отметим, что в обосновании упомянутой выше схемы одно из главных утверждений представляют используемые в [3] асимптотические равенства

$$\frac{p_{\nu-2\sigma-1}+p_{\nu-2\sigma+1}}{\tau_{\nu-2\sigma+1}-\tau_\nu}=-\frac{2}{(2\sigma-1)\pi i}[1+O(n^{-\delta}j_n^\delta)],$$

$$\frac{p_{\nu+2\sigma-3}+p_{\nu+2\sigma-1}}{\tau_{\nu+2\sigma-1}-\tau_\nu}=\frac{2}{(2\sigma-1)\pi i}[1+O(n^{-\delta}j_n^\delta)]\quad(1\le\nu\le 2n,\sigma\le j_n)\tag{2}$$

(δ — показатель в условии Ляпунова для контура L) для некоторой подпоследовательности $\{j_n\}$ ($j_n\uparrow\infty$) натуральных номеров с условием (в дальнейшем исследовании подразумевается, что последовательность $\{j_n\}$ подчинена определенным дополнительным условиям) $(j_n/n)^\delta \ln\, j_n\to 0,\ n\to\infty$, вследствие чего

$$\sum_{\delta=0}^{j_n}\left\{\frac{p_{\nu-2,\sigma-1}+p_{\nu-2,\sigma+1}}{\tau_{\nu-2,\sigma+1}-\tau_\nu}+\frac{p_{\nu+2,\sigma-3}+p_{\nu+2,\sigma-1}}{\tau_{\nu+2,\sigma-1}-\tau_\nu}\right\}\tag{3}$$
$$=O(n^{-\delta}j_n^\delta)\ln j_n\to 0 \text{ при } n\to\infty.$$

Возможность выполнения такого соотношения наряду с равноудаленностью друг от друга узлов $\{s_j\}_{j=1}^{2n}$ обусловлена также и структурой коэффициентов p_j. А именно, замечая

$$p_j=\frac{h}{\pi i}[x'(\xi_j)+iy'(\eta_j)];\quad \xi_j,\eta_j\in(s_j,s_{j+2})\quad\left(s_{j+2}=s_j+2h,\ h=\frac{l}{2n}\right),\tag{4}$$

можно утверждать, что в выполнении (3) существенное значение имеет равенство между собой коэффициентов обычной (по отрезку действительной оси) формулы трапеций. Однако, как известно из теории квадратур, формулы с большим числом равноотстоящих узлов этим свойством не обладают (здесь же заметим, что (4) можно рассматривать как взаимозависимость между коэффициентами обычной формулы трапеций и ее комплексного аналога по дуге контура L).

Тем не менее, как оказывается, если вместо класса замкнутых квадратурных формул рассматривать формулы, содержащие узлы вне множества интегрирования, можно указать конкретную квадратурную формулу довольно высокой степени точности, для которой получение указанных (и ряда других) представлений оказывается возможным. В частности, для промежутков вида $[s_j, s_{j+2}]$ (с заданной на них некоторой функцией $\psi(s)$) подразумеваемая квадратурная формула имеет вид (см. [4], стр. 332) [1]:

$$\int_{s_j}^{s_{j+2}} \psi(s)ds \approx \frac{s_{j+2}-s_j}{24}\{-\psi(s_{j-2}) + 13[\psi(s_j)+\psi(s_{j+2})] - \psi(s_{j+4})\}. \tag{5}$$

Соответствующий комплексный аналог можно записать в виде (подинтегральную функцию комплексного переменного t мы также обозначаем через ψ)

$$\int_{\tau_j\tau_{j+2}} \psi(t)dt \approx q_{j,j-2}\psi(\tau_{j-2}) + q_{j,j}\psi(\tau_j) + q_{j,j+2}\psi(\tau_{j+2}) + q_{j,j+4}\psi(\tau_{j+4}),$$

где $\tau_j\tau_{j+2}$ — кратчайшая дуга с концами τ_j, τ_{j+2}, расположенными в положительном направлении на L,

$$q_{j,j+2\mu} = \frac{1}{\pi i}\int_{\tau_j\tau_{j+2}} \prod_{k=-1,k\neq\mu}^{2} \frac{t-\tau_{j+2k}}{\tau_{j+2\mu}-\tau_{j+2k}}dt \quad (\mu=-1,0,1,2).$$

