

УДК 532(075.8)

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ ПРИ СЕЛЕКТИВНОМ ВОДОЗАБОРЕ  
ИЗ СТРАТИФИЦИРОВАННОГО ВОДОЕМА

И. Д. Музаев, Ж. Д. Туаева

Рассматриваются вопросы, связанные с математическим моделированием процесса селективного водозабора из стратифицированного водоема. Известно, что при расчете селективного водозабора определяют «критическое» положение поверхности раздела слоев, при котором не происходит захвата воды из загрязненных слоев водоема. Существующие расчетные формулы для определения «критического» положения поверхностей раздела слоев получены при условии установившихся (стационарных) движений воды в водоеме. Однако при включении и отключении водозаборного сооружения имеют место переходные (нестационарные) процессы, и на поверхности раздела образуются внутренние гравитационные волны, которые могут провоцировать нарушение селективного водозабора. В работе предложена новая математическая модель внутренних волн, генерированных вышеописанными переходными процессами.

В прямоугольной системе координат  $xOyz$  часть пространства, ограниченная условиями:  $0 \leq x \leq L$ ,  $0 \leq y \leq B$ ,  $-H_0 \leq z \leq H_1$ , представляет стратифицированный водоем — источник водоснабжения. При этом  $-H_0 \leq z \leq 0$  представляет нижний слой, а  $0 \leq z \leq H_1$  — верхний слой с плотностями  $\rho_0$  и  $\rho_1$  соответственно. Плоскость  $z = 0$  — невозмущенная горизонтальная поверхность раздела слоев,  $z = H_1$  — невозмущенная свободная поверхность верхнего слоя,  $z = -H_0$  — дно водоема.

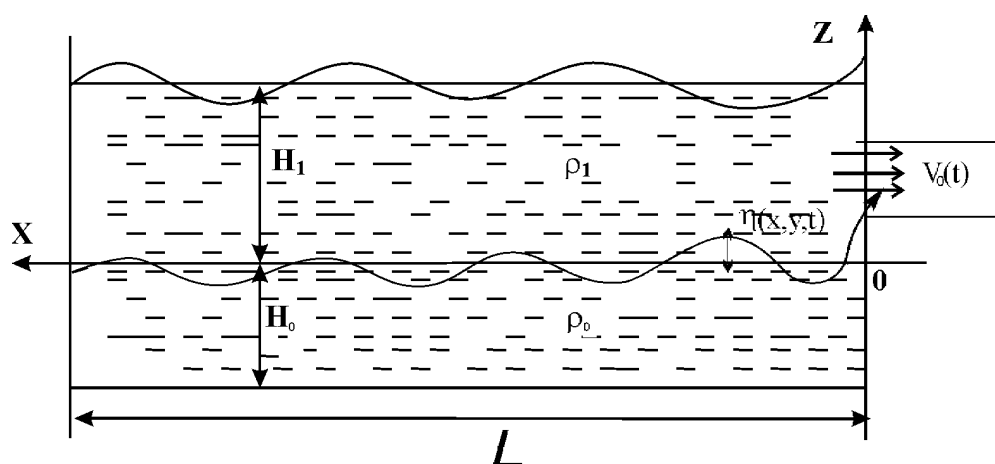


Рис. 1.

На участке напорной грани водоема

$$x = 0, \quad y_0 - b \leq y \leq y_0 + b, \quad z_0 - a \leq z \leq z_0 + a$$

помещено отверстие водозаборного окна, через которое отбирается вода из верхнего осветленного слоя со скоростью  $V_0(t)$ , где  $t$  — время (рис. 1).

Потенциалы скоростей  $\varphi_0(x, y, z, t)$  и  $\varphi_1(x, y, z, t)$  в нижнем и верхнем слоях должны удовлетворять дифференциальным уравнениям Лапласа [2]

$$\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial z^2} = 0, \quad -H_0 \leq z \leq 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} = 0, \quad 0 \leq z \leq H_1, \quad (2)$$

и следующим начальным и граничным условиям:

$$\varphi_0 = \frac{\partial \varphi_0}{\partial t} = \varphi_1 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = 0 \quad \text{при } t = 0, \quad (3)$$

$$\left. \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \right|_{x=L} = 0, \quad (4)$$

$$\left. \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right|_{x=0} = \begin{cases} V_0(t), & z - z_0 + a \leq z \leq z - z_0 - a, \quad y - y_0 + b \leq y \leq y - y_0 - b, \\ 0, & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad (5)$$

$$\left. \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right|_{x=L} = 0,$$

$$\left. \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} \right|_{y=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} \right|_B = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \Big|_{y=B} = 0, \quad (7)$$

$$\rho_0 \left( \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial t^2} + g \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} \right) \Big|_{z=0} = \rho_1 \left( \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} + g \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right) \Big|_{z=0}, \quad \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \Big|_{z=0}, \quad (8)$$

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial z} \Big|_{z=-H_0} = 0, \quad \left( \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} + g \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right) \Big|_{z=H_1} = 0, \quad (9)$$

где  $g$  — ускорение силы тяжести,  $(0, y_0, z_0)$  — координаты центра водозаборного окна,  $2b$  — ширина окна,  $2a$  — высота окна.

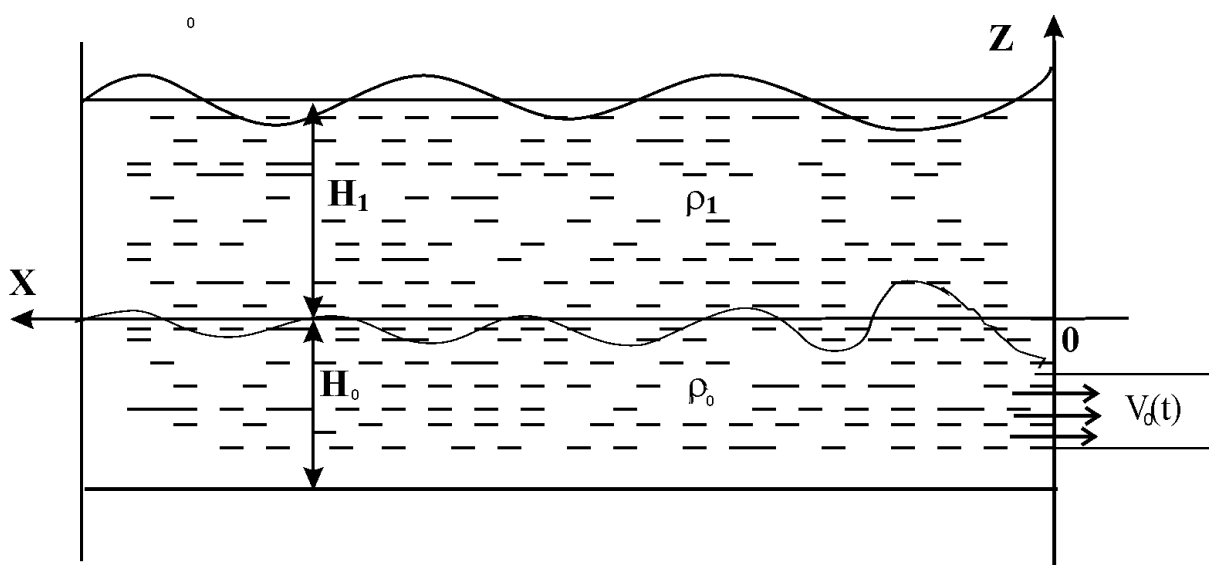


Рис. 2

При заборе воды из нижнего слоя в начально-краевой задаче (рис. 2) граничные условия (4) и (5) принимают вид

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \Big|_{x=0} = \begin{cases} V_0(t), & z - z_0 + a \leq z \leq z - z_0 - a, \quad y - y_0 + b \leq y \leq y - y_0 - b, \\ 0, & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0.$$

При заборе воды по схеме, представленной на рис. 3, дифференциальное уравнение (1), начальные условия (3), граничные условия (4), (6)–(9) остаются неизменными. Дифференциальное уравнение (2) и граничные условия (5) заменяются на следующие

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} = \frac{Q_0(t)}{8a^3} f(x, y, z), \quad (10)$$

$$\left. \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad (11)$$

где  $Q_0(t)$  — расход воды через внутриводное водозаборное отверстие,  $a$  — некоторая фиктивная длина,

$$f(x, y, z) = [\theta(x - x_0 + a) - \theta(x - x_0 - a)] \cdot [\theta(y - y_0 + a) - \theta(y - y_0 - a)] \cdot [\theta(z - z_0 + a) - \theta(z - z_0 - a)],$$

где  $\theta$  — единичная функция Хевисайда.