Нетрудно получить

$$q_{j,j+2\mu} = \frac{1}{\pi i}\int_{s_j}^{s_{j+2}} \prod_{k=-1,k\neq\mu}^{2} \frac{s-s_{j+2k}}{s_{j+2\mu}-s_{j+2k}}[1+O(n^\delta)]t'(s)ds,$$

на основании чего (с учетом тождества $t'(s) = t'(s_j) + [t'(s)-t'(s_j)]$) можно написать[2]

$$q_{j,j+2\mu} = 2hA_{j+2\mu}\frac{t'(s_j)}{\pi i} + O(n^{1+\delta}) \text{ при } n\to\infty \quad (\mu=-1,0,1,2), \tag{6}$$

[1] $R_n(f) = \frac{11}{720}(h)^5 f^{(5)}(\xi),\ 2h = s_{j+2}-s_j$

[2] Согласно (4), очевидно, что коэффициентам p_j также можно придать аналогичный вид.

где входящие в главную часть числа

$$A_{j-2} = A_{j+4} = -\frac{1}{24}, \quad A_j = A_{j+2} = \frac{13}{24}$$

представляют коэффициенты формулы (5).

Теперь, зафиксируем $t_0 = \tau_\nu$ в одной из систем узлов $\{\tau_{2p-1}\}_{p=1}^n$, $\{\tau_{2p}\}_{p=1}^n$, к интегралу от функции $\frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-t_0}$ на каждой из дуг $\tau_j\tau_{j+2}$, с принадлежащей к другой системе концами, применим выше приведенную квадратурную формулу (при изменении четности ν указанные две системы узлов взаимозаменяются):

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t)}{t-\tau_\nu}dt \approx \varphi(\tau_\nu) + \sum_{\sigma=0}^{n-1} c_\sigma(\nu)\frac{\varphi(\tau_{\nu+2\sigma+1}) - \varphi(\tau_\nu)}{\tau_{\nu+2\sigma+1} - \tau_\nu},$$

$$c_\sigma(\nu) = l_{\nu+2\sigma-3} + l_{\nu+2\sigma-1} + l_{\nu+2\sigma+1} + l_{\nu+2\sigma+3},$$

где l_j обозначает то же самое, что и $q_{j+2,\mu}^{(j)}$ при $\mu = 0$. При этом для l_j имеют место представления вида (6), соответственно, коэффициентами:

$$A_{\nu+2\sigma-3} = A_{\nu+2\sigma+3} = -\frac{1}{24}, \quad A_{\nu+2\sigma-1} = A_{\nu+2\sigma+1} = \frac{13}{24}.$$

В результате можно убедиться в справедливости асимптотической формулы

$$c_\sigma(\nu) = \frac{2h}{\pi i}t'(s_{\nu\sigma}^*) + O(h^{2+\sigma}),$$

где $s_{\nu\sigma}^*$ — произвольным образом фиксированная точка из $[s_{\nu+2\sigma-3}, \tau_{\nu+2\sigma+3}]$. На основании последнего становится ясным, что для данной квадратурной суммы имеют место аналогичные (2) асимптотические представления. Тем самым обоснование построенной с помощью указанной здесь формулы схемы для численного решения сингулярных интегральных уравнений может быть осуществлено аналогично изложенному в заметке [3].

Литература

1. *Белоцерковский С. М., Лифанов И. К.* Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях.—М.: Наука, 1985.—256 с.
2. *Лифанов И. К.* Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент.—М.: ТОО «Янус», 1995.—520 с.

3. *Саникидзе Д. Г.* О методе дискретных вихрей повышенной точности для численного решения одного класса сингулярных интегральных уравнений // Дифференц. уравнения.—1998.—Т. 34, № 9.—С. 1–7.
4. *Микеладзе Ш. Е.* Численные методы математического анализа.—М.: Гостехиздат, 1953.—527 с.

г. Владикавказ *Статья поступила 24 сентября 2000 г.*