Легко заметить, что процесс водозабора из внутреннего пространства водоема смоделирован как непрерывная система точечных стоков равномерно распределенных в кубе

$$x_0 - a \leq x \leq x_0 + a, \quad y_0 - a \leq y \leq y_0 + a, \quad z_0 - a \leq z \leq z_0 + a.$$

При водозаборе из нижнего слоя по схеме (рис. 4) функция  $\frac{Q_0}{8a^3} F(x, y, z)$  из дифференциального уравнения (2) перейдет в уравнение (1).

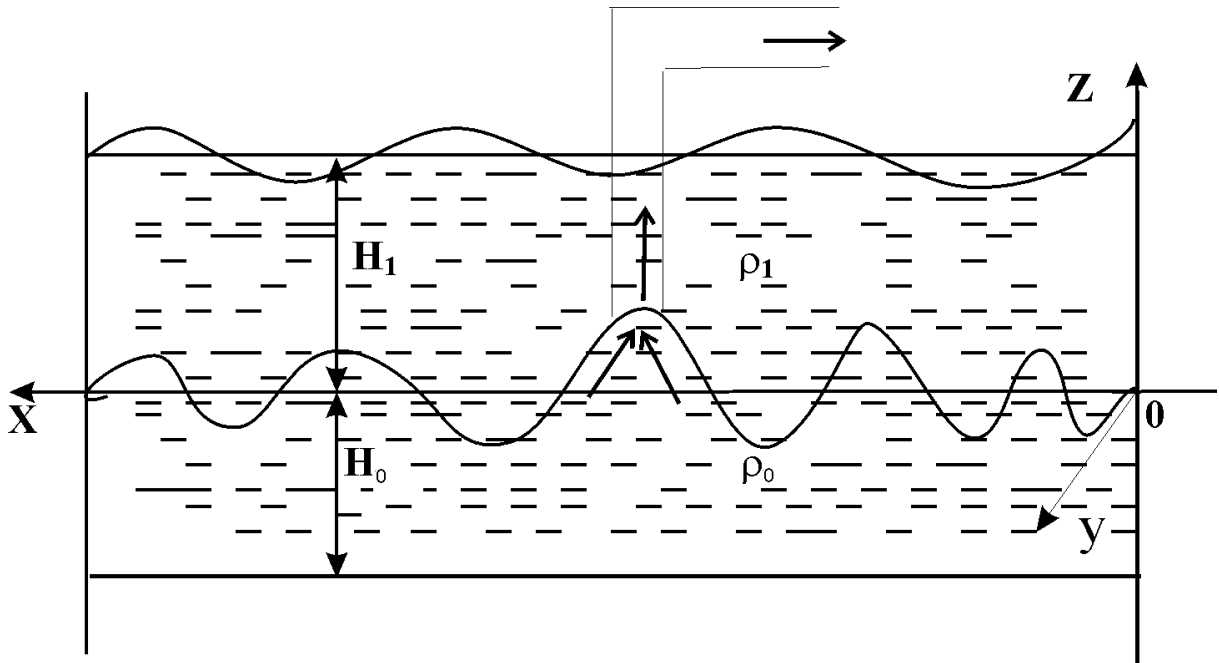


Рис. 3

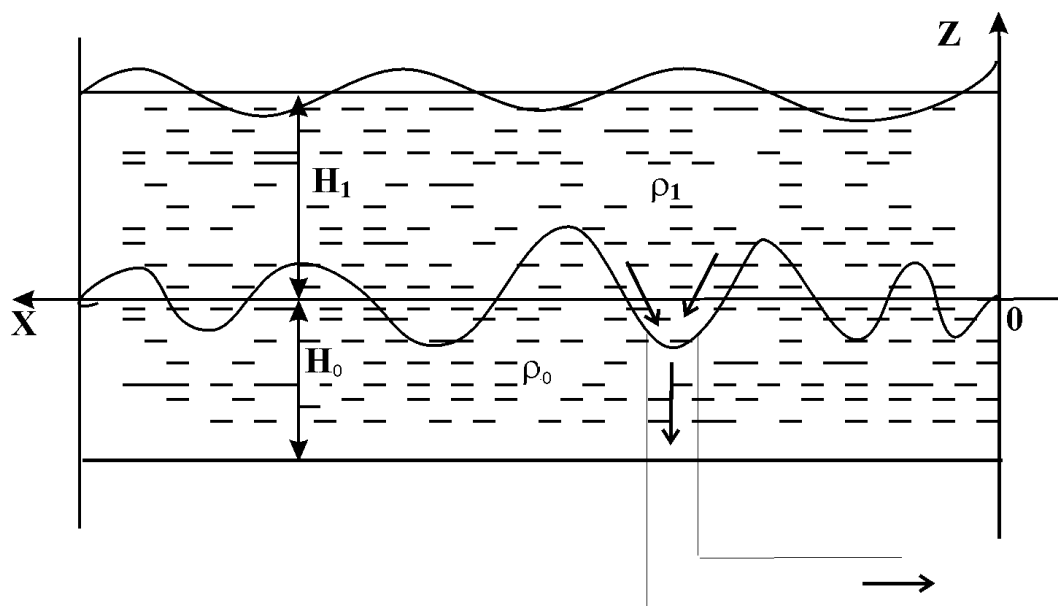


Рис. 4

Поставленные начально-краевые задачи легко решаются методами операционного исчисления и конечных интегральных преобразований Фурье. Выражение для внутренней волновой поверхности  $\eta(x, y, t)$  получено по схеме (рис. 1) для случая двумерной задачи в виде равномерно сходящегося тригонометрического ряда. Уравнение для  $\eta(x, y, t)$  выглядит следующим образом

$$\eta(x, y, t) = \frac{\rho_1}{\rho_0 - \rho_1} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} - \frac{\rho_0}{\rho_0 - \rho_1} \cdot \frac{\partial \varphi_0}{\partial t} \quad \text{при } z = 0.$$

Потенциалы скоростей  $\varphi_0(x, z, t)$  и  $\varphi_1(x, z, t)$  находятся следующим образом. В результате применения интегрального преобразования Лапласа относительно времени  $t$  выражения (1)–(9) в изображениях для двумерного случая принимают следующий вид:

$$\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_1}{\partial z^2} = 0, \quad 0 \leq z \leq H_1, \quad (12)$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_0}{\partial z^2} = 0, \quad -H_0 \leq z \leq 0, \quad (13)$$

$$\left( p^2 \tilde{\varphi}_1 + g \frac{\partial \tilde{\varphi}_1}{\partial z} \right) \Big|_{z=H_1} = 0, \quad (14)$$

$$\rho_0 \left( p^2 \tilde{\varphi}_0 + g \frac{\partial \tilde{\varphi}_0}{\partial z} \right) \Big|_{z=0} = \rho_1 \left( p^2 \tilde{\varphi}_1 + g \frac{\partial \tilde{\varphi}_1}{\partial z} \right) \Big|_{z=0}, \quad (15)$$

$$\left. \frac{\partial \tilde{\varphi}_0}{\partial z} \right|_{z=0} = \left. \frac{\partial \tilde{\varphi}_1}{\partial z} \right|_{z=0}, \quad (16)$$

$$\left. \frac{\partial \tilde{\varphi}_0}{\partial z} \right|_{z=-H_0} = 0, \quad (17)$$

$$\left. \frac{\partial \tilde{\varphi}_1}{\partial x} \right|_{x=0} = \frac{1}{p} v_1(z), \quad \left. \frac{\partial \tilde{\varphi}_1}{\partial x} \right|_{x=L} = 0, \quad (18)$$

$$\left. \frac{\partial \tilde{\varphi}_0}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial \tilde{\varphi}_0}{\partial x} \right|_{x=L} = 0, \quad (19)$$

$$v_1(z) = \left. \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right|_{x=0} = \begin{cases} v_0, & z_0 - a \leq z \leq z_0 + a, \\ 0, & z < z_0 - a, \quad z > z_0 + a, \end{cases}$$

$$\tilde{\eta}(x, p) = \frac{\rho_1}{(\rho_0 - \rho_1)g} p \tilde{\varphi}_1(x, 0, p) - \frac{\rho_0}{(\rho_0 - \rho_1)g} p \tilde{\varphi}_0(x, 0, p),$$

где

$$\tilde{\varphi}_0(x, z, p) = \int_0^\infty \varphi_0(x, z, t) e^{-pt} dt, \quad \tilde{\varphi}_1(x, z, p) = \int_0^\infty \varphi_1(x, z, t) e^{-pt} dt, \\ p \in \mathbb{C}, \quad \operatorname{Re} p > 0.$$

Применим в выражениях (12)–(19) конечное интегральное косинус-преобразование Фурье относительно переменной  $x$ . Получим:

$$\frac{\partial^2 \phi_n^1}{\partial z^2} - a_n^2 \phi_n^1 = \frac{v_1(z)}{p}, \quad 0 \leq z \leq H_1, \quad (20)$$

$$\frac{\partial^2 \phi_n^0}{\partial z^2} - a_n^2 \phi_n^0 = 0, \quad -H_0 \leq z \leq 0, \quad (21)$$

$$\left( p^2 \phi_n^1 + g \frac{\partial \phi_n^1}{\partial z} \right) \Big|_{z=H_1} = 0, \quad (22)$$

$$\rho_0 \left( p^2 \phi_n^0 + g \frac{\partial \phi_n^0}{\partial z} \right) \Big|_{z=0} = \rho_1 \left( p^2 \phi_n^1 + g \frac{\partial \phi_n^1}{\partial z} \right) \Big|_{z=0}, \quad (23)$$

$$\left. \frac{\partial \phi_n^0}{\partial z} \right|_{z=0} = \left. \frac{\partial \phi_n^1}{\partial z} \right|_{z=0}, \quad \left. \frac{\partial \phi_n^0}{\partial z} \right|_{z=-H_0} = 0, \quad (24)$$

$$\tilde{\eta}_n(p) = \frac{\rho_1}{(\rho_0 - \rho_1)g} p \phi_n^1(0) - \frac{\rho_0}{(\rho_0 - \rho_1)g} p \phi_n^0(0), \quad (25)$$

где  $\phi_n^0(z) = \int_0^L \tilde{\varphi}_0(x, z, p) \cos(a_n x) dx$ ,  $\phi_n^1(z) = \int_0^L \tilde{\varphi}_1(x, z, p) \cos(a_n x) dx$ ,  $a_n = n\pi/L$ . Решения дифференциальных уравнений (20) и (21) с граничными условиями (22)–(24) имеют вид

$$\phi_n^1(z) = C_n^1 \operatorname{ch}(a_n z) + C_n^2 \operatorname{sh}(a_n z) + \frac{1}{p a_n} \int_0^z v_1(s) \operatorname{sh}(a_n(z-s)) ds, \quad (26)$$

$$\phi_n^0(z) = C_n^2 \frac{\operatorname{ch}(a_n(z + H_0))}{\operatorname{sh}(a_n H_0)}, \quad (27)$$

где постоянные  $C_n^1$ ,  $C_n^2$  определяются из следующих равенств:

$$C_n^1 = \frac{\left[ p^2 + \left( 1 - \frac{\rho_1}{\rho_0} \right) g a_n \operatorname{th}(a_n H_0) \right] R_n}{\operatorname{ch}(a_n H_1) \left( 1 + \frac{\rho_1}{\rho_0} \operatorname{th}(a_n H_1) \operatorname{th}(a_n H_0) \right) (p^2 + \omega_1^2)(p^2 + \omega_2^2)}, \quad (28)$$

$$C_n^2 = \frac{p^2 \frac{\rho_1}{\rho_0} \operatorname{th}(a_n H_0) R_n}{\operatorname{ch}(a_n H_1) \left( 1 + \frac{\rho_1}{\rho_0} \operatorname{th}(a_n H_1) \operatorname{th}(a_n H_0) \right) (p^2 + \omega_{1,n}^2)(p^2 + \omega_{2,n}^2)}, \quad (29)$$

$$R_n = -\frac{p}{a_n} \int_0^{H_1} v_1(s) \operatorname{sh}(a_n(H_1 - s)) ds - \frac{g}{p} \int_0^{H_1} v_1(s) \operatorname{ch}(a_n(H_1 - s)) ds, \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \omega_{1,n}^2 &= g a_n \frac{\operatorname{th}(a_n H_1) + \operatorname{th}(a_n H_0) - \sqrt{D_n}}{2 \left( 1 + \frac{\rho_1}{\rho_0} \operatorname{th}(a_n H_1) \operatorname{th}(a_n H_0) \right)}, \\ \omega_{2,n}^2 &= g a_n \frac{\operatorname{th}(a_n H_1) + \operatorname{th}(a_n H_0) + \sqrt{D_n}}{2 \left( 1 + \frac{\rho_1}{\rho_0} \operatorname{th}(a_n H_1) \operatorname{th}(a_n H_0) \right)}, \end{aligned} \quad (31)$$

В результате выполнения обратного преобразования Лапласа и вычисления интегралов в последнем выражении оригинал выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \eta_n &= \frac{\rho_1}{\rho_0} v_0 \frac{\operatorname{th}(a_n H_0)}{S_n (\omega_{2,n}^2 - \omega_{1,n}^2)} \left[ \bar{R}_{1,n} (\omega_{2,n} \sin(\omega_{2,n} t) - \omega_{1,n} \sin(\omega_{1,n} t)) \right. \\ &\quad \left. + \bar{R}_{2,n} \left( \frac{1}{\omega_{1,n}} \sin(\omega_{1,n} t) - \frac{1}{\omega_{1,n}} \sin(\omega_{1,n} t) \right) \right], \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \bar{R}_{1,n} &= \frac{1}{a_n} \frac{e^{-a_n(z_0+a)} - e^{-a_n(2H_1-z_0-a)} - e^{-a_n(z_0-a)} - e^{-a_n(2H_1-z_0+a)}}{1 + e^{-2a_n H_1}}, \\ \bar{R}_{2,n} &= g \frac{e^{-a_n(z_0+a)} - e^{-a_n(2H_1-z_0-a)} - e^{-a_n(z_0-a)} - e^{-a_n(2H_1-z_0+a)}}{1 + e^{-2a_n H_1}}, \end{aligned}$$

$$S_n = 1 + \frac{\rho_1}{\rho_0} \operatorname{th} a_n H_1 \operatorname{th}(a_n H_0).$$

В результате выполнения обратного косинус-преобразования Фурье получается уравнение для поверхности раздела слоев при селективном водозаборе из двух-

слойного стратифицированного водоема

$$\eta(x, t) = -2 \frac{\rho_1}{\rho_0 L} v_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{th}(a_n H_0)}{S_n (\omega_{2,n}^2 - \omega_{1,n}^2)} \times \left[ \bar{R}_{1,n} (\omega_{2,n} \sin(\omega_{2,n} t) - \omega_{1,n} \sin(\omega_{1,n} t)) + \bar{R}_{2,n} \left( \frac{1}{\omega_{1,n}} \sin(\omega_{1,n} t) - \frac{1}{\omega_{2,n}} \sin(\omega_{2,n} t) \right) \right] \times \cos(a_n x).$$

Численные расчеты позволяют установить нижнее «критическое» положение раздела слоев и, тем самым, обеспечить селективный водозабор при переходных процессах в водозаборных сооружениях.

### Литература

1. *Большаков В. А.* Справочник по гидравлике.—Киев: Вища школа, 1977.—280 с.
2. *Ламб Г.* Гидродинамика.—М.: Изд-во технико-теоретической литературы, 1947.—928 с.
3. *Бочаров О. Б., Овчинников Т. Э.* О проблемах моделирования течения идеальной стратифицированной жидкости в окрестности водозабора // Сб. научн. трудов «Вычислительные технологии», Новосибирск.—1993.—Т. 2, № 6.—С.163–167.

*г. Владикавказ*

*Статья поступила 28 августа 2000 г.*